

Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

Dimmick, Edgar L.: *Introducing symbolic logic*. Math. Mag. **30**, 18—24 (1956). Allgemeinverständliche Einführung.

• Touchais, M.: *Les applications techniques de la logique*. Préface de M. G.

Lehmann. Paris: Dunod 1956. XX, 84 p., 54 fig. broché 940 F.

Das Bändchen, das als erste Einführung in das Gebiet der technischen Anwendungen der formalen Logik gekennzeichnet werden kann, behandelt in seinem ersten Teil die Grundbegriffe der formalen Logik, insbesondere die binären und ternären logischen Funktionen. Der zweite Teil ist den Anwendungen gewidmet und betrifft hauptsächlich die Theorie der Schaltkreise und der Verkehrssicherungssysteme.

W. Nef.

Andreoli, Giulio: *La logica del finito e del concreto*. Giorn. Mat. Battaglini **84** (V. Ser. 4), 19—48 (1956).

Bing, Kurt: *On simplifying truth-functional formulas*. J. symbolic Logic **21**, 253—254 (1956).

From a result of Samson and Mills [Communications Labor., electron. Res. Directorate, Air Force Cambridge Res. Center, Cambridge, Mass., techn. Rep. **54-21** (1954)] Bing deduces some results which are of use for simplifying truth-functional formulae.

A. Rose.

Cuesta, N.: *Deduktive Wissenschaft mit irreduziblen separierten Basen*. Collect. Math. **8**, 73—84 (1956) [Spanisch].

Im Rahmen der in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **56**, 247) entwickelten Theorie deduktiver Strukturen gibt Verf. ein einfaches Beispiel einer mathematischen Theorie, die keine Postulate und 10 Basen hat.

H. Gericke.

Ackermann, Wilhelm: *Begründung einer strengen Implikation*. J. symbolic Logic **21**, 113—128 (1956).

The author wishes to define an implication that should indicate, that $A \rightarrow B$ if and only if the logical content of B is part of the content of A . Hence one wants that formula like $A \rightarrow (\bar{A} \rightarrow B)$ or $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ should be false in the new calculus. First it is shown that the Hilbert-Bernays Calculus of propositions is equivalent to a certain sequential calculus defined by five formulae and seven rules. This sequential calculus is then modified into a calculus with „strong“ implication, by adding a formula and severely weakening the rules. There is a disturbing feature, in so far as the logical rules are no longer universally valid, but different for „distinguished“ and „not distinguished“ premisses. The Hilbert-Bernays system of axioms is then modified accordingly. It is shown that the new system has really the qualities demanded from a strong implication. Finally, one may introduce modalities, by defining as „impossible“ those formulae that are disprovable in the new system.

H. Guggenheimer.

Löb, M. H.: *Formal systems of constructive mathematics*. J. symbolic Logic **21**, 63—75 (1956).

Myhill (this Zbl. **41**, 342) has given a complete system K which allows the development of a certain amount of classical mathematics. Completeness was achieved by sacrificing universal quantification and introducing instead the proper ancestral as a primitive idea. The present author (this Zbl. **52**, 250) gave a system K_1 equivalent to K but differing from it in having the limited universal quantifier instead of the proper ancestral, having concatenation instead of the ordered-pair function, and dispensing with the abstraction operator and the class-membership relation. In this

paper he simplifies K_1 by eliminating conjunction and disjunction; giving rise to a system Σ whose primitives are two individuals, concatenation, identity, existential and limited universal quantification. A further reduction of primitives leads to an equivalent system Σ_μ differing from Σ in containing the operator μ („the first string such that“) in place of the quantifiers.

J. C. Shepherdson.

• Tarski, Alfred: Ordinal algebras. Appendices by Chen-Chung Chang and Bjarni Jónsson. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics). Amsterdam: North-Holland Publishing Co. 1956. 133 p. f 13,50 (\$ 3,60).

Sei A ein Bereich von Dingen, die im weiteren mit a, b, \dots , eventuell mit $a_\kappa, b_\lambda, c_\mu$, usw. bezeichnet werden, wobei $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ Ordinalzahlen einschließlich 0 und ω seien. In A komme ein ausgezeichnetes Element \emptyset , vor und es seien in A eine einstellige Operation $*$, eine zweistellige Operation \oplus und eine Operation Σ , deren Argumente endliche oder nach ω geordnete unendliche Folgen $[a_\kappa]$ von Elementen aus A sind, erklärt; gegen diese Operationen sei A abgeschlossen und es seien folgende Postulate erfüllt: (Zur Abkürzung benutzen wir die bekannten logischen Zeichen in der Formulierung). I. $\sum_{\kappa < 0} a_\kappa = \emptyset$, $\sum_{\kappa < 1} a_\kappa = a_0$. II. Assoziativität: $\mu < \omega \ \& \ \nu \leq \omega \rightarrow \sum_{\kappa < \mu + \nu} a_\kappa = \sum_{\kappa < \mu} a_\kappa \oplus \sum_{\kappa < \nu} a_{\mu + \kappa}$. III. Verfeinerungspostulat: $\sum_{\kappa < \omega} a_\kappa = b \oplus c \ \& \ c \neq \emptyset \rightarrow (\exists d) (\exists e) (\exists \mu) (\mu < \omega \ \& \ \sum_{\kappa < \mu} a_\kappa \oplus d = b \ \& \ a_\mu = d \oplus e \ \& \ e \oplus \sum_{\kappa < \omega} a_{\mu + 1 + \kappa} = c)$. IV. Restbildungspostulat: $(\forall \kappa) (a_\kappa = b_\kappa \oplus a_{\kappa + 1}) \rightarrow (\exists c) (\forall \kappa) (a_\kappa = \sum_{\lambda < \kappa} b_{\kappa + \lambda} \oplus c)$. V. $a^{**} = a$. VI. $(a \oplus b)^* = b^* \oplus a^*$. Ein solches System A von Dingen nennt Verf. eine „ordinal algebra“. — In Kap. 1 (und einem Appendix von Chen-Chung Chang) wird eine große Anzahl von Folgerungen aus diesem Postulatensystem hergeleitet, die in dem Sinne als arithmetisch bezeichnet werden, als sie Umformungen von Ausdrücken, gebildet mit den Grundoperationen, sowie Äquivalenzen zwischen solchen Ausdrücken etc. zum Inhalt haben, nicht aber Beziehungen zwischen verschiedenen Modellen des Postulatensystems usw. Viele dieser Gesetze sind aus der Literatur als Sätze über Ordnungstypen bekannt, worauf vom Verf. jeweils hingewiesen wird; hier erscheinen diese Sätze jedoch in einem wohlüberlegten deduktiven Rahmen gemeinsam als Folgerungen des Postulatensystems. Dieses erhält seine Stärke vor allem durch die Axiome III und IV, aber natürlich auch durch die Verwendung des Ordinalzahlbegriffes bis einschließlich ω und des Begriffes der Folge von Elementen aus A . Dadurch bekommt diese Theorie einen stark nichtelementaren Charakter und von diesem Standpunkt aus erscheint es vielleicht nicht als so günstig, von einer „Algebra“ zu sprechen, eine Sammelbezeichnung, die vielleicht auf elementare Axiomensysteme (über Operationen) zu beschränken wäre. — Im folgenden sei eine (subjektive) Auswahl aus den abgeleiteten Gesetzen (nicht in der Reihenfolge ihrer Ableitung) angegeben.

(1) Erklärt man $\sum_{\kappa < \mu}^* a_\kappa =_{\text{Def}} \left(\sum_{\kappa < \mu} a_\kappa^* \right)^*$ und $a \oplus^* b =_{\text{Def}} (a^* \oplus b^*)^*$, so ergibt sich speziell $\emptyset^* = \emptyset$, $a \oplus^* b = b \oplus a$, $\sum_{\kappa < \nu}^* a_\kappa = \sum_{\kappa < \nu} a_{\nu - 1 - \kappa}$ mit $\nu < \omega$, und man erhält aus einer gegebenen ordinal algebra bezüglich der mit $*$ versehenen Operationen eine duale Algebra, die hinsichtlich der Abbildung $f(x) = x^*$ isomorph der ursprünglichen ist. (2) Postulat III gestattet (unter Verwendung des Auswahlaxioms) wie lt. Verf. W. Hanf bewies, folgende Verallgemeinerung: Sei $\sum_{\kappa < \omega} a_\kappa = \sum_{\kappa < \omega} b_\kappa$, wobei in den Folgen $[a_\kappa]$ und $[b_\kappa]$ immer wieder von \emptyset verschiedene Glieder vorkommen mögen, dann gibt es eine unendliche Folge $[c_\kappa]$ und zwei strikt monoton steigende unendliche Folgen $[\mu_\kappa]$ und $[\nu_\kappa]$ von Ordinalzahlen $< \omega$ derart, daß für jedes $\kappa < \omega$, $a_\kappa = \sum_{\lambda < \mu_{\kappa+1} - \mu_\kappa} c_{\mu_\kappa + \lambda}$ und $b_\kappa = \sum_{\lambda < \nu_{\kappa+1} - \nu_\kappa} c_{\nu_\kappa + \lambda}$ ist.

(3) Das ν -fache $a \nu$ eines Elementes a wird als $\sum_{\kappa < \nu} a_\kappa$, wobei alle $a_\kappa = a$ sind, er-

klärt. Eine Kleiner-Gleichbeziehung \leq wird durch folgende Definition eingeführt: $a \leq b \leftrightarrow_{\text{Df}} (\exists c) (a \oplus c = b)$; durch Dualisierung im Sinne von (1) erhält man $a \leq^* b \leftrightarrow (\exists c) (c \oplus a = b)$. Einige einfache Gesetze lauten: $a^*v = av$, $a\omega = a \oplus a\omega$;

$$\begin{aligned} \mu < \omega \& v < \omega \rightarrow a(\mu + v) = a\mu \oplus av \& a(\mu v) = (a\mu)v; \\ b &\leq \sum_{\kappa < \omega} a_\kappa \& b \neq \sum_{\kappa < \omega} a_\kappa \rightarrow (\exists \mu) \left(\mu < \omega \& b \leq \sum_{\kappa < \mu} a_\kappa \right); \\ \sum_{\kappa < \mu} a_\kappa &= \emptyset \leftrightarrow (\forall \lambda) (\lambda < \mu \rightarrow a_\lambda = \emptyset); \\ a &\leq b \& b \leq^* a \rightarrow a = b, \quad a \leq c \& b \leq c \rightarrow a \leq b \vee b \leq a, \\ a\omega &\leq b \leftrightarrow (\forall \kappa) (\kappa < \omega \rightarrow a\kappa \leq b). \end{aligned}$$

(4) Kürzungsgesetze: $\mu < \omega \& a \oplus c\mu = b \oplus c\mu \rightarrow a \oplus c = b \oplus c$, $0 < \mu < \omega \& a\mu = b\mu \rightarrow a = b$ und analog für Ungleichungen. (5) Absorptionsgesetze:

$$\begin{aligned} a \oplus b &= b \leftrightarrow a\mu \oplus b = b \leftrightarrow a \oplus b\mu = b\mu \leftrightarrow a\omega \leq b; \\ a \oplus b \oplus c &= b \leftrightarrow a \oplus b = b \oplus c = b \leftrightarrow \\ \leftrightarrow a\omega &\leq b \& c^*\omega \leq^* b \leftrightarrow (\exists d) (a\omega \oplus d \oplus c^*\omega = b). \end{aligned}$$

(6) Satz von Euklid: Seien $\mu, v < \omega$ relativ prim und $a\mu = bv$, dann gibt es ein c , so daß $a = cv$ und $b = c\mu$. (7) Die Menge RC aller „rekursiven“ Elemente von A wird als Durchschnitt aller Mengen $X \subseteq A$, die den folgenden drei Bedingungen genügen, erklärt: i) $(\forall a) (a = x \oplus y \& y \neq \emptyset \rightarrow x \in X. \rightarrow a \in X)$, ii) $(\forall a) (a = x \oplus y \& x \neq \emptyset \rightarrow y \in X. \rightarrow a \in X)$, iii) $(\forall a) (\forall b) (a \in X \& b \in X \rightarrow a \oplus b \in X)$. Es zeigt sich, daß $RC \subseteq A$ selbst eine ordinal algebra und zwar eine subalgebra von A ist. Ferner ergibt sich (mit Auswahlaxiom) das folgende Kriterium für die Gültigkeit des kommutativen Gesetzes:

$$a \in RC \vee b \in RC. \rightarrow a \oplus b = b \oplus a \leftrightarrow (\exists c) (b\omega \oplus c \oplus b^*\omega = a) \vee (\exists c) (a\omega \oplus c \oplus a^*\omega = b) \vee (\exists c) (\exists \mu) (\exists v) (\mu < \omega \& v < \omega \& a = c\mu \& b = cv).$$

(8) Neben anderen Ergebnissen wird in dem Appendix von Chang zu dem vom Verf. bewiesenen Satz $a \in RC \& a = a \oplus b \oplus a \rightarrow a = \emptyset$ die folgende Verallgemeinerung gezeigt: $a \in RC \& a\mu = c \oplus \sum_{\kappa < \mu} (a \oplus b_\kappa) \oplus a \oplus d \rightarrow a = \emptyset$. — Um in die Viel-

falt solcher Gesetze eine gewisse Übersicht zu bringen, bemüht sich der Verf., gewisse Gestalten arithmetischer Gesetze, wie z. B. die unter (4) und (5) genannten, herauszuheben. Zusätzlich wäre es erwünscht gewesen, wenn gleich zu Anfang ein oder zwei einfache, aber doch genügend reichhaltige Modelle dieser Theorie, gebildet z. B. aus Wohlordnungstypen und deren Inversen, angegeben worden wären, an Hand derer der Leser eine gewisse Konkretisierung und Bewertung der Sätze erhalten hätte. Im Kap. 2, zu dem ein Appendix von Bjarni Jónsson eine Ergänzung darstellt, führt Verf. zunächst folgende Operationen für Typen von (zweistelligen) Relationen ein. Der leeren Relation Λ wird der Typus \emptyset zugeordnet; als α^* gilt der Typus der Relationen S , für die α der Typus ihrer Konversen ist. Zur Erklärung der Summe $\alpha + \beta$ zweier Typen α, β von Relationen R, S werden diese zuerst in einfacher Weise in zwei zu R bzw. S typengleiche „fremde“ Relationen R' bzw. S' überführt, d. h. Relationen für die — $F(R)$ bezeichne das Feld von R — $F(R') \cap F(S') = \Lambda$ ist. $\alpha + \beta$ soll dann der Typus der Relationen T sein, die sich mit zwei fremden Relationen R, S des Typus α, β in der Form $T = R + S$, mit $R + S =_{\text{Df}} R \cup S \cup [F(R) \times F(S)]$, darstellen lassen. In analoger Weise wird die Summe $\sum_{\kappa < \mu} \alpha_\kappa$ einer wohlgeordneten endlichen oder unendlichen Folge $[\alpha_\kappa]$ von Typen α_κ von Relationen R_κ erklärt. Das erste Hauptergebnis ist dann, daß der Bereich RT der Typen reflexiver Relationen hinsichtlich der genannten Operationen, Σ beschränkt auf höchstens nach ω geordnete Folgen, eine ordinal algebra bilden. Ferner ist jeder nicht leere Teilbereich von RT , der mit α auch α^* , mit einer Folge $[\alpha_\kappa]$,

$\kappa < \omega$ auch $\sum_{\alpha < \omega} \alpha_\kappa$ und mit $\alpha + \beta$ auch α, β enthält, eine ordinale Unteralgebra von RT . Darunter fallen z. B. die Bereiche aller Ordnungstypen OT , aller Halbordnungstypen und andere. — Die definierten Begriffe $a \vee, a \leq b, a \leq^* b$ und „rekursives Element“ aus Kap. 1 gestatten nicht nur eine formale Übertragung, sondern haben eine genuine Deutung im Bereich der Relationen, z. B. heiße R ein Anfangs- bzw. Endstück einer Relation S , wenn es eine Relation T , die zu R fremd ist, gibt, so daß $R + T = S$ bzw. $T + R = S$ ist. Für Typen α, β von Relationen R, S drückt sich dieser Sachverhalt durch $\alpha \leq \beta$ bzw. $\alpha \leq^* \beta$ aus. Ein Satz aus Kap. 1 wie $a \leq b \text{ \& } a \leq^* b \rightarrow a = b$ erhält in der Relationensprache die Deutung: Sind R und S reflexive Relationen und R isomorph einem Anfangstck von S und S isomorph einem Endstück von R , dann sind R und S isomorph. — In der ordinal algebra OT bilden die Typen von „verstreuten“ Relationen, das sind diejenigen, die keine dichte Teilrelation enthalten, den Bereich der rekursiven Elemente. — Für die ordinal algebra RT stellt sich der Bereich der rekursiven Elemente als Bereich aller Typen von Relationen, die sich in gewisser Weise als Summe unzerlegbarer Typen von Relationen darstellen lassen, heraus. Dabei heißt eine Relation unzerlegbar hinsichtlich der Summenbildung $+$, wenn $R \neq A$ und für alle zueinander fremden Relationen S und T , für die $R = S + T$ gilt, $S = A$ oder $T = A$ folgt. Daß jeder Typus einer reflexiven Relation in bestimmter Weise eindeutig als Summe von unzerlegbaren Typen von Relationen darstellbar ist, bildet das Hauptergebnis des Appendix von Jnsson. Abschließend erwähnen der Verf. und Jnsson noch Verallgemeinerungen des Typenbegriffs einer Relation derart, daß man sich von der Einschränkung auf Typen reflexiver Relationen für die Anwendung der Theorie in Kap. 1 befreien kann. — Die ganze Monographie ist klar abgefaßt und enthält eine große Anzahl interessanter Zusatzbemerkungen und Hinweise auf Zusammenhänge mit anderen algebraischen Fragen.

Gert H. Müller.

Mendelson, Elliott: Some proofs of independence in axiomatic set theory. J. symbolic Logic 21, 291—303 (1956).

Gdel (The consistency of the continuum hypothesis, 3. ed., Princeton 1953) proved the consistency of the axiom $V = L$ in his version G of the Zermelo-Fraenkel-v. Neumann-Bernays set theory by defining a function F with domain the class ON of all ordinal numbers and showing that the class $F'' ON$ of all values of F formed a universe of sets which, with suitable definitions of „class“ and „member“, formed a model of G which also satisfied $V = L$. It has been noted by several authors [Firestone and Rosser, J. symbolic Logic 14, 79 (1949) (abstract); Rosser, Deux esquisses de logique, this Zbl. 64, 7; Mostowski, this Zbl. 39, 8; Bernays, this Zbl. 30, 115; Shepherdson, this Zbl. 48, 281] that a similar construction carried out, not for all ordinal numbers, but for all ordinals less than a certain ordinal β , can be used to yield proofs of independence. In fact the set $F'' \beta$ defines a model M_β which, for $\beta = \omega$ satisfies all the axioms of G except the axiom of infinity; for $\beta = \omega^\omega$ satisfies all except the replacement axiom; and for $\beta =$ the first inaccessible ordinal (assuming these exist) satisfies all the axioms of G but not the postulate that there exist inaccessible ordinals. Thus assuming G to be consistent we obtain in this way the independence from the other axioms of the axiom of infinity, the axiom of replacement, and the independence from G of the axiom that there exist inaccessible ordinals. In the existing proofs of these results two things have been shown 1. M_β satisfies all the remaining axioms, 2. M_β does not satisfy the axiom whose independence is to be proved. The essence of the present paper is that it is not necessary to prove 2. The argument is as follows: from the statement that there exists a model for G defined by a set we can, in the usual Tarski manner, obtain (within G) a truth definition for G and hence a proof of the consistency of G . So, by the Gödel incompleteness theorem (provided G is consistent) it is not possible to prove from G

that there is any model defined by a set which satisfies all the axioms of G . Hence, having proved from G that M_β satisfies all the axioms of G except one it follows without further proof that it cannot be proved to satisfy the remaining axiom, i. e. it follows that this is independent.

J. C. Shepherdson.

Meschkowski, Herbert: Rekursive reelle Zahlen. *Math. Z.* **66**, 189—202 (1956).

R_1 sei die Klasse der (allgemein) rekursiven reellen Zahlen, R_2 die Klasse der rekursiven Dezimalbrüche, R_3 die Klasse der rekursiven Schnitte. Es ist $R_1 = R_2 = R_3$, doch können diese Gleichheiten (nach der Einleitung der Arbeit) nicht mit „konsequent konstruktiven Methoden“ bewiesen werden. Dies ist bei der naheliegenden Präzisierung von „konsequent konstruktiv“ richtig, doch wird der Satz so präzisiert, daß er falsch wird. Der Trugschluß kann auf die folgende Form gebracht werden: Gibt es keine Zahl n , so daß $A(n)$ in einem Formalismus F beweisbar ist, so ist in F nicht beweisbar, daß es eine Zahl n mit $A(n)$ gibt. Im weiteren werden spezielle rekursive und rekursiv konvergente Folgen betrachtet und ihre Schnitteigenschaften untersucht sowie gezeigt, daß es eine rekursive Folge f gibt, so daß $f(n) \geq 0$, $\sum_0^n f(k) < 1$, daß f aber nicht rekursiv konvergiert.

E. Specker.

Grzegorzcyk, A.: Some proofs of undecidability of arithmetic. *Fundamenta Math.* **43**, 166—177 (1956).

Es wird in dieser Arbeit der bekannte Gödelsche Satz über die Unentscheidbarkeit der Arithmetik als Folge der Repräsentierbarkeit von rekursiv aufzählbaren, aber nicht allgemein rekursiven Mengen von natürlichen Zahlen in der Arithmetik hingestellt. Und zwar wird die wesentliche Unentscheidbarkeit der Arithmetik mit Hilfe einer in ihr repräsentierbaren Diagonalmenge und einer anderen Menge gezeigt. Eine Theorie heißt dabei wesentlich unentscheidbar, wenn sie widerspruchsfrei ist und jede widerspruchsfreie Erweiterung von ihr unentscheidbar ist. Die Gedankengänge kommen zwar in gewisser Weise auch bei anderen Verfassern vor, aber es wird eine Systematisierung der Beweise gegeben, indem eine Reihe von Sätzen über die Repräsentierbarkeit in einer Theorie und die wesentliche Unentscheidbarkeit gegeben werden, die dann auf die Arithmetik angewandt werden.

W. Ackermann.

Meschkowski, Herbert: Zur rekursiven Funktionentheorie. *Acta math.* **95**, 9—23 (1956).

Die Arbeit enthält unter anderem die folgenden Sätze: Es ist nicht entscheidbar, ob eine rekursive, rekursiv konvergente Folge rationaler Zahlen einen rationalen Grenzwert besitzt. Eine rekursive reelle Funktion nimmt zwischen einem positiven und negativen Wert den Wert 0 an (der Satz ist richtig, doch scheint Ref. der Beweis — nach „offenbar“ — einen Fehler zu enthalten).

E. Specker.

Rice, H. G.: On completely recursively enumerable classes and their key arrays. *J. symbolic Logic* **21**, 304—308 (1956).

The author has already (this Zbl. **53**, 3) introduced the notion of a completely recursively enumerable (c. r. e.) class of sets of positive integers viz: A is c. r. e. when the set θ_A of all n 's such that the range of $\Phi(n, x)$ is a member of A , is r. e. (Here $\Phi(n, x)$ recursively enumerates the partial recursive functions of x .) He now defines the canonical index of the finite set $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ (where $a_1 < a_2 < \dots < a_n$) as the integer $2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_n}$. Given a finite set and its cardinal number the canonical index can be effectively determined, and vice versa. He calls a class K of finite sets canonically r. e. when the set of canonical indices of the sets of K is r. e., and similarly for canonically recursive. McNaughton and others [see e. g. Myhill and Shepherdson, *Z. math. Logik Grundl. Math.* **1**, 313 (1955)] have shown that every c. r. e. class consists of all r. e. supersets of the sets in a „key array“ or canonically r. e. class of finite sets. The author's first theorem is that the complement (with respect to the class of all r. e. sets) of a c. r. e. class A is r. e. (i. e. there exists a

r. e. set containing for each member α of A at least one integer n such that the range of $\Phi(n, x)$ is α , and no other numbers) if and only if A has a canonically recursive key array. He then defines the core of a class A as the class of those elements of A which have no proper subsets in A and gives an example of a canonically r. e. class of finite sets whose core is not even r. e. Hence the core of a c. r. e. class cannot always be used as a key array. He uses this example to construct a simple deductive system (with a non-effective rule of inference) such that although it is possible to give effectively a set of axioms from which the theorems can be effectively generated yet it is impossible to give effectively an independent set of axioms.

J. C. Shepherdson.

Skolem, Th.: A version of the proof of equivalence between complete induction and the uniqueness of primitive recursion. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 29, 10—15 (1956).

Die Behauptung, daß aus dem Axiom der vollständigen Induktion die Eindeutigkeit der rekursiv definierten arithmetischen Funktionen folgt und umgekehrt, soll Bernays bewiesen haben, und Goodstein gab dafür einen Beweis (dies. Zbl. 60, 23, 2. Referat). Verf. beweist nun diesen Satz sehr einfach. Die Eindeutigkeit der rekursiv definierten Funktionen bedeutet: aus $f(0) = \alpha$, $f(a') = H(a, f(a))$; $g(0) = \alpha$, $g(a') = H(a, g(a))$, wobei a' den Nachfolger von a bezeichnet, folgt $f(a) = g(a)$. Er setzt folgende 4 Axiome voraus: 1. $A = A$ ist wahr, wobei A eine Zahl bezeichnet, falls die darin eventuell vorkommenden Variablen durch Zahlen ersetzt werden. 2. Ist $A = B$ wahr, so ist $B = A$ wahr. 3. Sind $A = B$ und $B = C$ wahr, so ist $A = C$ wahr. 4. Sind $A = B$ und $C = D$ wahr, wobei C ein Teil von A ist, so ist $A' = B$ wahr, wenn A' sich aus A dadurch ergibt, daß man in A C durch D ersetzt.

Z. Suetuna.

Algebra und Zahlentheorie.

• **Gardner, Martin: Mathematics, magic and mystery.** New York: Dover Publications, Inc. 1956. IX, 176 p. Clothbound \$ 1,—.

Leichtverständliche und mit historischen Angaben versehene Beschreibung vieler alter und neuer Tricks mit Spielkarten, Würfeln, Fesselungen und Möbius'schen Bändern, sowie von rechnerischen Täuschungen, dem Auffinden verborgener Gegenstände und Rechenkunststücken.

R. Sprague.

Devidé, Vladimir: Ein Vergleich des arithmetischen und geometrischen Mittels. Periodicum math.-phys. astron., II. Ser. 11, 23—24, serbokroatische Zusammenfassung. 24 (1956).

Verf. gibt einen Beweis des Satzes, daß das arithmetische Mittel nicht kleiner ist als das geometrische. Der Satz wird mittels vollständiger Induktion für die Größen $d_0, d_0 + d_1, \dots, d_0 + d_1 + \dots + d_{n-1}$ ($d_i \geq 0$) bewiesen, und daraus folgt natürlich die allgemeine Behauptung für beliebige Zahlen $x_i \geq 0$ ($x_1 = d_0$, $x_{i+1} - x_i = d_i$; $x_i \geq x_j$ für $i > j$).

St. Fenyő.

Blanuša, Danilo: Quelques identités algébriques concernant les moyennes arithmétique et géométrique. Periodicum math.-phys. astron., II. Ser. 11, 17—21, serbokroatische Zusammenfassung. 22 (1956).

Setzen wir $S_n = (x_1 + \dots + x_n)/n$; $G_n = (x_1 \dots x_n)^{1/n}$; $h_i = x_i - S_n$ (x_1, \dots, x_n sind reelle, positive Zahlen). Folgende Identität wird bewiesen:

$$G_n^n - S_n^n = h_1 h_2 x_3 \dots x_n + (h_1 + h_2) h_3 S_n x_4 \dots x_n + \\ + (h_1 + h_2 + h_3) h_4 S_n^2 x_5 \dots x_n + \dots + (h_1 + \dots + h_{n-1}) h_n S_n^{n-2}.$$

Ist weiter $\varphi(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^n - \prod_{i=1}^n y_i$ und p eine positive ganze Zahl,

so ist die Identität

$$\varphi(y_1, \dots, y_{pm}) = \frac{1}{p} \sum_{\pi=1}^p \varphi(y_{(\pi-1)m+1}^p, \dots, y_{\pi m}^p + \varphi(z_1, \dots, z_p)$$

gültig, mit $z_\nu = y_{(\nu-1)m+1} \cdots y_{\nu m}$.

St. Fenyő.

Paasche, Ivan: Eine Verallgemeinerung des Moessnerschen Satzes. *Compositio math.* **12**, 263—270 (1956).

Partant de demi-matrices:

$$\begin{array}{ccccccc} A_{11}^0 & \cdots & A_{1,1+K_1}^0 & A_{21}^0 & \cdots & A_{2,1+K_2}^0 & \cdots & A_{n1}^0 & \cdots & A_{n,1+K_n}^0 & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ A_{11}^{K_1} & & & A_{21}^{K_2} & & & & & & A_{n1}^{K_n} & \end{array}$$

constituées dans la suite des entiers naturels 1, 2, 3, ... et obéissant aux relations: $A_{n,\nu+1}^\lambda = A_{n\nu}^\lambda + A_{n,\nu+1}^{\lambda-1}$, $A_{n+1,1}^\lambda = A_{n,1-\lambda+K_n}^\lambda + A_{n+1,1}^{\lambda-1}$, $A_{n\nu}^0 = A_{n\nu}$, $A_{11}^\lambda = A_{11}^0$, ($n = 1, 2, \dots$; $\lambda, \nu = 1, 2, \dots, K_n$; $\lambda + \nu \leq 1 + K_n$), avec $K_1 \geq K_2 \geq K_3 \geq \dots$, l'A. démontre dans la suite des demi-matrices ainsi constituées un théorème général dont il considère trois cas particuliers; l'un est le théorème de Moessner et un autre est la généralisation de Salédu théorème de Moessner (v. ce Zbl. **47**, 16; **51**, 7). *S. Bays.*

Gould, H. W.: Some generalizations of Vandermonde's convolution. *Amer. math. Monthly* **63**, 84—91 (1956).

L'A. généralise l'identité connue sous le nom de „binome de Vandermonde“ et utilise le résultat pour sommer certaines séries et pour résoudre divers problèmes, en particulier, (1) [v. *Amer. math. Monthly* N° 4211, p. 397 (1946)], (2) un problème de Torelli [*Giorn. Mat. Battaglini* **33**, 179—182 (1895)]; (3) J. G. Hagen, *Synopsis*, formule 17, pp. 64—68.

A. Sade.

Fletcher, T. J.: The n prisoners. *Math. Gaz.* **40**, 98—102 (1956).

Verallgemeinerungen des folgenden bekannten Problems: Für die Kennzeichnung von 3 Personen stehen 3 weiße und 2 schwarze Merkmale zur Verfügung, von denen irgend drei verwendet werden; jede Person sieht nur die Merkmale an den beiden andern und soll daraus auf die Farbe des eigenen Merkmals schließen.

R. Sprague.

Lineare Algebra. Polynome:

• **Lichnerowicz, André:** *Lineare Algebra und lineare Analysis.* (Hochschulfächer für Mathematik. Bd. 28.) Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1956. XI, 303 S. Ln. DM 26,60.

Vgl. die Besprechung des französischen Originals in diesem Zbl. **31**, 2.

Chassan, J. B.: An application of estimation theory to determinantal inequalities. *Amer. math. Monthly* **63**, 480—484 (1956).

In der reellen Matrix (a_{ij}) von n Zeilen und m Spalten ($n > m \geq 2$) seien alle m -reihigen Unterdeterminanten $\neq 0$. G sei die Gramsche Determinante (mit den Elementen $g_{je} = \sum a_{ij} a_{ie}$) und G_{j1} der Minor von g_{j1} . Es gilt:

$$\frac{1}{G^2} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} G_{j1} \right)^2 \leq \binom{n}{m}^{-2} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2,$$

worin $\lambda_i = \sum_{\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{m-1}} \frac{A_{i1}[\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}, i]}{A[\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}, i]}$ ($\alpha_r \neq i$ für $r = 1, \dots, m-1$)

und $A[\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}, i]$ die m -reihige Unterdeterminante von (a_{ij}) mit den Zeilen $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}, i$ in natürlicher Reihenfolge und $A_{i1}[\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}, i]$ den Minor zu a_{i1} in der genannten Determinante bedeuten. Der Beweis benutzt den verallgemeinerten Markoffschen Satz über kleinste Quadrate [J. Neyman und F. N. David, *Extension of the Markoff Theorem on least squares*, *Statistical Research Memoirs*, II, p. 105 (1938)]. Im Falle $m = 2$ besteht Gleichwertigkeit mit Ergebnissen von Ky Fan und John Todd (dies. Zbl. **64**, 14). Der Fall, daß nicht alle m -reihigen

gen Unterdeterminanten verschwinden, wird untersucht und eine Verallgemeinerung durch Einführung von Gewichten $w(\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}, i)$ angegeben. Eine weitere Ungleichung bezieht sich auf eine Abschätzung der linken Seite der obigen Ungleichung bei Aufteilung von (a_{ij}) in Teilmatrizen von n_e Zeilen, $n_e \geq m$, $n_1 + \dots + n_r = n$.
G. Aumann.

Gáspár, Julius: Eine axiomatische Theorie der kubischen Determinanten. Publ. math., Debrecen 4, 126—130 (1956).

Verf. erweitert seine axiomatische Begründung für gewöhnliche Determinanten (vgl. dies. Zbl. 58, 9) auf kubische Determinanten $|a_{ikl}|$ ($i, k, l = 1, 2, \dots, n$) über einem Integritätsbereich R der Charakteristik 0. Benutzt wird insbesondere, daß die Menge der kubischen Matrizen n -ten Grades über R ein Modul mit dem Operatorenbereich der gewöhnlichen Matrizen n -ten Grades über R ist. Bei geeigneter Verallgemeinerung der Operatoren läßt sich die Betrachtung auf p -dimensionale Determinanten für irgendeine natürliche Zahl $p > 1$ übertragen.
H. Rohrbach.

Ingleton, A. W.: The rank of circulant matrices. J. London math. Soc. 31, 445—460 (1956).

Verf. betrachtet die Cirkulante $C = C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ mit dem allgemeinen Element $c_{ij} = a_k$ für $j - i \equiv k \pmod{n}$. Ist für keinen echten Teiler q von n die Bedingung $a_i = a_j$ für $i \equiv j \pmod{q}$ erfüllt, so heißt C nichtrekurrent. Im Fall beliebiger Elemente a_i bestimmt sich der Rang von C leicht zu $n - d$, wo n die Ordnung von C und d der Grad des größten gemeinsamen Teilers von $1 - x^n$ und $\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ ist.

Auch im Fall rationaler a_i gelingt Verf. die Bestimmung des Ranges einer nichtrekurrenten Cirkulante. Die Cirkulanteneigenschaft bedingt eine Beschränkung der möglichen Werte für den Rang. Der kleinstmögliche Rang einer rationalen nichtrekurrenten Cirkulante ist $\sum_0^m \varphi(p_\mu^{\alpha_\mu}) - \eta(n)$, wo $n = \prod_1^m p_\mu^{\alpha_\mu}$ die kanonische Zerlegung von n und $\eta(n) = 1$ oder 0 ist, je nachdem $\frac{1}{2}n$ ungerade und > 1 ist oder nicht. Schwierig ist die Rangbestimmung in dem (den Verf. besonders interessierenden) Fall $a_i = 0$ oder 1. Hier führt eine eingehende Untersuchung zu brauchbaren oberen und unteren Schranken für den Minimalrang.
H. Rohrbach.

Fátima Fontes de Sousa, Maria de: Einige Bemerkungen über invariante Unterräume einer Matrix. Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A 5, 353—360 (1956) [Portugiesisch].

Redwiduë, L.: Une question de stabilité. Z. angew. Math. Mech. 36, 246—248 (1956).

Es seien A_0, \dots, A_m n -reihige quadratische Matrizen. Man soll feststellen, ob die Gleichung $\det(A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m) = 0$ nur Wurzeln mit negativem Realteil bzw. mit verschwindendem Realteil und einfachen Normalteilern hat, ohne erst die Determinante zu entwickeln und die Hurwitzbedingungen anzuwenden. Verf. löst die Aufgabe in zwei Fällen unter speziellen Annahmen über die A_μ .

W. Hahn.

Medlin, Gene W.: On limits of the real characteristic roots of matrices with real elements. Proc. Amer. math. Soc. 7, 912—917 (1956).

Es sei $A = (a_{ij})$ eine Matrix mit komplexen Elementen. Man weiß (Gerschgorin, dies. Zbl. 3, 1), daß das Bestehen aller Ungleichungen $|a_{ii} - \lambda| > R_i$, ($i = 1, \dots$), $R_i = \sum_j |a_{ij}|$, das Nichtverschwinden der charakteristische Determinanten $\det(A - \lambda I)$ nach sich zieht. Man erhält so einen großen Bereich, der keine Wurzel der charakteristischen Gleichung enthalten kann. Man kann auch andere solche Bereiche bestimmen (H. Schneider, dies. Zbl. 55, 12). Von allen diesen Sätzen scheint folgender von A. Brauer (dies. Zbl. 50, 250) die direkteste

Verallgemeinerung zu sein: Wenn für alle α, β die Ungleichungen

$$\det \begin{pmatrix} a_{\alpha\alpha} - \lambda, & a_{\alpha\beta} \\ a_{\beta\alpha}, & a_{\beta\beta} - \lambda \end{pmatrix} > Q_{\alpha\beta}$$

bestehen, so kann auch λ keine charakteristische Wurzel sein. Jetzt betrachtet Verf. den Fall, daß ω eine reelle charakteristische Wurzel ist und die $a_{\alpha\beta}$ reell sind, und verschärft die quadratische Funktion $Q_{\alpha\beta}$ der Elemente der α -ten und β -ten Zeile der Matrix.

J. L. Brenner.

Perfect, Hazel: A lower bound for the diagonal elements of a non-negative matrix. J. London math. Soc. 31, 491—493 (1956).

Es sei χ ein Element in der Diagonale einer nichtnegativen Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Dann gilt die Ungleichheit

$$\chi \geq \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i - \sqrt{(n-1)} \sum_{i,j=1, i < j}^n (\lambda_i - \lambda_j)^2 \right].$$

Ein Beispiel zeigt, daß, mindestens im zerlegbaren Fall, diese Ungleichheit nicht hinreichend ist für die Existenz einer nicht-negativen Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und einem Element χ in der Diagonale.

H. Schneider.

Carlitz, L. and John H. Hodges: Distribution of matrices in a finite field. Pacific J. Math. 6, 225—230 (1956).

Es werden (m, m) -Matrizen über einem Galoisfeld $GF(q)$ untersucht und Abzählungen durchgeführt. So ist die Anzahl aller nicht singulären (m, m) -Matrizen $g_m = (q^m - 1)(q^m - q) \cdots (q^m - q^{m-1})$. Bedeutet $\varphi(M(x))$ die Euler-Funktion eines Polynoms $M(x)$ vom Grade m , das ist die Anzahl der teilerfremden Restklassen mod $M(x)$ im Polynomring $GF(q)[x]$, so gilt $\varphi(M(x)) = q^m \prod (1 - 1/|P(x)|)$, wo $P(x)$ alle Primteiler von $M(x)$ durchläuft und $|P(x)| = q^e$, $e = \text{Grad von } P(x)$ ist (Dedekind). Ferner ist die Anzahl aller (m, m) -Matrizen, deren Minimalpolynom den Grad m hat, $Y(m) = g_m \sum 1/\varphi(M(x))$, wo die Summe über alle normierten Polynome $M(x)$ des Grades m zu erstrecken ist. Die Anzahl verschiedener Ähnlichkeitsklassen von Matrizen mit gegebenem charakteristischem Polynom $F = P_1^{r_1} \cdots P_r^{r_r}$ ist $C_m(F) = \pi(r_1) \cdots \pi(r_s)$, wo $\pi(r)$ die Anzahl der Partitionen der Zahl r bedeutet. Die Gesamtzahl aller Ähnlichkeitsklassen folgt dann $N(m) = \sum C_m(F) = \sum q^{k_1 + \cdots + k_m}$, über $k_1 + 2k_2 + \cdots + mk_m = m$ erstreckt. Weniger einfach formulierbare Resultate werden für die Anzahlen der Ähnlichkeitsklassen von (m, m) -Matrizen mit einem Minimalpolynom eines Grades $r < m$ abgeleitet u. a. Für die Beweise werden Sätze über Polynome in einem Galoisfeld (L. Carlitz, dies. Zbl. 5, 387) und die Zetafunktion benutzt.

W. Gröbner.

Hodges, John H.: Exponential sums for symmetric matrices in a finite field. Math. Nachr. 14, 331—339 (1956).

These calculations are the analogues for symmetric matrices of the calculations for skew matrices already published by the author (this Zbl. 71, 17).

M. C. R. Butler.

Kegel, Günter: On the roots of polynomials defined by recurrence formulae. Anais Acad. Brasil. Ci. 28, 165—178 (1956).

Polynomials $P_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, are defined by the recurrence formulas $P_0(x) = A_0$, $P_1(x) = (A_1x + B_1)P_0(x)$, $P_n(x) = (A_nx + B_n)P_{n-1}(x) - C_nP_{n-2}(x)$, $n \geq 2$, where A_n, B_n , and C_n are real constants, $A_n \neq 0$, $C_n \neq 0$. Only those polynomials $P_n(x)$ are considered with real, distinct, and alternating zeros. [The zeros are called alternating if there is exactly one zero of $P_{n-1}(x)$ between two consecutive zeros of $P_n(x)$.] It is shown that the zeros are real, distinct, and alternating if and only if $A_{n-1}C_n/A_n > 0$. Upper and lower bounds for the zeros of $P_n(x)$ are then obtained as follows: A condition is found that the zeros are positive. This condition involves the behavior of the polynomials at the origin. The shift of

the origin so that this condition is just satisfied gives the lower bound. Similarly, the upper bound is obtained by the substitution of $-x$ for x . Examples are given with the polynomials of Hermite and Laguerre. The author states that the result here is similar to that stated by Perron (Algebra vol. 2, Theorem 24, this Zbl. **45**, 297).

E. Frank.

Knobloch, Hans-Wilhelm: Die Seltenheit der reduziblen Polynome. J. Ber. Deutsch. Math.-Verein. **59**, 12—19 (1956).

In einer Arbeit zum Hilbertschen Irreduzibilitätssatz hat Verf. [Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **19**, 176—190 (1955)] für die Anzahl $R(N)$ der ganzzahligen s -tupel τ_1, \dots, τ_s mit $|\tau_i| \leq N$ τ , die aus einem irreduziblen Polynom $F(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_s)$ ein reduzibles $F(x_1, \dots, x_k; \tau_1, \dots, \tau_s)$ entstehen lassen, die Abschätzung

$$R(N)/(2N+1)^s = O(N^{-\alpha}) \text{ mit } \alpha > 0$$

hergeleitet. Er gibt nunmehr einen einfacheren Beweis für diese Abschätzung und eine explizite positive untere Schranke für α in Abhängigkeit von den Graden von F in einem der x_k und in den t_i .

H. Rohrbach.

Garrett, James Richard: Reduction of equations to normal form in fields of characteristic p . Duke math. J. **23**, 241—251 (1956).

Es sei $x^n + \dots + a_n = 0$ eine Gleichung n -ten Grades über einem Körper von Primzahlcharakteristik p . Wenn $a_1 = a_2 = 0$ oder sogar $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ ist, so wird gesagt, daß die betrachtete Gleichung die Hauptform bzw. Normalform hat. Früher hat Verf. (dies. Zbl. **45**, 155) im Fall $n = 5$ die Tschirnhaus-Transformation von Gleichungen auf eine Hauptform und auch auf eine Normalform ausgeführt. (Dabei beschränkte er sich unnötigerweise auf endliche Grundkörper.) Hier erzielt er ähnliche Resultate für $n \geq 6$, wobei die Fälle $p|n$ und $p \nmid n$ verschieden, ferner die Fälle $p = 2, 3, 5$ extra behandelt werden.

L. Rédei.

Uchiyama, Saburô: Note on the mean value of $V(f)$. III. Proc. Japan Acad. **32**, 97—98 (1956).

Continuing his notes I, II on the mean value of $V(f)$ (this Zbl. **66**, 269) the author proves that, under the Riemann hypothesis for certain L -functions, $\sum V^2(f) = c_n^2 q^{n+1} + O(q^n)$, where $c_n = 1 - 1/2! + \dots + (-1)^{n-1} 1/n!$, and the sum is taken over all polynomials of the form $f(n) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x; a_i \in GF(q)$.

M. C. R. Butler.

Gruppentheorie:

Schützenberger, Marcel Paul: Sur une représentation des demi-groupes. C. r. Acad. Sci., Paris **242**, 2907—2908 (1956).

D étant un demi-groupe sans zéro satisfaisant à la condition minimale pour les idéaux à gauche et pour les idéaux à droite, soient C_i ($i \in I$) les idéaux à droite, et C_j ($j \in J$) les idéaux à gauche. I et J sont des ensembles finis. L'A. donne quelques propriétés relatives à une représentation de D , dite représentation ergodique à droite, par des matrices carrées à indices dans J , et à éléments dans un certain groupe Γ .

L. Lesieur.

Thierrin, Gabriel: Sur les automorphismes intérieurs d'un demi-groupe réductif. Commentari math. Helvet. **31**, 145—151 (1956).

L'A. reprend d'abord la notion de demi-groupe réductif introduite précédemment par lui (ce Zbl. **65**, 7): un demi-groupe D est réductif à droite si la relation $ax = bx$ pour tout $x \in D$ entraîne $a = b$. Un complexe H d'un tel demi-groupe D est dit réducteur à droite si la relation $ah = bh$ pour tout $h \in H$ entraîne $a = b$. Un complexe H de D est dit r -intérieur s'il est réducteur (à droite et à gauche) et si, pour tout $a \in D$, il existe $b \in D, c \in D$ tels que l'on ait $ha = bh$ et $ah = hc$ pour tout $h \in H$. L'A. étudie l'ensemble des complexes r -intérieurs. Chaque complexe r -intérieur lui permet de définir un automorphisme intérieur de première caté-

gorie et un automorphisme intérieur de deuxième catégorie; ces automorphismes généralisent les automorphismes de même nom introduits par P. Dubreil dans les semi-groupes (ce Zbl. 26, 196). L'A. les étudie ainsi que les relations de conjugaison et d'équiconjugaison qui généralisent celles introduites dans les semi-groupes par le rapporteur (ce Zbl. 57, 14).

R. Croisot.

Iséki, Kiyoshi: Contribution to the theory of semi-groups. Proc. Japan Acad. 32, 174—175 (1956).

Un demi-groupe S est dit périodique, d'après S. Schwarz, si, quel que soit $a \in S$, le sous-demi-groupe $\{a, a^2, \dots, a^n, \dots\}$ engendré par a n'a qu'un nombre fini d'éléments distincts. Un demi-groupe S est dit fortement réversible, d'après G. Thierrin, si, quels que soient a et $b \in S$, il existe trois entiers r, s, t tels que: $(ab)^r = a^s b^t = b^t a^s$. Si e est un idempotent, l'A. désigne par $K^{(e)}$ l'ensemble des éléments solution de $x^e = e$. Il démontre alors les trois théorèmes suivants: 1. Si un demi-groupe S est périodique et fortement réversible, $K^{(e)}$ est un sous-demi-groupe de S . 2. Tout demi-groupe fortement réversible est la réunion de demi-groupes disjoints qui ne contiennent qu'un idempotent. 3. Si S est périodique et ne contient qu'un idempotent e , on a $eSe = SeS$ et cet ensemble est un sous-groupe maximal de S , ainsi qu'un idéal minimal.

L. Lesieur.

Sagastume Berra, A. E.: Die fundamentalen Sätze des Homomorphismus für Gruppoide. Revista Un. mat. Argentina 17, 205—212 (1956) [Spanisch].

Sous le nom de „groupoïde“ l'A. désigne un ensemble, G , muni d'une loi associative partout définie (c. à-d. un semi-groupe), avec un élément neutre ($1; 1a = a1 = a$) et un zéro ($0; a0 = 0a = 0$). Un „ovum“ est un „groupoïde“ commutatif. La première partie contient l'exposé de diverses propriétés des semi-groupes. Dans la seconde, il est donné de la normalité d'un „sous-groupoïde“ N , une définition (coïncidence du coset à gauche avec le coset à droite) (cf. Hausmann-Ore, ce Zbl. 17, 391, déf. I, p. 994) qui a l'inconvénient de ne pas fournir une partition de G . Les cosets, Na , n'étant plus disjoints, il règne une certaine indécision sur le choix des éléments, a , qui les définissent et sur l'invariance de l'ensemble de ces cosets à l'égard de l'ordre suivi pour les construire. Ce choix étant supposé précisé, il est défini un „groupoïde quotient“, G/N homomorphe à G , mais qui n'est pas, en général, un ensemble quotient au sens usuel. Dans la 3ème partie, après avoir exposé les principales propriétés de l'homomorphisme entre deux systèmes algébriques et en particulier le premier théorème d'isomorphisme, l'A. introduit la notion $E(H)$ pour le noyau de l'homomorphisme H et $H(N)$ pour l'homomorphisme, au sens du N° 2, défini par un „sous-groupoïde normal“, N . Alors: $E(H(N)) = N$ et $H(E(H)) \neq H$, même dans le cas des „ova“. Exemple. La 4ème partie est consacrée à l'extension du second théorème d'isomorphisme dans le cas des „groupoïdes“. Page 208, ligne 6, lire \bar{a} au lieu de $1, a$. Page 207, ligne 6, si par „sous-groupoïde“ il faut entendre tout „groupoïde“ G' contenu dans G , alors, nécessairement 1 est contenu dans G' .

A. Sade.

Kontorovič, P. G. and A. D. Kačman: Einige Typen von Elementen einer in einer Gruppe invarianten Halbgruppe. Uspechi mat. Nauk 11, Nr. 3 (69), 145—150 (1956); **Berichtigung**, ibid. 12, Nr. 1 (73), 263 (1957) [Russisch].

Die Arbeit schließt sich an zwei der erstgenannten Verf. an [dies. Zbl. 52, 18; Učenyje Zapiski Kazansk. gosudarst. Univ. 114, no. 8, 35—43 (1954)]. Sei G eine torsionsfreie Gruppe, S eine feste invariante Halbgruppe mit Einheit in G , die keine Inversen ihrer Elemente enthält. Eine Menge $A < S$ heißt ein Ideal, wenn $SA < A$; Ideale sind zweiseitig. Ein Ideal A heißt isoliert, wenn aus $x^n \in A$ folgt, daß $x \in A$. Der Isolator $I(A)$ eines Ideals A ist der Durchschnitt aller A enthaltenden isolierten Ideale. Er ist auch die Menge aller Elemente, von denen eine Potenz in A liegt. Ein Ideal heißt Primideal, wenn sein Komplement in S eine Halbgruppe ist. Ein Element $a \in S$ heißt isoliert, wenn das Hauptideal SA isoliert ist; unzerlegbar, wenn jede

Darstellung $a = uv$ trivial ist; prim, wenn Sa ein Primideal ist. Ein Element kann isoliert und unzerlegbar, und doch kein Primideal sein; oder auch unzerlegbar, aber nicht isoliert. Die Verff. beweisen die folgenden Sätze: 1. Die Menge aller Primelemente von S erzeugt eine kommutative, in G invariante Halbgruppe. 2. Ein Element $a \in S$ ist dann und nur dann unzerlegbar, wenn sein Komplement eine Halbgruppe ist. Das Komplement ist dann maximal; umgekehrt ist jede maximale Unterhalbgruppe von S das Komplement eines unzerlegbaren Elements. 3. Eine Halbgruppe besitzt eine Menge von unzerlegbaren Erzeugenden (eine „Basis“) dann und nur dann, wenn jede echte Unterhalbgruppe in einer echten maximalen enthalten ist. 4. In diesem Falle haben die Elemente von S dann und nur dann eine von der Ordnung abgesehen eindeutige Darstellung durch die Basis, wenn jedes unzerlegbare Element ein Primelement ist. Die Verff. beweisen noch eine Reihe von Sätzen, die darauf beruhen, daß Elemente mit gleichen Isolatoren in Äquivalenzklassen zusammengefaßt werden können.

K. A. Hirsch.

Kacman, A. D.: Über einige Eigenschaften einer Halbgruppe, die in einer Gruppe invariant ist. *Uspechi mat. Nauk* 11, Nr. 2 (68), 179—183 (1956) [Russisch].

Let S be a semigroup and A a subsemigroup. A is said to be of periodic index in S if for every $g \in S$ there exists a natural number n such that $g^n \in A$. Theorem 1. If S is invariant in a group G , then the set of all elements a whose associated principal ideals Sa are of periodic index in S form a semigroup that is invariant in S ; and the elements whose principal ideals are not of periodic index form an invariant prime ideal in S . Theorem 2. If, moreover, S does not contain the inverses of any of its elements, then all the principal ideals have periodic index in S if and only if there is no proper prime ideal other than the complement of 1 in S . Theorem 3. Suppose that under these circumstances the commutator of every pair of elements of S belongs to the union of S and S^{-1} . Then S is commutative. (For definitions see the preceding review.)

K. A. Hirsch.

Boccioni, Domenico: Q -pseudogruppi complementarizzabili. *Rend. Sem. mat. Univ. Padova* 26, 85—123 (1956).

Les données sont 1. Un pseudo-groupe Q et un sous-pseudo-groupe $\Pi \subset Q$. L'opération associative, mais non nécessairement commutative, est notée multiplicativement. Les éléments de Π , qui est multiplicativement fermé, sont supposés simplifiables dans Q et la condition suivante est vérifiée: A) Quels que soient $b \in Q$, $\alpha \in \Pi$, il existe $\alpha_1 \in \Pi$ et $b_1 \in Q$ tels que $\alpha_1 b = b_1 \alpha$. — 2. Un pseudo-groupe G et un sous-pseudo-groupe $\Gamma \subset G$. L'opération est associative et notée additivement, sans être pour cela nécessairement commutative: Les éléments de Γ sont supposés simplifiables dans G ; Γ est additivement fermé et la condition suivante est vérifiée: B) Quels que soient $u \in G$, $\tau \in \Gamma$, il existe $\tau_1 \in \Gamma$, $u_1 \in G$ tels que $u + \tau_1 = \tau + u_1$. — 3. Une troisième opération notée encore sous forme multiplicative fait de l'ensemble Q un ensemble d'opérateurs pour G ($a \in Q$, $u \in G \Rightarrow a u \in G$). Cette opération obéit aux lois suivantes: $a(u + u_1) = a u + a u_1$, $a(a_1 u) = (a a_1) u$. Le théorème d'immersion qui fait l'objet principal de ce travail peut alors s'énoncer comme suit: La condition C) $\alpha u = \alpha u_1$ ($\alpha \in \Pi$, $u, u_1 \in G$) entraîne $u = u_1$, est nécessaire et suffisante pour que le Q -pseudo-groupe G puisse être immergé dans Q -pseudo-groupe G satisfaisant aux conditions suivantes: i) G possède un zéro. (ii) Tout élément $\tau \in \Gamma$ possède un opposé $-\tau \in G$. (iii) L'équation $\alpha \xi = \xi_1$ ($\alpha \in \Pi$, $\xi_1 \in G$) admet dans G une solution unique en ξ . (iv) Tout élément $\xi \in G$ est solution d'une équation du type précédent où $\xi_1 = u - \tau$ ($u \in G$, $\tau \in \Gamma$). De plus, G est déterminé à un isomorphisme près par ces conditions lorsque G, Π, Γ sont donnés. La démonstration utilise une relation d'équivalence dans l'ensemble \mathcal{T} des triples (α, u, τ) où $\alpha \in \Pi$, $u \in G$, $\tau \in \Gamma$ en posant $(\alpha, u, \tau) \sim (\alpha_1, u_1, \tau_1)$ s'il existe six éléments $r, r_1 \in Q$, $\beta \in \Pi$, $v, v_1 \in G$, $\sigma \in \Gamma$ tels que: $r \alpha = r_1 \alpha_1 = \beta$; $r \tau + v = r_1 \tau_1 + v_1 = \sigma$; $r u + v = r_1 u_1 + v_1$. C'est l'ensemble des classes d'équivalence dans \mathcal{T} , muni d'opérations

convenables, qui constitue G . L'A. cite à la fin du mémoire le cas particulier où $\Pi = Q = G = \Gamma$ est l'ensemble N des nombres naturels avec opération interne dans G la multiplication ordinaire et pour opération externe par un élément $n \in Q$ l'élevation à la puissance n ; l'ensemble G est alors isomorphe au groupe des nombres réels $\sqrt[n]{u/\tau}$ ($x, u, \tau \in N$). Le théorème fondamental permet aussi de retrouver comme cas particulier différents résultats d'immersion obtenus précédemment par d'autres auteurs: K. Asano, K. Murata et D. Boccioni.

L. Lesieur.

Kaloujnine (Kaluznin), L. A.: Zentrale Erweiterungen von Abelschen Gruppen. I. Ukrain. mat. Žurn. 8, 262—272 (1956) [Russisch].

Gegeben seien die Gruppen $\Gamma_1, \dots, \Gamma_s$. Eine Gruppe \mathfrak{G} heißt Γ -Erweiterung, wenn \mathfrak{G} eine Folge $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 \supset \mathfrak{G}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{G}_{s-1} \supset \mathfrak{G}_s$ von Untergruppen enthält, in der jedes \mathfrak{G}_i Normalteiler in \mathfrak{G}_{i-1} mit einer zu Γ_i isomorphen Faktorgruppe und \mathfrak{G}_s in \mathfrak{G} antiinvariant ist. Die Isomorphismen φ_i von $\mathfrak{G}_{i-1}/\mathfrak{G}_i$ auf Γ_i werden dabei als zur Definition von \mathfrak{G} gehörig angesehen, was durch die Bezeichnung $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_i, \varphi_i)$ ausgedrückt wird und bei dem hier benutzten Isomorphiebegriff zwischen Γ -Erweiterungen, der sog. Γ -Isomorphie, eine Rolle spielt. Ist speziell $\mathfrak{G}_s = 1$, so nennt Verf. $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_i, \varphi_i)$ eine reguläre Γ -Erweiterung. Die vorliegende Arbeit samt ihrem demnächst erscheinenden zweiten Teil ist der Aufgabe gewidmet, eine Übersicht über alle Γ -Erweiterungen zu gewinnen. Ist \mathfrak{H} eine Untergruppe von \mathfrak{G} und $\mathfrak{H}_i = \mathfrak{G}_i \cap \mathfrak{H}$, so induziert φ_i einen Homomorphismus von \mathfrak{H}_{i-1} in Γ_i . Kommt dabei als Bild die ganze Gruppe Γ_i heraus, so wird $(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_i, \varphi_i)$ ebenfalls eine Γ -Erweiterung, die als Teilerweiterung von $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_i, \varphi_i)$ bezeichnet wird. In Gestalt des vom Verf. und M. Krassner eingeführten vollständigen Produktes der Γ_i (vgl. dies. Zbl. 38, 162) wird eine in gewissem Sinne universelle Γ -Erweiterung $(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}_i, \psi_i)$ gebildet. Und zwar werden die beiden folgenden Sätze bewiesen: Einbettungssatz. Zu jeder Γ -Erweiterung $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_i, \varphi_i)$ gibt es einen Isomorphismus von \mathfrak{G} in \mathfrak{U} , der ein Γ -Isomorphismus von $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_i, \varphi_i)$ auf eine Teilerweiterung von $(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}_i, \psi_i)$ ist. Transformationsatz. Seien $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_i, \varphi_i)$ und $(\mathfrak{G}', \mathfrak{G}'_i, \psi_i)$ zwei Teilerweiterungen von $(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}_i, \psi_i)$ und sei λ ein Γ -Isomorphismus von $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_i, \varphi_i)$ auf $(\mathfrak{G}', \mathfrak{G}'_i, \psi_i)$; dann existiert ein Element $A \in \mathfrak{U}$ mit der Eigenschaft $\lambda X = A X A^{-1}$ für jedes $X \in \mathfrak{G}$.

R. Kochendörffer.

Ljachovickij, V. N.: Zur Frage der Zerlegbarkeit einer Gruppe in verschiedene nilpotente Produkte. Mat. Sbornik, n. Ser. 40 (82), 401—414 (1956) [Russisch].

O. N. Golovin hat das nilpotente Produkt (dies. Zbl. 38, 160) und das metabelsche Produkt (dies. Zbl. 42, 18, 19) eingeführt. Definitionen und Bezeichnungen s. im angeführten Referat. Verf. untersucht in dieser Arbeit das Verhältnis zwischen dem metabelschen und direkten Produkt. Es sei $G = A \circ B = H_1 \times H_2$, wo $A \circ B$ metabelsches Produkt, $H_1 \times H_2$ direktes Produkt bedeuten (A, B, H_1, H_2 Untergruppen von G). Die folgenden Sätze werden bewiesen: 1. Es bedeute A_i die Menge der Komponenten von H_i in A , B_i die Menge der Komponenten von H_i in B ($i = 1, 2$); diese Mengen sind Gruppen. Die Kommutatorgruppe von G $(G, G) = (H_1, H_1) \times (H_2, H_2)$ ist zerlegbar mit den Gruppen (A_i, A_i) , (B_i, B_i) , (A_i, B_i) ($i = 1, 2$) derart, daß

$$(H_1, H_1) = (A_1, A_1) \times (B_1, B_1) \times (A_1, B_1)$$

$$(H_2, H_2) = (A_2, A_2) \times (B_2, B_2) \times (A_2, B_2).$$

2. Es sei Z_G das Zentrum von G ,

$$Z_A^B = [A \cap Z_G], \quad Z_B^A = [B \cap Z_G] \quad (Z_G = Z_A^B \times Z_B^A \times (A, B)_G).$$

Es seien A und B direkte Produkte von zyklischen Gruppen. Dann gilt a) sind A, B Torsionsgruppen, so sind die Charakteristiken von Z_A^B, Z_B^A relativ prim, b) ist die eine Gruppe, z. B. A , torsionsfrei oder eine gemischte Abelsche Gruppe, so ist $Z_B^A = 1$.

3. Es sei Z_1 die Menge der Elemente von Z_A^B , die zu Z_B^A relativ prime Charakteristiken haben. Sind die Faktorgruppen von A, B nach ihren Kommutatorgruppen direktes Produkt von zyklischen Gruppen, so ist das (direkt) nicht ausgetartete metabelsche Produkt von A, B dann und nur dann direkt zerlegbar, wenn a) $A = A_1 \times A_2$, $B = B_1 \times B_2$ b) $(A_1, B_2)_{Z_1} = (A_2, B_1)_{Z_1} = 1$. J. Szép.

Schenkman, Eugene: A splitting theorem and the principal ideal theorem for some infinitely generated groups. Proc. Amer. math. Soc. 7, 870—873 (1956).

Die folgenden zwei Sätze werden bewiesen. 1. Sei $G = G^1 \geq G^2 \geq \dots$ die absteigende Zentralreihe einer Gruppe G und G^* der Durchschnitt aller G^i ($i = 1, 2, \dots$). Voraussetzung: G ist eine Torsionsgruppe, G/G^* endlich von der Ordnung n und G^* abelsch. In jeder einem Primteiler p von n entsprechenden p -Sylow-Gruppe von G^* gibt es kein Element unendlicher Höhe. Behauptung: Es gibt ein Komplement H von G^* in G . (Eine Verallgemeinerung von einem früheren Satz des Verf., s. dies. Zbl. 66, 15.) 2. Sei G' die Kommutatorgruppe von G und G'' diejenige von G' . Voraussetzung: G/G' ist endlich von der Ordnung n und $G'' = 1$. In jeder einem Primteiler p von n entsprechenden p -Sylow-Gruppe von G' gibt es kein Element unendlicher Höhe. Behauptung: Die Verlagerung von G in G' ist gleich 1. (Eine Verallgemeinerung des Hauptidealsatzes.) Ein Beispiel wird angegeben, das zeigt, daß ohne zusätzliche Bedingung für die p -Sylow-Gruppen die beiden Sätze nicht mehr richtig sind. N. Itô.

Cunichin (Chunikhin), S. A.: On Π -factorization of finite groups. Doklady Akad. Nauk SSSR 108, 397—399 (1956) [Russisch].

Zusammenfassung und Vereinheitlichung zweier vorangehender Ergebnisse des Verf. (dies. Zbl. 55, 254, 56, 22). K. Hirsch.

Itô, N. und J. Szép: Über nichtauflösbare endliche Gruppen. Acta Sci. math. 17, 76—82 (1956).

Für eine endliche Gruppe G bezeichne $t(G)$ die Anzahl der verschiedenen Primteiler der Ordnung von G und $r(G)$ die Anzahl der Klassen isomorpher nichtnormaler Untergruppen von G . Itô (dies. Zbl. 65, 257) bewies, daß G im Fall $r(G) \leq 2t(G) + 2$ entweder auflösbar oder die Ikosaedergruppe ist. Hier wird gewonnen: Ist $r(G) \leq 3t(G) + 2$ und hat G einen p -Normalteiler $\neq 1$, so ist G auflösbar, ausgenommen wenn G die spezielle lineare homogene Gruppe $SLH(2, 5)$ oder das direkte Produkt der Ikosaedergruppe und einer Gruppe von Primzahlordnung $\neq 2, 3, 5$ ist. Bezüglich des sehr komplizierten Beweises werde auf die Arbeit hingewiesen. L. Rédei.

Kostrikin, A. I.: On Lie rings satisfying the Engel condition. Doklady Akad. Nauk SSSR 108, 580—582 (1956) [Russisch].

In an earlier paper (this Zbl. 66, 12) the author has shown that the restricted Burnside group $B_{2,5}$ is finite. In the present note he extends this result to the case $B_{k,5}$ of an arbitrary finite number k of generators. This has also been proved by G. Higman [Proc. Cambridge philos. Soc. 52, 381—390 (1956)] using very similar methods. The above result appears as an immediate corollary to the theorem that a Lie ring of characteristic p satisfying the n -th Engel condition $[u, v^n] = 0$ with $p > n$ is locally nilpotent, when $n = 4$. The author also proves local nilpotence for $n = 5$. K. A. Hirsch.

Bandyopadhyay, Shyama Prasad: On the lattice of subgroups of finite groups. Bull. Calcutta math. Soc. 48, 121—128 (1956).

Pour chacun des groupes suivants: 1° groupe cyclique d'ordre n , 2° diédral du 8° ordre, 3° diédral d'ordre 2^n , 4° des quaternions généralisé d'ordre 2^n , le treillis des diviseurs est construit et (avec $n = 3$) le diagramme de Hasse est tracé. Il est montré que, pour ces exemples, l'ordre et le schéma caractérisent le groupe. Le papier s'achève par l'étude de la correspondance entre le treillis des diviseurs d'un groupe et celui des diviseurs d'un de ses groupes quotient. A. Sade.

Kutjev, K. M.: HV-Isomorphismen von teilweise geordneten, lokal nilpotenten Gruppen. Uspechi mat. Nauk **11**, Nr. 2 (68), 193—198 (1956) [Russisch].

Sei G eine teilweise geordnete, lokal nilpotente, torsionsfreie Gruppe, in der die Halbgruppe H der positiven Elemente isoliert ist (d. h. aus $g^n \in H$ folgt $g \in H$). Die Menge aller Halbgruppen in G bildet einen Verband $V(G)$ (mit 0 und 1). Ein Isomorphismus φ , der $V(G)$ auf den entsprechenden Verband $V(G^*)$ einer Gruppe G^* abbildet, heiße HV-Isomorphismus (Halbgruppen-Verband). Eine Halbgruppe, die keine Inversen ihrer Elemente enthält, heiße rein. Verf. beweist, daß das Bild einer reinen invarianten Halbgruppe mit Einheit in G unter einem HV-Isomorphismus ebenfalls eine reine invariante Halbgruppe mit Einheit in G^* ist. Daß G^* dann auch lokal nilpotent ist, ist bekannt [siehe z. B. Kantorovi und Plotkin, Mat. Sbornik, n. Ser. **35** (77), 187—192 (1954)]. Verf. zeigt, daß obendrein G^* derart teilweise geordnet werden kann, daß die Halbgruppe der positiven Elemente in G^* isoliert ist.

K. A. Hirsch.

Tavger, B. A. and V. M. Zajcev (Zaitsev): Magnetic symmetry of crystals. Soviet Phys., JETP **3**, 430—436 (1956), Übersetz. von urn. ksper. teor. Fiz. **30**, 564—568 (1956).

A. N. ubnikov (Symmetrie und Antisymmetrie endlicher Figuren, Moskau 1951) hat erstmals die $90 = 32 + 58$ zweifarbigen Kristallklassen, und zwar durch geometrische Betrachtungen, hergeleitet. In der vorliegenden Arbeit wird dasselbe Ergebnis erhalten durch Betrachtung aller Untergruppen vom Index zwei der 32 einfarbigen Kristallklassen. (Man entnimmt diese 90 Gruppen auch leicht den Angaben im Buche des Ref., Die Bewegungsgruppen der Kristallographie, dies. Zbl. **37**, 149).

J. J. Burckhardt.

Freudenthal, Hans: Explizite Spindarstellung der Drehgruppe. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **59**, 515—522 (1956).

G sei die einfach zusammenhängende berlagerungsgruppe der Drehgruppe im R_n , $\sigma(x)$ ihre Spindarstellung, $\zeta(x)$ deren — explizit bekannter — Charakter. N sei die Menge aller Teilmengen ν von gerader Elementezahl der Menge der Symbole $1, \dots, n$, e_ν eins der beiden Elemente von G , die über der Diagonalmatrix $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ $(\lambda_s = -1$ für $s \in \nu$, $+1$ sonst) liegen. Dann gilt $\sigma(x) = 2^{-l} \sum_{\nu \in N} \varepsilon_\nu \zeta(x e_\nu) \sigma(e_\nu)$ ($l = [\frac{1}{2} n]$, $\varepsilon_\nu = \pm 1$). Im Darstellungsraum von σ werden gewisse Matrizen p_s ($s = 1, \dots, n$) so eingeführt, daß die Transformation von σ durch p_s zur Transformation der Drehmatrizen durch die Diagonalmatrix $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ($\lambda_t = -1$ für $t = s$, $+1$ sonst) gehört. Diese p_s werden noch etwas modifiziert, und dann gilt erstens $\sigma(e_\nu) = \pm \prod_{s \in \nu} p_s$, zweitens sind die p_s Darstellung einer Cliffordschen Algebra. Diese Darstellung ist aber ebenfalls explizit bekannt. *H. Boerner.*

Wallace, A. D.: The gebietstreue in semigroups. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **59**, 271—274 (1956).

Let S be a compact connected mob (i. e. a Hausdorff space with a continuous associative multiplication) contained in an n -dimensional Euclidean space ($n \geq 2$) and let A be the boundary of S . Let K be the minimal ideal of S and let $P(A) = \{t | t \in S \text{ and } tA = A\}$ for $A \subset S$. The author proves that if $P(A)$ is not empty and $S = K$ then $P(A) = P(S) \subset A$. This is an extension of the result given by the author previously (this Zbl. **52**, 25). Furthermore, among other results, the following theorem which the author calls a converse of the gebietstreue is proved: Let X be a compact Hausdorff space and let $M(X)$ be the function space X^X with the compact-open topology. Define a multiplication $M(X) \times M(X) \rightarrow M(X)$ by $fg(x) = f(g(x))$ and put $\Gamma(f) = \{n | n \geq 1\}^*$. If $\Gamma(f)$ is compact and A is a closed (n, G) -rim for X (i. e. the natural homomorphism $H^n(X; C) \rightarrow H^n(B; G)$ is not onto for any closed proper subset B of X containing A where G is an abelian group and H denotes the cohomology group) such that $f(A) = A$, then $\Gamma(f)$ acts as a group of homomorphisms taking X onto X .

K. Morita.

Melencov, A. A.: Einschnitte in zusammenhängenden topologischen Gruppen. Ukrain. mat. Žurn. 8, 289—298 (1956) [Russisch].

Main results: Let G be a topological connected and locally connected group, H a subgroup which is an irreducible disconnecting set of G . Then $G - H = P + P^{-1}$ where P is open in G , $P \cap P^{-1} = \emptyset$, both P and $P + H$ are semigroups.

W. T. van Est.

Vilenkin, N. Ja.: Über eine Klasse von lokal kompakten, null-dimensionalen topologischen Gruppen. Mat. Sbornik, n. Ser. 40 (82), 479—496 (1956) [Russisch].

Verf. dualisiert seine Untersuchungen (dies. Zbl. 45, 314; 52, 263) über null-dimensionale lokalkompakte Gruppen, insbesondere die Ulmschen Folgen (die durch aufsteigende ersetzt werden), den Begriff der regulären Schichtung, der Servanz und die zugehörigen Sätze. Auch die Frage der Existenz und Einzigkeit wird von dieser Seite her angegriffen.

H. Freudenthal.

Gluskov, V. M.: Zur Theorie der nilpotenten, lokal bikompakten Gruppen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 20, 513—546 (1956) [Russisch].

Only topological groups are considered with a finite normal chain (a so called p -chain) whose factors are either finite p -groups or closed subgroups of the additive group of p -adic numbers. A group is said to have a p -adic chain if it has a finite normal chain whose factors are isomorphic to the additive group of p -adic integers, the number of these factors being called the rank. The author proves results that may be considered to be counterparts of results of Mal'cev on finitely generated torsionfree nilpotent groups namely: Any compact nilpotent group with a p -adic chain is imbeddable in an essentially unique p -adic nilpotent Liegroup of the same rank, and may also be imbedded into the special triangular p -adic matrix group (of a certain rank) with integral p -adic entries. Among the other interesting results we mention: Any nilpotent compact group G with a p -chain has a uniquely determined normal subgroup A which is a finite p -group, and such that G/A has a p -adic chain.

W. T. van Est.

Preston, Gerald C.: On locally compact totally disconnected abelian groups and their character groups. Pacific J. Math. 6, 121—134 (1956).

Sind G und g separierte topologische abelsche Gruppen, so ist die Charaktergruppe (G, g) der stetigen Homomorphismen von G in g in der kompakt-offenen Topologie wieder eine topologische abelsche Gruppe. Der Verf. untersucht diese Dualitätstheorie für die im Titel genannten Gruppen G und für spezielle g . Ist G p -primär und g die Prüfersche Gruppe $Z(p^\infty)$ mit einer separierten Topologie τ , so hängt (G, g^τ) nicht von τ ab und es gilt der Dualitätssatz. In Theorem 3. 6 gibt der Verf. notwendige Bedingungen an, damit für eine p -primäre separierte Gruppe g für alle p -primären Gruppen G der Dualitätssatz in der Form $((G, g), g) \cong G$ gilt. Man sieht jedoch leicht, daß dann notwendig g zu $Z(p^\infty)$ algebraisch isomorph sein muß. — Weiter gilt der Dualitätssatz für kompakte total unzusammenhängende Gruppen, falls g das Tychonoffprodukt über alle separiert topologisierten $Z(p_i^\infty)$ ist. Im 5. Abschnitt ist g die algebraische direkte Summe der $Z(p_i^\infty)$ und G nicht notwendig kompakt. Hier fehlt jedoch die Voraussetzung, daß die diskreten Faktorgruppen von G alle periodisch sein müssen, sonst wird z. B. der Dualitätssatz (Theorem 5.2) falsch, wie der Fall $G =$ ganze rationale Zahlen zeigt. Ferner enthält der Beweis zu Theorem 5. 4, p. 134, Zeile 11, einen Fehler.

H. Leptin.

Cartier, P.: Démonstration algébrique de la formule de Hausdorff. Bull. Soc. math. France 84, 241—249 (1956).

The author gives an ab initio proof of the Baker-Hausdorff formula with a derivation of Dynkin's expression for the coefficients (this Zbl. 29, 245). Using identities of Dynkin [l. c., cf. also Baker, Proc. London. math. Soc., II. Ser. 3, 24—47 (1905)], he shows that the free Lie ring L can be embedded in the free associative ring R (each on the same number n of free generators). Let h be the mapping of R into itself

which replaces each associative polynomial $u \in R$ by the element of R obtained by regarding u as a (right-normed) Lie polynomial, D the linear mapping of R into itself which multiplies each homogeneous element by its degree and $\theta(u)$, for any $u \in R$, the linear mapping $\lambda_u - \rho_u$, where λ_u, ρ_u are respectively the left and right multiplications defined by u on R . All these mappings can be extended in a natural way to the power series ring \bar{R} obtained by completing R . Then the function \exp can be defined in \bar{R} and the function \log in $1 + \bar{R}$ in the usual way, so as to be inverse to each other. It is now shown that an element $v \in \bar{R}$ satisfies $\log(1 + v) \in \bar{L}$ if and only if (i) $h(v) = D(v)(1 + v)^{-1}$ and (ii) $\theta(v)x = (1 + v)x(1 + v)^{-1}$ for all $x \in \bar{R}$. As a result, \bar{L} is shown to be a subgroup of \bar{R} with respect to the multiplication defined by $x \circ y = \log(\exp x \cdot \exp y)$, which amounts to the Baker-Hausdorff formula. The formula of Dynkin (l. c.) follows from this. As an application the author obtains the local group associated with a normed Lie algebra (Dynkin, this Zbl. 52, 262) and the Birkhoff-Witt theorem (Birkhoff, this Zbl. 16, 244, Witt, this Zbl. 16, 244).

P. M. Cohn.

Berezin, F. A. und I. M. Gel'fand: Einige Bemerkungen zur Theorie der Kugelfunktionen auf symmetrischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Uspechi mat. Nauk 11, Nr. 3 (69), 211—218 (1956) [Russisch].

Zu einer symmetrischen Riemannschen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$ mit der Gruppe \mathfrak{G} werden Kugelfunktionen betrachtet; ist $g \rightarrow Tg$ eine unitäre Darstellung so, daß für ein gewisses $\xi_0 \neq 0$ gilt $(Tg)\xi_0 = \xi_0$ für alle $g \in \mathfrak{G}_0$, so heißen die Skalarprodukte $(\xi, (Tg)\eta)$ Kugelfunktionen; zonal heißen sie, wenn sie auf den „Sphären“ mit „Mittelpunkt“ x_0 konstant sind. Speziell wird für die Mannigfaltigkeiten der halbeinfachen Gruppen (\mathfrak{G} besteht aus den $x \rightarrow a^{-1}xb$) und für die Fälle „ \mathfrak{G} = komplexe halbeinfache Gruppe, \mathfrak{G}_0 = maximale kompakte Untergruppe“ das Multiplikationsgesetz der zonalen Funktionen angegeben. Weiter werden die Laplace-Operatoren (d. h. vertauschbar mit den $f(x) \rightarrow f(gx)$, $g \in \mathfrak{G}$) mit der Mittelwertbildung in Beziehung gebracht, und schließlich wird eine Dualität zwischen dem Ring der Klassenfunktionen der kompakten Gruppe \mathfrak{G} und der Algebra der Darstellungen von \mathfrak{G} expliziert. — Kurze Andeutungen, ohne Beweise.

H. Freudenthal.

Harish-Chandra: Representations of semisimple Lie groups VI. Integrable and square-integrable representations. Amer. J. Math. 78, 564—628 (1956).

Soient G un groupe de Lie réel semi-simple connexe, Z son centre, Z_0 un sous-groupe de Z tel que Z/Z_0 soit fini, $G^* = G/Z_0$, $x \rightarrow x^*$ l'application canonique de G sur G^* , π une représentation unitaire irréductible de G dans un espace hilbertien \mathfrak{H} . S'il existe deux éléments $\varphi_0 \neq 0$, $\psi_0 \neq 0$ de \mathfrak{H} tels que $\int_{G^*} |(\varphi_0, \pi(x)\psi_0)|^2 dx^* < +\infty$,

il existe un nombre $d_\pi > 0$ tel que $\int_{G^*} |(\varphi, \pi(x)\psi)|^2 dx^* = d_\pi^{-1} \|\varphi\|^2 \|\psi\|^2$ pour tous $\varphi, \psi \in \mathfrak{H}$. On dit alors que π est de carré intégrable, et d_π s'appelle le degré formel de π (on s'est fixé une fois pour toutes Z_0 et dx^*). Si $\varphi', \psi' \in \mathfrak{H}$, on a

$$\int_{G^*} (\varphi, \pi(x)\psi) \text{conj}(\varphi', \pi(x)\psi') dx^* = d_\pi^{-1} (\varphi, \varphi') (\psi, \psi').$$

Si π' est une autre représentation unitaire irréductible de G dans \mathfrak{H}' , de carré intégrable, inéquivalente à π et de même restriction à Z_0 que π , on a

$$\int_{G^*} (\varphi, \pi(x)\psi) \text{conj}(\varphi', \pi(x)\psi') dx^* = 0$$

pour $\varphi', \psi' \in \mathfrak{H}'$ (th. 1, „relations d'orthogonalité de Schur“). Il y a des connexions avec R. Godement (ce Zbl. 29, 199). Soit T_π le caractère de π au sens de l'A. (ce Zbl. 55, 340); si f est indéfiniment différentiable à support compact sur G , on a

$$T_\pi(f) = d_\pi \int_{G^*} dx^* \left\{ \int_G f(yx^*) (\varphi, \pi(y)\varphi) dy \right\}$$

où φ est un vecteur unitaire quelconque de \mathfrak{H} , et $y^x = x y x^{-1}$ (th. 2). Supposons Z fini et $Z_0 = \{1\}$. Soient \mathcal{L} l'ensemble des classes de représentations unitaires irréductibles de G , μ la mesure de Plancherel sur \mathcal{L} au sens de Mautner-Segal. Tout point ω de \mathcal{L} est μ -mesurable; pour que $\pi \in \omega$ soit de carré intégrable, il faut et il suffit que $\mu(\omega) > 0$, et on a alors $\mu(\omega) = d_\omega$ (th. 3). Ces résultats avaient été annoncés dans deux notes de l'A. (ce Zbl. 56, 259; 64, 259), mais moyennant des hypothèses supplémentaires pour le th. 3. Les démonstrations, compte tenu des résultats antérieurs de l'A., sont relativement simples. — Les résultats de la deuxième partie sont beaucoup plus difficiles à résumer et à démontrer. On utilise les notations d'une revue antérieure (ce Zbl. 70, 116); notamment, G est simplement connexe, G_c est le groupe complexe simplement connexe d'algèbre de Lie \mathfrak{g} , G_0 est le sous-groupe de G correspondant à \mathfrak{g}_0 . Soit Z_0 le noyau de l'application canonique de G sur G_0 . L'A. précise une normalisation de la mesure de Haar sur G_0 , montre que les représentations irréductibles π_A introduites loc. cit. (pour $\mu = 0$) sont de carré intégrable (lorsqu'elles sont unitaires, ce qui, pour éviter des cas triviaux, permet de supposer que toute racine positive non compacte est totalement positive), et calcule leur degré formel:

$$d_A = \prod_{\beta \in P} |\langle A(H_\beta) + \varrho(H_\beta) | \varrho(H_\beta) \rangle|$$

où P est l'ensemble des racines positives et ϱ leur demi-somme. La démonstration repose sur une comparaison détaillée entre le cas compact et le cas non compact. L'A. obtient en passant une démonstration directe d'un théorème de E. Cartan sur l'équivalence d'espaces symétriques avec un domaine borné de C^n (théorème que E. Cartan prouvait par construction explicite pour chaque type de groupes simples).

J. Dixmier.

Harish Chandra: The characters of semisimple Lie groups. Trans. Amer. math. Soc. 83, 98—163 (1956).

Un résumé de quelques résultats a été publié antérieurement (ce Zbl. 65, 350). § 2. Préliminaires sur les sous-algèbres de Cartan des algèbres de Lie semi-simples réelles (avec une esquisse de classification) et les sous-groupes de Cartan des groupes de Lie semi-simples réels: essentiellement, on se ramène au cas compact par l'intermédiaire des groupes complexes. Soient G un groupe de Lie semi-simple réel, \mathfrak{g}_0 son algèbre de Lie. Les notations \mathfrak{g} , \mathfrak{B} , \mathfrak{Z} , \mathfrak{k}_0 , \mathfrak{p}_0 , \mathfrak{h}_0 , \mathfrak{h} , K sont les notations habituelles de l'A. (cf. par exemple ce Zbl. 51, 340). Soient A le centralisateur de \mathfrak{h}_0 dans G , \bar{M} la composante connexe du centralisateur de $\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0$ dans K , $\mathfrak{m}_{\mathfrak{k}_0}$ le centralisateur de $\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0$ dans \mathfrak{k}_0 , $M = \bar{M}A$ qui est un groupe d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0 + \mathfrak{m}_{\mathfrak{k}_0}$; cette algèbre de Lie est réductive. § 3. Un élément x de G est dit quasi-régulier si, Z_x et \mathfrak{h}_x étant les centralisateurs de x dans G et \mathfrak{g}_0 , (1) \mathfrak{h}_x contient un élément régulier, (2) il existe un sous-groupe abélien distingué fermé A de Z_x tel que Z_x/A soit compact. Tout élément régulier est quasi-régulier. Soient $'G$ l'ensemble des éléments quasi-réguliers de G , et $'M = 'G \cap M$; $'M$ est une sous-variété ouverte de M . § 5. Soient $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ la complexification de l'algèbre de Lie de M , $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{B}$ son algèbre enveloppante, \mathfrak{q} l'orthogonal de \mathfrak{m} dans \mathfrak{g} , \mathfrak{Q} l'image canonique dans \mathfrak{B} de l'algèbre symétrique de \mathfrak{q} . Pour tout $m \in M$, il existe une application linéaire unique Γ_m de $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{M}$ dans \mathfrak{B} telle que $\Gamma_m(1 \otimes \nu) = \nu$ et

$$\Gamma_m(X_1 X_2 \cdots X_r \otimes \nu) = (L_{Ad(m^{-1})X_1} - R_{X_1}) \cdots (L_{Ad(m^{-1})X_r} - R_{X_r}) \nu$$

pour $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{g}$ et $\nu \in \mathfrak{M}$, L et R désignant les opérateurs de multiplication à gauche et à droite dans \mathfrak{B} . Si $m \in 'M$, Γ_m définit une bijection de $\mathfrak{Q} \otimes \mathfrak{M}$ sur \mathfrak{B} . Pour $b \in \mathfrak{B}$, on a $b = \Gamma_m(\tilde{b})$, où \tilde{b} est un élément de $\mathfrak{Q} \otimes \mathfrak{M}$ dépendant analytiquement de m pour $m \in 'M$. Soit $\delta_m(b)$ l'unique élément de \mathfrak{M} tel que $b - \delta_m(b) \in \Gamma_m(\mathfrak{Q}' \otimes \mathfrak{M})$, où \mathfrak{Q}' désigne l'ensemble des éléments „sans terme constant“ dans \mathfrak{Q} . Alors, $m \rightarrow \delta_m(b)$ est analytique pour $m \in M$, donc il existe un opérateur différentiel

$\delta(b)$ à coefficients analytiques sur $'M$ dont l'expression locale en tout point $m \in 'M$ est $\delta_m(b)$. § 6. Soit \mathfrak{U} l'algèbre enveloppante de \mathfrak{h} , J la sous-algèbre des invariants du groupe de Weyl de G , $J_- \supset J$ la sous-algèbre des invariants du groupe de Weyl de M . L'A. a défini antérieurement (ce Zbl. 42, 127) un isomorphisme γ de \mathfrak{Z} sur J et il existe de même un isomorphisme γ_- de \mathfrak{Z}_M (centre de \mathfrak{M}) sur J_- , d'où un isomorphisme μ de \mathfrak{Z} dans \mathfrak{Z}_M . Théorème 1. Si $z \in \mathfrak{Z}$ et si τ est une distribution sur $'M$ invariante par les automorphismes intérieurs de M , on a $\delta(z) \tau = |d_+|^{-1/2} \mu(z) \cdot (|d_+|^{1/2} \tau)$ (où, pour $m \in M$, $d_+(m)$ est le déterminant de la restriction à \mathfrak{q} de $Ad(m^{-1}) - I$). §§ 7 et 8. Définitions un peu analogues à celles du § 6, le rôle de M étant tenu par le groupe de Cartan A correspondant à \mathfrak{h}_0 ; $\delta_m(b)$ est remplacé par un élément $\beta_h(b)$ de \mathfrak{U} , et on obtient un opérateur différentiel $\beta(b)$ à coefficients analytiques sur une sous-variété ouverte A' de A . Le théorème 2 donne, pour $\beta(z)$ ($z \in \mathfrak{Z}$ ou $z \in \mathfrak{Z}_M$) des expressions analogues à celles du théorème 1, μ étant remplacé par γ et γ_- . § 9. Théorème 3. Soit τ une distribution invariante sur $'M$. Si τ est distribution propre de $\delta(z)$ pour $z \in \mathfrak{Z}$, τ est une fonction analytique sur $'M$. Démonstration: à l'aide du théorème 1, on montre que $\tau' = |d_+|^{1/2} \tau$ est distribution propre de $\mu(z)$ pour tout $z \in \mathfrak{Z}$, donc annule un polynôme unitaire en w pour tout $w \in \mathfrak{Z}_M$ (car \mathfrak{Z}_M est entier sur $\mu(\mathfrak{Z})$); pour w bien choisi, on obtient pour w un opérateur différentiel elliptique, d'où le théorème. Le théorème 4 précise la forme „polynôme-exponentielle“ de la restriction de τ aux composantes connexes de A' . § 11. Soit π une représentation quasi-simple de G dans un espace hilbertien, et soit T_π le caractère-distribution de π au sens de l'A. (ce Zbl. 55, 340). Alors (théorème 6) T_π coïncide sur $'G$ avec une fonction analytique F_π . Démonstration: on applique le théorème 3 à la distribution τ_π sur $'M$ définie comme suit: pour f fonction indéfiniment différentiable à support compact sur $G \times 'M$, l'opérateur

$$\int_{G \times 'M} f(x, m) \pi(x m x^{-1}) dx dm$$

a une trace $S_\pi(f)$; S_π est une distribution sur $G \times 'M$; il existe une distribution τ_π sur $'M$ telle que $S_\pi(\alpha \otimes \beta) = \left(\int_G \alpha(x) dx \right) \tau_\pi(\beta)$ lorsque α est indéfiniment différentiable à support compact sur G et β indéfiniment différentiable à support compact sur $'M$. Le théorème 7 limite la dimension de l'espace vectoriel complexe engendré par les fonctions F_π quand on se fixe le caractère infinitésimal et le caractère central de π (cette dimension est finie). Les §§ 10 et 12 donnent d'intéressantes précisions supplémentaires quand $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{k}_0$ et que G est un groupe linéaire (on a alors $M = K$).
J. Dixmier.

Harish-Chandra: Differential operators on a semisimple Lie algebra. Amer. J. Math. 79, 87—120 (1957).

Les résultats de cet article serviront plus tard pour la théorie de la transformation de Fourier dans les algèbres de Lie semi-simples. Beaucoup de ces résultats ressemblent à ceux de l'article résumé dans la précédente revue: on remplace G et M par \mathfrak{g}_0 et \mathfrak{m}_0 , les opérateurs différentiels à coefficients analytiques par les opérateurs différentiels à coefficients polynômes, et les applications analytiques par les applications polynômes. D'autre part, le § 5 donne les résultats suivants. Soient G un groupe de Lie compact, \mathfrak{g}_0 son algèbre de Lie, \mathfrak{g} la complexification de \mathfrak{g}_0 , \mathfrak{h}_0 une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g}_0 , \mathfrak{h} sa complexification, π le produit des racines positives, B la forme de Killing, W le groupe de Weyl, w l'ordre de W , $\varepsilon(s)$ la signature d'un élément s de W . Alors, pour $H, H' \in \mathfrak{h}$, on a

$$\pi(H) \pi(H') \int_G \exp B(x H, H') dx = w^{-1} \langle \pi, \pi \rangle \sum_{s \in W} \varepsilon(s) \exp B(s H, H')$$

où \langle, \rangle est l'extension de B à l'algèbre symétrique de \mathfrak{g} (théorème 2). Pour toute fonction indéfiniment différentiable f sur \mathfrak{g}_0 , soit φ_f la fonction indéfiniment diffé-

rentiable sur \mathfrak{h}_0 définie par $\varphi_f(H) = \pi(H) \int_G f(xH) dx$ pour $H \in \mathfrak{h}_0$. Si f est à décroissance rapide (ce que l'A. note $f \in C(\mathfrak{g}_0)$), alors $\varphi_f \in C(\mathfrak{h}_0)$, et $f \rightarrow \varphi_f$ est continue pour les topologies de L. Schwartz. En outre, si \tilde{f} et $(\varphi_f)^\sim$ sont les transformées de Fourier de f et φ_f , φ_f^\sim est proportionnelle à $(\varphi_f)^\sim$ (théorème 3). Soit $J(\mathfrak{g}_0)$ (resp. $J(\mathfrak{h}_0)$) l'ensemble des éléments de $C(\mathfrak{g}_0)$ (resp. $C(\mathfrak{h}_0)$) invariants par G (resp. W). Pour toute fonction f sur \mathfrak{g}_0 , soit f sa restriction à \mathfrak{h}_0 . Alors, si $f \in J(\mathfrak{g}_0)$, on a $\tilde{f} \in J(\mathfrak{h}_0)$, et $f \rightarrow \tilde{f}$ est un isomorphisme topologique de $J(\mathfrak{g}_0)$ sur $J(\mathfrak{h}_0)$ (théorème 4).

J. Dixmier.

Harish-Chandra: Invariant differential operators on a semisimple Lie algebra.
Proc. nat. Acad. Sci. USA **42**, 252—253 (1956).

Harish-Chandra: A formula for semisimple Lie groups. Proc. nat. Acad. Sci. USA **42**, 538—540 (1956).

Come d'habitude dans ce genre de Notes de l'A., la concision est poussée au maximum, et les démonstrations sont remises à plus tard. Soit \mathfrak{g}_0 une algèbre de Lie semi-simple réelle. L'espace \mathfrak{g}_0 s'identifie à son dual, donc l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g}_0)$ de \mathfrak{g}_0 s'identifie à l'algèbre des fonctions polynômes sur \mathfrak{g}_0 et à l'algèbre des opérateurs différentiels sur \mathfrak{g}_0 . D'où, si f est une fonction indéfiniment différentiable sur \mathfrak{g}_0 et si $p \in S(\mathfrak{g}_0)$, la signification du symbole $f(X; \partial(p))$ pour $X \in \mathfrak{g}_0$. Soient \mathfrak{h}_0 une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g}_0 , \mathfrak{g} et \mathfrak{h} les complexifications de \mathfrak{g}_0 et \mathfrak{h}_0 , $\pi \in S(\mathfrak{h})$ le produit des racines positives, G_0 le groupe adjoint de \mathfrak{g}_0 , A_0 le sous-groupe de G_0 correspondant à \mathfrak{h}_0 , dx^* la mesure invariante sur $G^* = G_0/A_0$. Posons $x^*H = xH$ ($H \in \mathfrak{h}$, $x \in x^* \in G^*$). Soit \mathfrak{h}'_0 l'ensemble des $H \in \mathfrak{h}_0$ où $\pi(H) \neq 0$. Si f est une fonction indéfiniment différentiable à décroissance rapide sur \mathfrak{g}_0 (ce que l'A. note $f \in C(\mathfrak{g}_0)$), l'intégrale

$$F_f(H) = \pi(H) \int_{G^*} f(x^*H) dx^*$$

converge pour $H \in \mathfrak{h}'_0$, et F_f est indéfiniment différentiable à décroissance rapide sur \mathfrak{h}'_0 . Soit \mathfrak{h}_1 une composante connexe de \mathfrak{h}'_0 . Il existe un nombre réel c tel que

$$\lim_{H \rightarrow 0} F_f(H; \partial(\pi)) = c f(0) \quad (H \in \mathfrak{h}_1)$$

pour toute $f \in C(\mathfrak{g}_0)$. Une partie des résultats concerne les propriétés de la constante c ; la situation analogue pour une groupe de Lie réel quelconque d'algèbre de Lie \mathfrak{g}_0 est aussi envisagée.

J. Dixmier.

Verbände. Ringe. Körper:

Evans, Trevor: Some remarks on a paper by R. H. Bruck. Proc. Amer. math. Soc. **7**, 211—220 (1956).

Eine Mannigfaltigkeit \mathfrak{B} von algebraischen Gebilden ist dadurch beschrieben, daß die zu ihr gehörigen algebraischen Gebilde gleichbezeichnete endlichstellige Verknüpfungen in nur endlicher Anzahl haben und eine gewisse (möglicherweise unendliche) Menge von Gleichungen (zwischen Ausdrücken, die aus Variablen und den Verknüpfungszeichen gebildet sind) erfüllen. \mathfrak{B} ist eine Mannigfaltigkeit von Gruppoiden, wenn nur eine einzige, zudem binäre Verknüpfung vorliegt. \mathfrak{B} ist eine Mannigfaltigkeit von Loops, wenn genau drei, zudem binäre Verknüpfungen vorhanden sind, deren Ergebnisse (angewandt auf das Paar x, y) mit $x + y$, $x - y$, $-x + y$ bezeichnet seien, und wenn $(x + y) - y = x$, $-x + (x + y) = y$, $x + (-x + y) = y$, $(x - y) + y = x$, $x - x = -y + y$ unter den kennzeichnenden Gleichungen vorkommen. Mit $F_1(\mathfrak{B})$ wird das in \mathfrak{B} gebildete freie algebraische Gebilde mit einer Erzeugenden bezeichnet. Ist \mathfrak{B} eine Mannigfaltigkeit von Loops und 1 das erzeugende Element von $F_1(\mathfrak{B})$, so wird in Verallgemeinerung einer Konstruktion von Bruck (dies. Zbl. **64**, 30) aus der additiv geschriebenen Loop $F_1(\mathfrak{B})$

dadurch ein assoziativer Neo-Ring $R_1(\mathfrak{B})$ mit dem Einselement 1, daß das Produkt $x y$ erklärt wird als das Bild von x bei demjenigen Endomorphismus von $F_1(\mathfrak{B})$, der 1 in y überführt. Unter den $R_1(\mathfrak{B})$ gibt es überabzählbar viele untereinander nichtisomorphe. Jeder Rechts-Neoring mit einem Linkselement, das die additive Loop erzeugt, ist isomorph zu einem $R_1(\mathfrak{B})$. — Unter einer abstrakten Logarithmetik wird ein algebraisches Gebilde mit zwei, als Addition und Multiplikation geschriebenen Verknüpfungen verstanden, das die folgenden Bedingungen erfüllt: Existenz eines neutralen Elementes der Multiplikation; Assoziativität der Multiplikation: $x(y+z) = xy + xz$; $x0 = 0x = 0$, wenn 0 neutrales Element der Addition (braucht nicht vorhanden zu sein!). Die Anwendung des zu $R_1(\mathfrak{B})$ führenden Verfahrens auf eine Mannigfaltigkeit \mathfrak{B} von Gruppoiden liefert bei Umkehrung der Faktorenreihenfolge (in der Definition der Multiplikation) eine abstrakte Logarithmetik $L_1(\mathfrak{B})$. Jede abstrakte Logarithmetik ist isomorph zu einer $L_1(\mathfrak{B})$. Es gibt überabzählbar viele untereinander nichtisomorphe Logarithmetiken. Jede Logarithmetik (im Sinne von Etherington; s. z. B. dies. Zbl. 42, 34) einer Teilmenge S eines Gruppoids ist isomorph zu einer $L_1(\mathfrak{B})$, wobei sich die kennzeichnenden Gleichungen von \mathfrak{B} sofort aus den in S geltenden Identitäten ergeben, wenn man die Gruppoid-Verknüpfung als Addition schreibt. Nach Definition der Logarithmetik einer Loop wird gezeigt, daß diese ein Links-Neoring mit Einselement ist, bei dem das Einselement die additive Loop erzeugt.

G. Pickert.

Dean, R. A.: Completely free lattices generated by partially ordered sets. Trans. Amer. math. Soc. 83, 238—249 (1956).

P sei eine (teilweise) geordnete Menge. Verf. konstruiert nach der Methode von Whitman [dies. Zbl. 24, 245 und Ann. of Math., II. Ser. 43, 104—105 (1942)] den vollfreien Verband $CF(P)$ über P , der die folgenden Bedingungen erfüllt: (1) P ist als geordnete Menge in $CF(P)$ enthalten. (2) Jeder minimale Verband, der (1) erfüllt, ist verbandshomomorphes Bild von $CF(P)$. Aus der Konstruktion ergibt sich, daß das Wortproblem in $CF(P)$, d. h. die Frage nach der Gleichheit zweier aus Konstanten (für die Elemente von P) mit \cap und \cup zusammengesetzter Wörter, entscheidbar ist. Darüber hinaus wird ein Verfahren angegeben, das zu jedem Wort A ein kanonisches Wort, d. h. ein Wort C minimaler Länge mit $C = A$ liefert. Mit diesen Mitteln werden u. a. ein Kriterium aufgestellt, wann $CF(P)$ gleichzeitig der „freie“ Verband über P im Sinne von Dilworth (dies. Zbl. 60, 61) ist, und einige Beispiele untersucht.

P. Lorenzen.

Funayama, Nenosuke: Imbedding partly ordered sets into infinitely distributive complete lattices. Tôhoku math. J., II. Ser. 8, 54—62 (1956).

Betrachtet werden die Hüllenerweiterungen einer geordneten Menge P im Sinne einer etwas früheren, für diesen Begriff grundlegenden Arbeit von Banaschewski [Z. math. Logik Grundl. Math. 2, 117—130 (1956)]. Unter einem Anfang (vom Verf. kaum zweckmäßig „ideal“ genannt) verstehe man eine Menge $M \subseteq P$ mit $x \in M$ & $y \leq x \rightarrow y \in M$; das System der Anfänge von P bildet ein Hüllensystem (J. Schmidt, dies. Zbl. 49, 166, 52, 26) \mathfrak{A} über P ; Hauptanfänge sind die Mengen $]\leftarrow, x]$ aller $y \leq x$, sie bilden ein Mengen- (nicht notwendig Hüllen-) System \mathfrak{S} über P . Eine Hüllenerweiterung von P ist jedes Hüllensystem \mathfrak{S} über P mit $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{A}$; die entsprechende Bedingung für den zugehörigen Hüllenoperator C (J. Schmidt, loc. cit.) lautet: $C\{x\} =]\leftarrow, x]$ für jedes $x \in P$ (Lemma 2); solche Hüllenoperatoren nennt Verf. Einbettungsoperatoren. Die Hüllenerweiterungen \mathfrak{S} von P entsprechen im wesentlichen umkehrbar eindeutig den vollständigen Verbänden L , in denen P supremum-dicht liegt (siehe Theorem 2). Verf. interessiert sich unter diesen vollständigen Hüllen für solche, in denen das unendliche Distributivgesetz $x \wedge \bigvee a_i = \bigvee x \wedge a_i$ gilt. Es wird eine notwendige und hinreichende Bedingung für die unendliche Distributivität einer Hüllenerweiterung \mathfrak{S} von P angegeben (Theorem 3, Verallgemeinerung eines Satzes von Dilworth und McLaughlin,

dies. Zbl. 47, 261). Dieses Resultat wird modifiziert ausgedehnt auf sog. „schwache“, d. h. mehrstufige (nicht idempotente) Einbettungsoperatoren. Schließlich wird eine wohlbestimmte unendlich-distributive Hüllenerweiterung konstruiert; sie ist (Theorem 10) unter den unendlich-distributiven Hüllenerweiterungen von P die (im Sinne der mengentheoretischen Inklusion) kleinste („strongest“) und ist charakterisiert (Theorem 7) als diejenige Hüllenerweiterung von P , die genau die sog. „distributiven Summen“ im Sinne von MacNeille erhält. Nach Einführung eines naheliegenden Ähnlichkeitsbegriffes findet sich übrigens (Theorem 9) in jeder Klasse ähnlicher Hüllenerweiterungen genau eine unendlich-distributive.

Jürgen Schmidt.

Dwinger, Ph.: Direct products in modular lattices. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 59, 435—443 (1956).

Dwinger, Ph. und J. de Groot: On the axioms of Baer and Kurosh in modular lattices. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 59, 596—601 (1956).

Ist V ein modularer Verband, so folgt aus der Selbstdualität dieses Begriffes, daß mit jeder Aussage über direkte Summen von endlich vielen Summanden in V auch die dazu duale Aussage über direkte Durchschnitte von endlich vielen Faktoren gilt. Will man auch Sätze über Zerlegungen in unendlich viele Komponenten gewinnen, so muß man natürlich auch die Vollständigkeit von V fordern. Darüber hinaus bedarf es weiterer Eigenschaften. Man kann etwa mit Ref. folgendes Postulat dem vollständigen Verbands V auferlegen: (B) Ist $y < z \leq \sum_{\sigma} x_{\sigma}$, so gibt es endlich viele Indizes $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ derart, daß $y \sum_i x_{\sigma_i} < z \sum_i x_{\sigma_i}$. Mit Hilfe dieses Postulats kann man in vollständigen modularen Verbänden eine ausreichende Theorie der direkten Summe aufbauen. Da aber (B) nicht selbstdual ist, so folgen hieraus nicht ohne weiteres die entsprechenden Sätze für direkte Durchschnitte. Diese werden in der ersten der vorliegenden Arbeiten hergeleitet; der innere Grund hierfür mag wohl sein, daß es gelingt [ebenfalls in der ersten der besprochenen Arbeiten] aus (B) das folgende von Kurosch eingeführte Postulat herzuleiten: (K) gilt $x_a \leq y_b$ für jedes $a \neq b$, so gilt auch $\left[\sum_a x_a \right] \prod_a y_b = \sum_a x_a y_b$. Die genauen Beziehungen zwischen diesen beiden Eigenschaften bilden den Gegenstand der zweiten der hier besprochenen Arbeiten. Es gibt nicht-modulare vollständige Verbände, in denen (B) gilt, während aus (K) stets das modulare Gesetz folgt. Gilt umgekehrt in einem modularen Verband V die Maximalbedingung oder die Minimalbedingung oder — und dies ist bemerkenswert — ist die Mächtigkeit von V kleiner als die des Kontinuums, so gilt stets (K). Andererseits wird die Existenz von abzählbaren, (K) erfüllenden distributiven Verbänden mit Minimalbedingung erwiesen, in denen (B) nicht gilt. *R. Baer.*

Albada, P. J. van: Symmetric nonassociative algebras. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 59, 265—268 (1956).

Als symmetrisch bezeichnet Verf. eine Algebra A über dem Körper F , wenn sie einen involutorischen Antiautomorphismus $a \rightarrow \bar{a}$ besitzt, der genau die Elemente aus F festläßt. Jede solche Algebra ist potenzassoziativ. Erklärt man für geordnete Paare (a, b) von Elementen aus A die Addition komponentenweise und die Multiplikation durch $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - \pi db, da + b\bar{c})$, π in F , so besitzt diese neue Algebra A' in $(a, b) \rightarrow (a, -b)$ ebenfalls einen involutorischen Antiautomorphismus. Beispiele: Wenn F der Körper der reellen Zahlen ist, dann sind F' die komplexen Zahlen, F'' die Quaternionen, F''' die Cayleyzahlen und F'''' eine Algebra mit Nullteilern, aber Existenz von a^{-1} für jedes a . Über die Beziehungen zwischen A und A' bezüglich Assoziativität und Kommutativität gilt: 1. A' kommutativ $\nRightarrow A = F \rightarrow A'$ assoziativ. 2. A' assoziativ $\nRightarrow A$ assoziativ und kommutativ. 3. A' alternativ $\nRightarrow A$ assoziativ. 4. A flexibel (d. h. stets $(a, b, a) = 0$) $\nRightarrow A'$ flexibel. Falls A flexibel, liegt das Quadrat jedes Assoziators (a, b, c) bereits in F .

E.-A. Behrens.

Kokoris, L. A.: On a class of almost alternative algebras. Canadian J. Math. 8, 250—255 (1956).

Pour les algèbres du type (γ, δ) (voir Albert, ce Zbl. 33, 154) dans les cas de caractéristique $\neq 2, 3, 5$ et $\delta \neq 0, 1$, l'A. prouve: a) qu'elles sont „power-associative“; b) sa décomposition par rapport à un idempotent est analogue à celle des algèbres associatives; et c) les algèbres simples ou bien sont associatives ou elles possèdent une unité qui est un élément idempotent absolument primitif. *G. Ancochea.*

Lju, Šao-sjué: Über die Zerfällung der lokal endlichen Algebren. Mat. Sbornik, n. Ser. 39 (81), 385—396 (1956) [Russisch].

The author aims at generalizing Wedderburn's third theorem and the Mal'cev conjugacy theorem [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 36, 46—50 (1942)] to locally finite algebras (i. e. algebras in which every finitely generated subalgebra is finite dimensional). This he does by axiomatizing the various concepts used. E. g., nilpotency (or for non-associative algebras, solubility) becomes property N of finite dimensional algebras, defined by N. 1: Every subalgebra and homomorphic image of an N -algebra is again an N -algebra, N. 2: If an algebra A has an ideal R such that R and A/R are N -algebras, then so is A . The unique maximal N -ideal of a finite dimensional algebra is called its N -radical. Separability becomes property C of finite dimensional algebras, with C. 1: Every C -algebra has zero N -radical, C. 2: Every direct summand of a C -algebra is a C -algebra. Further, an automorphism σ is called N -inner, if it can be written as $1 + f$, where f is a polynomial in the right and left multiplications by elements of A , each term of f has at least one factor from the N -radical of A and for any finite dimensional algebra B containing A whose N -radical contains R , $1 + f$ is still an automorphism. Two subalgebras are N -conjugate in A if there is an N -inner automorphism of A mapping one onto the other. Then the Wedderburn-Mal'cev theorem for finite dimensional algebras reads: Every algebra A with N -radical R such that A/R is a C -algebra, splits over R ; for any splitting $A = S + R$, and any C -subalgebra Q of A , Q is N -conjugate to a subalgebra of S . — Now let Σ be any class of algebras (over a field F) closed under the operations of taking subalgebras, homomorphic images and direct unions, i. e. a variety. If Σ has non-zero finite dimensional algebras and the above Wedderburn-Mal'cev theorem holds for all of them, then a modified version of the theorem (using a property somewhat like „locally N “) is established for locally finite algebras of Σ which generalizes results of Schenkman (this Zbl. 47, 34f.) and Kuročkin [Moskovsk. gosudarst. Univ., učenyje Zapiski 148, Mat. 4, 192—203 (1951)]. A different generalization (which assumes the radical is finite dimensional and is annihilated by an ideal of finite codimension) includes results of Mal'cev (l. c.), Schafer (this Zbl. 46, 35) and Harish-Chandra (this Zbl. 36, 298) on associative, alternative and Lie algebras respectively. *P. M. Cohn.*

Tiago de Oliveira, J.: Demonstration élémentaire d'existence de modules et anneaux de caractéristique et cardinalité quelconques. Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A 5, 361—363 (1956).

Der Verf. bemerkt, daß wenn E eine unendliche Menge von vorgegebener Kardinalzahl und k eine natürliche Zahl ist, die direkte Summe M der Restklassenringe $J'_e = J/(k)$, wobei J der Ring der ganzen Zahlen ist und e die Indexmenge E durchläuft, ein Ring bzw. ein Modul der Kardinalzahl von E und der Charakteristik k ist. Unter den zu M isotopen Ringen bzw. Quasigruppen gibt es dann nach A. A. Albert, Ann. of Math., II. Ser. 43, 685—723 (1942) auch echt nicht assoziative.

E.-A. Behrens.

Leavitt, William G.: Two word rings. Proc. Amer. math. Soc. 7, 867—870 (1956).

L'A. a considéré dans un travail antérieur (ce Zbl. 66, 25) les propriétés suivantes pour un anneau R ayant un élément unité: (i) pour tout n , toute base du R -module à

gauche R^n a n éléments; (ii) pour tout n , toute famille libre d'éléments de R^n a au plus n éléments. Dans cette note, il donne: 1. un exemple d'anneau R satisfaisant (i) et (ii), mais qui n'est pas commutatif, admet des diviseurs de 0, et admet des suites infinies strictement croissantes et strictement décroissantes d'idéaux à droite; 2. un exemple d'anneau R vérifiant (i), mais qui ne peut être plongé dans un anneau satisfaisant à la condition minimale pour les idéaux à droite. *J. Dieudonné.*

Curtis, C. W.: On commuting rings of endomorphisms. *Canadian J. Math.* 8, 271—292 (1956).

Es seien \mathfrak{B} ein Ring mit 1-Element und \mathfrak{M}' bzw. \mathfrak{M} ein unitärer \mathfrak{B} -Links- bzw. -Rechtsmodul. Unter $\tau(m', m)$ soll eine nichtausgeartete bilineare Abbildung von $\mathfrak{M}' \times \mathfrak{M}$ in \mathfrak{B} verstanden werden. Dann stellt die Menge \mathfrak{b} aller endlichen Summen $\sum \tau(m'_i, m_i)$ ein zweiseitiges Ideal in \mathfrak{B} dar. Ist \mathfrak{E} der Ring aller \mathfrak{B} -Endomorphismen von \mathfrak{M} , dann enthält \mathfrak{E} das Rechtsideal $\mathfrak{M}' \circ \mathfrak{M}$ aller Endomorphismen $m' \circ m$, die folgendermaßen definiert sind: $x(m' \circ m) = m \tau(m', x)$, $x \in \mathfrak{M}$. Unter der Voraussetzung, daß \mathfrak{b} ein 1-Element besitzt, ist \mathfrak{B} der Zentralisator eines jeden Unterrings \mathfrak{E} von \mathfrak{E} , der $\mathfrak{M}' \circ \mathfrak{M}$ enthält. Ist \mathfrak{R} ein \mathfrak{E} -direkter Summand von \mathfrak{M} , dann ist $\tau(\mathfrak{M}', \mathfrak{R})$ ein Linksideal in \mathfrak{b} , und die Abbildung $\mathfrak{R} \rightarrow \tau(\mathfrak{M}', \mathfrak{R})$ ist eine eindeutige Zuordnung zwischen \mathfrak{E} -direkten Summanden von \mathfrak{M} und Linksidealen von \mathfrak{b} , die direkte Summanden von \mathfrak{b} sind. Die soweit angedeuteten Überlegungen werden vor allem auf projektive Darstellungen von endlichen Gruppen angewendet; als Spezialfall ergibt sich ein Resultat von H. Weyl (siehe dies. Zbl. 16, 393). *F. Kasch.*

Tiago de Oliveira, J.: Residuale von Systemen und Radikale von Ringen. *Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A* 5, 177—248 (1956) [Portugiesisch].

In the last years some attempts were made to extend the theory of the radical to general algebraic systems. Here, however, the theorem of representation of Wedderburn-Artin was lost... Thus we have developed a general theory of residuals in algebraic systems and a theory of radicals in rings for which we obtain a theorem of representation.

[From Author's summary.] *G. Ancochea.*

McCoy, Neal H.: The prime radical of a polynomial ring. *Publ. math., Debrecen* 4, 161—162 (1956).

Let R be an arbitrary ring and N be the radical of R defined as the intersection of all the prime ideals in R . The author proves that the radical N' of the ring $R[x]$ is equal to $N[x]$, where x is an indeterminate. This was proved independently by Amitsur (see the following review) in a different way. *Y. Kawada.*

Amitsur, S. A.: Radicals of polynomial rings. *Canadian J. Math.* 8, 355—361 (1956).

Soient A un anneau, $J(A)$ le radical de Jacobson de A . L'A. montre que $J(A[X]) = N[X]$, où N est un nilidéal de A ; la démonstration repose sur le fait que lorsque $J(A[X]) \neq 0$, alors $N = J(A[X]) \cap A$ est aussi $\neq 0$, lemme que l'A. démontre en utilisant le fait que $f(X) \rightarrow f(X + a)$ est un automorphisme de $A[X]$ pour tout $a \in A$, et en envisageant divers cas particuliers pour A [A de caractéristique 0 ou A de caractéristique p (nombre premier)], auxquels il ramène le cas général. On ignore en général si N est le nilidéal bilatère maximal de A , mais ce résultat est vrai en tout cas lorsque A vérifie une identité polynomiale ou lorsque A est une algèbre sur un corps non dénombrable. Pour les mêmes méthodes (et utilisant en outre sa théorie générale des radicaux (ce Zbl. 55, 26, 27)) l'A. montre aussi que si $L(A)$ désigne le radical inférieur de A , $L(A[X]) = L(A)[X]$; il peut aussi établir des résultats analogues pour d'autres types de radicaux. *J. Dieudonné.*

Rosenberg, Alex: The Cartan-Brauer-Hua theorem for matrix and local matrix rings. *Proc. Amer. math. Soc.* 7, 891—898 (1956).

Let A be a ring with unit 1 and A_n be the ring of $n \times n$ matrices over A with identity E . We use e_{ij} ($i \neq j$) to denote the matrix with 1 at (i, j) position and zero elsewhere. Let $M_{ij}(\lambda) = E + \lambda e_{ij}$, where $\lambda \in A$. A subset S of A_n is called invariant under transvection, if $M_{ij}(\lambda) P M_{ij}^{-1}(\lambda)$ belongs to S for every P of S and

for $i, j = 1, 2, \dots, n$ and for all $\lambda \in A$. The author proves that for $n \geq 3$, $S = [A_n, I_n] + D$, where I is a non-zero two sided ideal of A and D is an additive group of diagonal matrices $\sum \delta_i e_{ii}$ with $\delta_i \equiv \delta_j \pmod{I}$ and $\delta_i + I$ is in the center of $A - I$. The author proves a similar result for $n = 2$ with certain necessary restrictions. He also obtains a similar result concerning local matrix rings with certain restrictions.

L. K. Hua.

Yoshii, Tensho: Note on algebras of bounded representation type. Proc. Japan Acad. **32**, 441—445 (1956).

Es sei A eine assoziative Algebra mit Einselement über dem Körper k und N das Radikal von A . Mit $g(d)$ werde die Anzahl der inäquivalenten unzerlegbaren Darstellungen von A vom Grade d bezeichnet. Verf. nennt A eine Algebra von beschränktem Darstellungstypus, wenn die Grade der unzerlegbaren Darstellungen beschränkt sind; ferner heißt A eine Algebra von endlichem Darstellungstypus, wenn $\sum_d g(d)$ endlich ist. Nach einer Vermutung von R. Brauer und Thrall stimmen diese beiden Klassen von Algebren überein. Verf. beweist diese Vermutung für den Fall, daß $N^2 = 0$ und k algebraisch abgeschlossen ist. Der Beweis beruht auf Ergebnissen einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **70**, 31).

R. Kochendörffer.

Higman, Graham: On a conjecture of Nagata. Proc. Cambridge philos. Soc. **52**, 1—4 (1956).

Let A be an associative algebra, not necessarily of finite dimension, over a field of characteristic χ which satisfies the identical relation $x^n = 0$. M. Nagata (this Zbl. **49**, 24) proved that the relation $x_1 x_2 \cdots x_N = 0$ holds for some N depending only on n provided that χ is 0 or a prime p which is large enough compared with n . In this paper the author proves the theorem for $\chi = 0$ or $\chi = p$ ($p > n$). This condition $p > n$ is clearly the best possible one. Moreover, we can take $N = 2^n - 1$. It is also shown that we cannot take N as small as n^2/e^2 for large n .

Y. Kawada.

Patterson, E. M.: Linear algebras of genus zero. J. London math. Soc. **31**, 326—331 (1956).

Unter der Nullität einer n -dimensionalen linearen Algebra A versteht man die kleinste Anzahl von linear unabhängigen Elementen mit der Eigenschaft, daß sich jedes Element von A als Linearkombination von Produkten dieser „erzeugenden“ Elemente schreiben läßt. Das Geschlecht von A ist die Differenz zwischen Dimension und Nullität. Verf. bestimmt alle linearen Algebren mit der Dimension n und dem Geschlecht Null über einem Körper K . Er zeigt, daß für $n \geq 3$ oder $n = 2$ und $K \neq GF(2)$ die Basis e_i ($i = 1, 2, \dots, n$) von A so gewählt werden kann, daß die Multiplikation durch eine der folgenden drei „Multiplikationstafeln“ gegeben ist: (1) $e_i e_j = 0$, (2) $e_i e_j = \lambda e_i + \mu e_j$ (λ, μ in K , nicht beide Null), (3) $e_i e_j = \delta_{ij}^1 e_i + \delta_{ij}^2 e_j$ ($\delta_{ij}^k =$ Kroneckersymbol). Zwei in (2) zu verschiedenen Paaren λ, μ gehörende Algebren sind dann und nur dann isomorph, wenn das Verhältnis $\lambda:\mu$ für beide Paare gleich ist. Für $n = 2$ und $K = GF(2)$ kommen zu den obigen 3 Multiplikationstafeln noch 5 weitere hinzu.

E. Trost.

Zemmer, Joseph L.: Some remarks on p -rings and their Boolean geometry. Pacific J. Math. **6**, 193—208 (1956).

Verf. beweist zuerst den bekannten Satz (vgl. A. Foster, dies. Zbl. **44**, 262), daß jeder p -Ring (p Primzahl) stets durch einen Boole-Vektor-Ring darstellbar ist. Daraus folgt, daß die Gruppe der Automorphismen eines p -Ringes zu der Gruppe der Automorphismen der Booleschen Algebra seiner idempotenten Elemente isomorph ist. Eine Abbildung φ eines kommutativen Ringes \mathfrak{R} in eine Boolesche Algebra \mathfrak{B} heißt Boole-Bewertung von \mathfrak{R} , wenn gilt: 1. $\varphi(x) = 0$ dann und nur dann, wenn $x = 0$ ist, 2. $\varphi(xy) = \varphi(x) \cap \varphi(y)$, 3. $\varphi(x+y) \subseteq \varphi(x) \cup \varphi(y)$. Eine Abbildung d des cartesischen Produktes $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ einer abstrakten Menge \mathfrak{M} in eine Boolesche

Algebra \mathfrak{B} heißt eine Boole-Entfernung in \mathfrak{M} , wenn gilt: 1. $d(a, b) = d(b, a)$, 2. $d(a, b) = 0$ dann und nur dann, wenn $a = b$, 3. $d(a, b) \subseteq d(a, c) \cup d(c, b)$. Eine Boole-Bewertung φ eines Ringes \mathfrak{R} induziert in \mathfrak{R} eine Boole-Entfernung, nämlich: $d(a, b) = \varphi(b - a)$, d. h. erklärt \mathfrak{R} zu einem Boole-Raum. Verf. zeigt: ein p -Ring kann stets Boole-bewertet, also auch zu einem Boole-Raum erklärt werden. Es sei \mathfrak{R} ein p -Ring und \mathfrak{B} die Boolesche Algebra seiner idempotenten Elemente. Es bezeichne B_{p-1} die Gesamtheit aller $(p-1) \times (p-1)$ Matrizen mit Elementen aus \mathfrak{B} . Eine nicht singuläre Matrix $M = (a_{ij}) \in B_{p-1}$ mit $a_{is} a_{it} = 0$, $i, s, t = 1, 2, \dots, p-1$, $s \neq t$, heißt orthogonal, wenn $\varphi(xM) = \varphi(x)$ für jedes $x \in R$ gilt, hierbei ist φ die Boole-Bewertung von \mathfrak{R} mit Werten in \mathfrak{B} . Für eine Matrix $M = (a_{ij}) \in B_{p-1}$ mit $a_{is} a_{it} = 0$ sind folgende Aussagen äquivalent: 1. M ist orthogonal, 2. M ist nicht singulär, 3. die transponierte Matrix M' fällt mit der inversen Matrix M^{-1} zusammen. Eineindeutige Abbildungen eines Boole-Raumes \mathfrak{M} auf sich, die die Entfernung invariant lassen, heißen Bewegungen (Isometrien) in \mathfrak{M} . Zwei Teilmengen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} von \mathfrak{M} heißen kongruent, wenn es eine eineindeutige Abbildung von \mathfrak{A} auf \mathfrak{B} gibt, die die Entfernung invariant läßt. Kann diese Kongruenz zu einer Bewegung in \mathfrak{M} erweitert werden, so heißen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} superposable. Sind alle Paare von kongruenten Teilmengen eines Boole-Raumes \mathfrak{M} superposable, so sagt man, der Raum \mathfrak{M} hat die Eigenschaft der freien Mobilität. D. Ellis (dies. Zbl. 42, 27) hat gezeigt, daß der Boole-Raum eines Boolerings (2-Ringes) die Eigenschaft der freien Mobilität hat. Verf. zeigt nun, daß dies im allgemeinen für einen p -Ring mit $p > 2$ nicht der Fall ist. Ein p -Ring mit $p > 2$ hat dann und nur dann die Eigenschaft der freien Mobilität, wenn der Boolering seiner idempotenten Elemente vollständig ist. Der Begriff einer Zwischenrelation und einer Linearität in einem p -Ring \mathfrak{R} werden weiter von Verf. eingeführt (vgl. auch L. M. Blumenthal, Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser. 1, 1—18 (1952)) und zwei ungelöste Probleme erwähnt.

D. A. Kappos.

Samuel, Pierre: L'espace des idéaux d'un anneau local. Bol. Soc. mat. Mexicana, II. Ser. 1, 10—12 (1956).

Der Verf. metrisiert die Menge Φ der Ideale eines Stellenringes \mathfrak{o} mit dem maximalen Ideal \mathfrak{m} in folgender Weise: Für \mathfrak{a} und \mathfrak{b} aus Φ sei $|\mathfrak{a}, \mathfrak{b}| = 1/n$, wenn n die größte ganze Zahl mit $\mathfrak{a} + \mathfrak{m}^n = \mathfrak{b} + \mathfrak{m}^n$ ist, $|\mathfrak{a}, \mathfrak{a}| = 0$. Er zeigt: Φ ist separiert, Produkt- und Summenbildung sind gleichmäßig stetige Operationen. Die Dimension $d(\mathfrak{a})$ des Faktorrings $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$ ist eine oberhalb stetige Funktion. Ist \mathfrak{o} vollständig, so auch Φ .

H. Leptin.

Rédei, Ladislaus: Äquivalenz der Sätze von Kronecker-Hensel und von Szekeres für die Ideale des Polynomringes einer Unbestimmten über einem kommutativen Hauptidealring mit Primzerlegung. Acta Sci. math. 17, 198—202 (1956).

Soit R un anneau à idéaux principaux. Le théorème de G. Szekeres (ce Zbl. 47, 33) permet de trouver tous les idéaux distincts de $R[x]$ de la façon suivante: on considère un ensemble \mathcal{Q} de représentants des classes d'éléments associés différents de 0, avec $1 \in \mathcal{Q}$; on prend en outre pour tout $\varrho \in \mathcal{Q}$ un ensemble de représentants $\mathcal{Q}(\varrho)$ des classes de restes mod ϱ , avec $0 \in \mathcal{Q}(\varrho)$; on se donne alors un ensemble fini $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_m \in \mathcal{Q}$ ($m \geq 0$; $\varrho_m \neq 1$), et pour chaque ϱ_k , k éléments $\varrho_{ki} \in \mathcal{Q}(\varrho_k)$ ($i = 0, \dots, k-1$); on définit ensuite les polynômes $g_k(x)$ par les formules de récurrence suivantes:

$$g_0(x) = \varrho_1 \cdots \varrho_m; \quad \varrho_k g_k(x) = x g_{k-1}(x) + \sum_{i=0}^{k-1} \varrho_{ki} g_i(x) \quad (k = 1, \dots, m).$$

Aux différents ensembles ϱ_k et ϱ_{ki} ($i = 0, \dots, k-1$; $k = 1, \dots, m$) correspondent les différents idéaux $\mathfrak{a} = (g_0(x), \dots, g_m(x))$ de $R[x]$. L'A. démontre que ce théorème est équivalent à un théorème peu connu de Kronecker-Hensel ainsi formulé: on se donne les nombres entiers $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_r$ ($r \geq 0$), les éléments

$\sigma_1, \dots, \sigma_r \in \mathcal{R}$ et les polynômes $f_{kl}(x)$ ($1 \leq k \leq l \leq r$) de degrés inférieurs à $n_k - n_{k-1}$; on définit par récurrence les polynômes $F_k(x)$ par les formules:

$$\begin{aligned} F_0(x) &= \sigma_1 \cdots \sigma_r \\ \sigma_1 F_1(x) &= x^{n_1} + f_{11}(x) F_0(x) \\ \sigma_2 F_2(x) &= f_{12}(x) F_0(x) + (x^{n_2 - n_1} + f_{22}(x)) F_1(x) \\ &\vdots \\ \sigma_r F_r(x) &= f_{1r}(x) F_0(x) + f_{2r}(x) F_1(x) + \cdots + (x^{n_r - n_{r-1}} + f_{rr}(x)) F_{r-1}(x). \end{aligned}$$

Les idéaux $\alpha = (F_0(x), \dots, F_r(x))$ sont les différents idéaux de $R[x]$. La démonstration de Szekeres, qui est plus simple que celle de Kronecker-Hensel (Vorlesungen über Zahlentheorie, Leipzig 1901) permet donc au moyen de cette équivalence d'alléger la démonstration de Kronecker-Hensel.

L. Lesieur.

Rees, D.: A theorem of homological algebra. Proc. Cambridge philos. Soc. **52**, 605—610 (1956).

Let g_1, \dots, g_k be elements of a commutative ring A such that for $i = 1, \dots, k$, $(g_1, \dots, g_{i-1}) A : g_i = (g_1, \dots, g_{i-1}) A$. Further, let N be an A -module and let the g_i be such that $(g_1, \dots, g_{i-1}) N : g_i = (g_1, \dots, g_{i-1}) N$, $i = 1, \dots, k$. The author proves that for any A -module M such that $(g_1, \dots, g_k) M = 0$, $\text{Ext}_A^p(M, N) = 0$, $p < k$, and $\text{Ext}_A^p(M, N) \approx \text{Ext}_B^{p-k}(M, N/(g_1, \dots, g_k) N)$ if $p \geq k$, where B denotes $A/(g_1, \dots, g_k)$. A modification of the result, in which A is graded, is also proved. Applications are given in the theory of ideals of Noetherian rings. An ideal of such a ring A is said to be a general ideal of rank k if it has a basis g_1, \dots, g_k such that $(g_1, \dots, g_{i-1}) : g_i = (g_1, \dots, g_{i-1})$, $i = 1, \dots, k$. An ideal is of grade k if it contains a general ideal of rank k , but no such ideal of rank $> k$. It is proved that if g' is a general ideal of A of rank $e < k$ which is contained in an ideal α of grade k then there exists a general ideal g'' of rank k such that $\alpha \supset g'' \supset g'$; and that if g is a general ideal of rank k contained in α , then $(g:\alpha)/g = \text{Ext}_A^k(A/\alpha, A)$, i. e. depends only on α and not on g . Finally prime ideals which are minimal (or maximal) with respect to the property of being of grade k are characterised. *W. H. Cockcroft.*

MacLane, Saunders: Slide and torsion products for modules. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. **15**, 281—309 (1956).

A direct and advantageous definition of the Eilenberg-Cartan torsion products $\text{Tor}_n^A(A, C)$ is given in terms of generators and relations (cf. the definition of $\text{Tor}(A, C)$ in terms of generators and relation given by Eilenberg-MacLane, this Zbl. **55**, 417). A new product, called a slide product, of interest in itself, is first defined as follows. Let Ω denote a ring with a unit element. Let C and G be respectively right and left unitary Ω -modules. The n -fold slide product $\langle C, n\Omega, G \rangle$ is defined for any positive integer n to be the abelian group with generators all $(n+2)$ -tuples $\langle x_0, \dots, x_{n+1} \rangle$, $x_0 \in C$, $x_i \in \Omega$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $x_{n+1} \in G$, such that $x_i x_{i+1} = 0$, $i = 0, 1, \dots, n$, and relations

$$\langle x_0, \dots, x_i y, x_{i+1}, \dots, x_{n+1} \rangle = \langle x_0, \dots, x_i, y x_{i+1}, \dots, x_{n+1} \rangle, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad \text{and}$$

$$\langle x_0, \dots, x'_i + x''_i, \dots, x_{n+1} \rangle = \langle x_0, \dots, x'_i, \dots, x_{n+1} \rangle + \langle x_0, \dots, x''_i, \dots, x_{n+1} \rangle,$$

$i = 0, \dots, n+1$, where it is always supposed in these relations that both sides of the equality signs are defined. If in this definition n is formally taken as zero, and G is replaced by a left ideal L in Ω , then there is defined the short slide product $\langle C, L \rangle$. If every finitely generated left ideal in Ω is principal, then for every exact sequence $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ of right unitary Ω -modules, among other results on the short slide products there is proved to be an exact sequence

$$\langle A, L \rangle \rightarrow \langle B, L \rangle \rightarrow \langle C, L \rangle \rightarrow A/A \cdot L \rightarrow B/B \cdot L \rightarrow C/C \cdot L \rightarrow 0$$

($C \cdot L$ denotes the subgroup of C generated by all elements ct , $c \in C$, $t \in L$); in addition the sequence $0 \rightarrow \langle C, L \rangle \rightarrow C \otimes_{\Omega} L \rightarrow C \cdot L \rightarrow 0$ is exact. For the n -fold slide

products, given the further condition that every finitely generated left Ω -module is the direct sum of cyclic groups, there is an exact sequence $\dots \rightarrow \langle C, (n+1)\Omega, G \rangle \rightarrow \langle A, n\Omega, G \rangle \rightarrow \langle B, n\Omega, G \rangle \rightarrow \dots \rightarrow A \otimes_{\Omega} G \rightarrow B \otimes_{\Omega} G \rightarrow C \otimes_{\Omega} G \rightarrow 0$; replacing G by L , the same sequence, but now ending in $\dots \rightarrow \langle C, \Omega, L \rangle \rightarrow \langle A, L \rangle \rightarrow \langle B, L \rangle \rightarrow \langle C, L \rangle \rightarrow A/A \cdot L \rightarrow B/B \cdot L \rightarrow C/C \cdot L \rightarrow 0$, is also exact. Finally, for the main result, denote by X^{ω} the weak direct sum of a denumerably infinite number of copies of a module X , and by $A^{\omega, \omega}$ the ring of infinite matrices with entries from a ring A with a unit element, such that in any row or column of the matrices only a finite number of non-zero entries occur. Then if A and G denote respectively right and left unitary A -modules, $\langle A^{\omega, \omega}, n A^{\omega, \omega}, G^{\omega} \rangle$ is proved naturally isomorphic with $\text{Tor}_n^A(A, G)$. The result depends on the interesting fact that any finitely generated module over $A^{\omega, \omega}$ is cyclic. The author closes with several questions; in particular, for any ring A do there exist finite integers p (connected with the homological dimension of A ?) such that for every $q > p$ the natural injections $\langle A^p, A^{p \times p}, G^p \rangle \rightarrow \langle A^q, A^{q \times q}, G^q \rangle$ are isomorphisms, i. e. will $p \times p$ matrices suffice to define the torsion product? —

W. H. Cockcroft.

Weiss, Edwin: Boundedness in topological rings. Pacific J. Math. 6, 149—158 (1956).

In einem topologischen Ring R heißt eine Teilmenge S linksbeschränkt, wenn es zu jeder Nullumgebung U eine Nullumgebung V in R gibt mit $V \cdot S \subset U$, wobei $V \cdot S$ aus allen xy mit $x \in V$, $y \in S$ besteht. S heißt beschränkt, wenn es links- und rechtsbeschränkt ist. Jede kompakte Teilmenge von R ist beschränkt. Ein Element x eines topologischen Ringes R heißt topologisch rechtsquasiregulär (t. r. q. r.), wenn es zu jeder Nullumgebung U von R ein Element $y \in R$ gibt mit $x \circ y = x + xy + y \in U$. Ein Rechtsideal heißt t. r. q. r., wenn jedes seiner Elemente t. r. q. r. ist. Es gilt nun, daß in einem linksbeschränkten topologischen Ring R die Summe N aller t. r. q. r. Rechtsideale ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal ist, das nur aus t. r. q. r. Elementen besteht. N umfaßt das Jacobson'sche Radikal und fällt mit ihm zusammen, wenn R diskret oder kompakt ist. Ein Element x heißt topologisch nilpotent, wenn $x^n \rightarrow 0$. Ein Rechtsideal heißt topologisch nil, wenn jedes seiner Elemente topologisch nilpotent ist. In einem linksbeschränkten Ring R enthält N alle topologischen Nilrechtsideale. Gilt in dem linksbeschränkten Ring R die absteigende Kettenbedingung für abgeschlossene Rechtsideale, so ist N algebraisch nilpotent. In einem linksbeschränkten Ring umfaßt die Menge S aller t. r. q. r. Elemente dann und nur dann eine Nullumgebung, wenn S offen ist.

G. Köthe.

Zahlkörper. Funktionenkörper:

Carlitz, L.: Class number formulas for quadratic forms over $\text{GF}[q, x]$. Duke math. J. 23, 225—235 (1956).

Es sei $Au^2 + 2Buv + Cv^2$, wobei A, B und C Polynome von x mit Koeffizienten aus $\text{GF}(q)$ ($q = p^2$, $p > 2$) sind, eine quadratische Form mit der Diskriminante $\Delta = B^2 - AC$. In bezug auf die linearen Transformationen

$$u' = E_{11}u + E_{12}v, \quad v' = E_{21}u + E_{22}v,$$

wobei E_{ij} auch Polynome von x mit Koeffizienten aus $\text{GF}(q)$ sind und $\det(E_{ij}) = 1$ ist, gibt es eine endliche Anzahl $h(\Delta)$ von Formenklassen mit der Diskriminante Δ . Wenn Δ kein Quadrat ist, so gibt es in der Tat in jeder Klasse mindestens eine reduzierte Form derart, daß $|B| < |A| \leq |C|$ ist ($|P| = q^{\alpha}$, wenn α der Grad von P ist). Ferner heiße eine Form definit, wenn sie entweder von ungeradem Grad ist oder von geradem Grad und der höchste Koeffizient von Δ kein Quadrat ist. Falls man für eine definite Form mit der Diskriminante Δ $\tau(\Delta) = \frac{1}{2}(q-1)h'(\Delta)$ schreibt, so ist $h'(\Delta)$ eine modifizierte Klassenzahl, welche gleich $h(\Delta)$ ist, wenn Δ von ungeradem Grad ist. In dieser Arbeit leitet Verf. mittels der „singular series“

mehrere Relationen bezüglich $\tau(\Delta)$, $h'(\Delta)$ und $h(\Delta)$ her, welche frühere Resultate von Byers (dies. Zbl. 57, 41) und Artin [Math. Z. 19, 207—246 (1924)] in sich enthalten.

Z. Suetuna.

Snapper, E.: Higher-dimensional field theory. I. The integral closure of a module. II. Linear Systems. III. Normalization. Compositio math. 13, 1—15, 16—38, 39—46 (1956).

Verf. setzt sich als Ziel, die Theorie der linearen Scharen „rein algebraisch“, ohne Bezugnahme auf die algebraische Geometrie, zu entwickeln. Dabei bedeutet „rein algebraisch“, daß die Formulierung und Beweise der Sätze im Stile der modernen Algebra zu erfolgen hat; es wird also von Körpern, Ringen, Moduln usw. gesprochen, und nicht, wie in der algebraischen Geometrie üblich, von Mannigfaltigkeiten, Koordinaten, allgemeinen Punkten, usw. Dadurch wird nach den Worten des Verf. die Bedeutung der betr. Sätze für die abstrakte Algebra, insbesondere für die Theorie der Körpererweiterungen, erst richtig herausgearbeitet. — Es sei k ein Körper, und K ein endlich-erzeugbarer Erweiterungskörper von k . Verf. betrachtet endlich-erzeugbare k -Teilmoduln M von K (kurz: Moduln). Die Vorgabe eines Moduls $M \neq 0$ ist gleichbedeutend mit der Vorgabe eines affinen Modells V eines Teilkörpers von K (nämlich des durch M erzeugten Körpers $k(M)$); und zwar ergeben sich die Koordinaten eines allgemeinen Punktes von V/k als die Elemente eines k -Erzeugendensystems von M . Entsprechend ist die Vorgabe endlich vieler Moduln $M_1, \dots, M_n \neq 0$ gleichbedeutend mit der Vorgabe einer algebraischen Korrespondenz zwischen affinen Mannigfaltigkeiten V_1, \dots, V_n ; der Graph V dieser Korrespondenz entspricht dem Produktmodul $M = M_1 \cdots M_n$. Betrachtet man gleichzeitig mit einem Modul $M \neq 0$ seine proportionalen Moduln $z M$ (mit $z \neq 0$ aus K), so entspricht das der Betrachtung eines projektiven Modells eines Teilkörpers von K , und zwar des von $a^{-1} M$ erzeugten Körpers $k(a^{-1} M)$, wo a ein Element $\neq 0$ aus M ist, auf dessen Wahl es nicht ankommt. Verf. spricht dann von einer projektiven Klasse C von Moduln, beschränkt sich jedoch bei der Betrachtung von C auf solche Moduln, welche k enthalten, d. h. auf die Moduln $a^{-1} M$ mit $a \neq 0$ aus M . Es wird $k(C) = k(a^{-1} M)$ gesetzt; der Transzendenzgrad $\text{Tr}(k(C)/k)$ heißt die Dimension von C . — Grundlegend für die vorliegende Arbeit ist der Begriff der ganzabgeschlossenen Hülle $I(M)$ eines Moduls M . Sie besteht aus genau denjenigen Elementen $z \in K$, welche einer Gleichung der Form $z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$ mit $a_i \in M^i$ genügen; gleichbedeutend damit ist die Existenz eines endlichdimensionalen Moduls L derart, daß $z L \subset L M$. Daß $I(M)$ wirklich ein endlichdimensionaler k -Teilmodul von K ist, wurde vom Verf. in einer später erschienenen Arbeit bewiesen [Princeton math. Series 12, 167—176 (1957)]. Bewertungstheoretisch läßt sich $I(M)$ folgendermaßen charakterisieren: Sei w eine Bewertung von K im Krullschen Sinne. Man bilde $w(M) = \min w(a)$ für $a \in M$; dies ist wegen der k -Endlichkeit von M ein wohlbestimmtes Element aus der Wertgruppe von w . Die Elemente $z \in I(M)$ können nun durch die Ungleichungen $w(z) \geq w(M)$ für alle Bewertungen w von K/k charakterisiert werden. Hierbei genügt es sogar, statt aller Bewertungen von K/k nur die sogenannten „Primdivisoren 1. Art“ der durch M bestimmten projektiven Klasse $C(M)$ zu betrachten; diese sind folgendermaßen definiert: Eine Bewertung w von K/k heißt „Primdivisor“, wenn $\text{Tr}(K/k) = 1 + \text{Tr}(K\pi/k)$, wobei π die zu w gehörige Restabbildung und also $K\pi$ der zugehörige Restkörper ist. Ist nun C eine projektive Klasse von K , so bestimmt C eindeutig eine projektive Klasse $C\pi$ von $K\pi$, bestehend aus den Moduln $M\pi$, wobei $M \in C$ derart, daß $w(M) = 0$ (solche Moduln M gibt es in C stets). Ein Primdivisor w von K/k heißt nun „von 1. Art“ bezüglich C , wenn $\dim(C) = 1 + \dim(C\pi)$. — Außer der genannten bewertungstheoretischen Charakterisierung von $I(M)$ gibt Verf. noch zwei weitere, ringtheoretische Charakterisierungen von $I(M)$ an (S. 4 und S. 12). — Es sei nun eine projektive Klasse C von K vor-

gegeben; für das Folgende wird vorausgesetzt, daß C die Dimension $\text{Tr}(K/k)$ besitzt [in jedem Falle ist definitionsgemäß $\dim(C) \leq \text{Tr}(K/k)$, und das $=$ Zeichen bedeutet hier, daß K algebraisch über $k(C)$ ist]. Die von den Primdivisoren 1. Art von C erzeugt freie abelsche (additiv geschriebene) Gruppe \mathfrak{G} wird die Zyklen-Gruppe von C genannt (in Anlehnung an die algebraische Geometrie; in multiplikativer Schreibweise würde man von der Divisorengruppe sprechen). Jedem Modul M von K wird ein Zyklus $G(M)$ zugeordnet, dessen Vielfachheiten gerade die Zahlen $w(M)$ sind. Falls $M = kz$ eindimensional ist, so ist $G(kz) = G(z)$ derjenige Zyklus, der die Pole und Nullstellen von z in der richtigen Vielfachheit angibt. Umgekehrt gehört zu jedem Zyklus G ein Modul $L(G)$, bestehend aus allen $z \in K$ mit $G(z) \geq G$. Daß $L(G)$ wirklich endlich-erzeugbar ist über k , ist im wesentlichen eine Folge der oben erwähnten endlichen Erzeugbarkeit der ganzabgeschlossenen Hülle $I(M)$ eines Moduls M . Man hat nur nachzuweisen, daß es zu vorgegebenem G einen Modul M gibt derart, daß $L(G) \subset I(M)$, d. h. $G(M) \leq G$. — Ist $G \geq 0$, so ist die Vereinigungsmenge aller $L(-nG)$ für $n \geq 0$ ein Ring $R[G]$; man vermutet, daß dieser Ring endlich-erzeugbar ist über k . Diese Vermutung ist gleichbedeutend mit dem 14. Hilbertschen Problem (vgl. Zariski, dies. Zbl. 56, 396). Verf. zeigt hier, daß $R[G]$ sicher dann endlich erzeugbar ist, wenn es einen Teilmodul $M \subset L(-G)$ gibt derart, daß $L(-nG) = I(M^n)$ für alle $n \geq 0$. In diesem Falle ist die k -Dimension von $L(-nG)$ als Funktion von n ein rationalzahliges Polynom $f_G(n)$ für alle hinreichend großen n ; schreibt man $f_G(x) = a_0 \binom{x}{d} + a_1 \binom{x}{d-1} + \cdots + a_d$, so sind die hierbei auftretenden Koeffizienten a_i ganzrational und der höchste Koeffizient a_0 positiv; ferner ist der Grad d von $f_G(x)$ gleich der oben definierten Dimension der durch M definierten projektiven Klasse $C(M)$ von K . Die linearen Scharen werden nun folgendermaßen definiert: Eine Menge von positiven Zyklen aus \mathfrak{G} heißt „lineare Schar“ bezüglich C , wenn es einen Modul M und einen Zyklus $G \in \mathfrak{G}$ gibt derart, daß unsere Menge identisch ist mit der Menge der Zyklen von der Form $G(a) + G$, wo $a \neq 0$ aus M . (Dann ist notwendig $G(M) \geq -G$.) Eine durch M und G im angegebenen Sinne definierte lineare Schar werde mit $\mathfrak{L}(M; G)$ bezeichnet. Die Dimension von $\mathfrak{L}(M; G)$ wird definiert als $\dim_k M - 1$; damit jedoch diese Definition sinnvoll ist, hat man vorauszusetzen, daß k in K algebraisch abgeschlossen ist. Eine lineare Schar heißt eine Vollschar, wenn sie nicht in eine größere Schar eingebettet werden kann. Die Tatsache, daß jede lineare Schar in eine Vollschar eingebettet werden kann, ist im wesentlichen gleichbedeutend mit der oben erwähnten Tatsache, daß $L(G)$ endlich ist. — Im Hinblick auf das obige Resultat über $R[G]$ ist es wichtig zu wissen, wann für eine lineare Schar $\mathfrak{L}(M; G)$ gilt: $L(-nG) = I(M^n)$ für alle $n \geq 0$. Verf. zeigt, daß das sicher dann der Fall ist, wenn (1) $\mathfrak{L}(M; G)$ keinen festen Bestandteil hat, d. h. $G = -G(M)$, und wenn (2) jeder Primdivisor 1. Art von $C(M)$ gleichzeitig ein Primdivisor 1. Art von C selbst ist, falls $\dim C(M) > 0$. Ein anderes hinreichendes Kriterium ist, daß $\mathfrak{L}(M; G)$ keine „festen Punkte“ im Sinne der algebraischen Geometrie haben darf. (Zur Theorie der linearen Scharen vgl. auch Zariski, dies. Zbl. 47, 148.) — Eine projektive Klasse C von Moduln wird „lokal normal“ genannt, wenn für jedes $M \in C$ der von M erzeugte Ring $k[M]$ ganzabgeschlossen ist in K . Ist C beliebig, so kann man stets in kanonischer Weise eine lokal-normale Klasse folgendermaßen konstruieren: Man bilde für $n \geq 0$ die Klasse C^n , welche bestimmt wird durch M^n , wo M ein Modul aus C ist, auf den es nicht ankommt. Ferner sei $I(C^n)$ die Klasse von $I(M^n)$. Dann ist $I(C^n)$ für hinreichend großes n lokal normal. Der Übergang von C zu $I(C^n)$ entspricht dem aus der algebraischen Geometrie bekannten „Normalisierungsprozeß“. Die lokal normalen Klassen C können dadurch charakterisiert werden, daß $M^n = I(M^n)$ für hinreichend große n und alle $M \in C$. Falls dies für alle $n \geq 1$ gilt, so wird C „arithmetisch normal“ genannt. Ist C beliebig, so ist $I(C^n)$ für hinreichend großes n sogar arith-

metisch normal. — Entsprechende Ergebnisse werden nicht nur für eine Klasse C formuliert, sondern auch für den Fall, daß endlich viele Klassen C_1, \dots, C_n vorgegeben sind.
P. Roquette.

Zahlentheorie:

- **Ostmann, H.-H.: Additive Zahlentheorie. 1.: Allgemeine Untersuchungen.** (Ergebn. d. Math. u. ihrer Grenzgeb. 7. Heft). Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1956. 240 S. 1 Abb. DM 29,80.
- **Ostmann, H.-H.: Additive Zahlentheorie. 2.: Spezielle Zahlenmengen.** (Ergebn. d. Math. u. ihrer Grenzgeb. 11. Heft). Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1956. 114 S. DM 22,—.

Seit Schnirelmann im Jahre 1930 seinen Dichtebegriff einführte, hat sich in Zusammenhang hiermit ein neuer Zweig der additiven Zahlentheorie entwickelt. Innerhalb dieses neuen Gebiets ist in den verlaufenen Jahren ein reichhaltiges Schrifttum emporgeschossen, dessen Umfang schon lange eine Gesamtdarstellung wünschenswert machte. — Das vorliegende, zweibändige Werk ist der erste Versuch, diesem Mangel abzuweichen. Der Verf. hat sich nicht damit begnügt, nur denjenigen Zweig der additiven Zahlentheorie, der aus dem Schnirelmannschen Dichtebegriff entstanden ist, zu behandeln, sondern versucht vielmehr alles, was auf den additiven Eigenschaften der Zahlenmengen baut, zusammenzufassen. Er hat auch nicht versucht, einen Unterschied zu machen zwischen wesentlichen und unwesentlichen Ergebnissen, sondern hat es als seine Aufgabe gesehen, dem Leser eine Übersicht über das ganze, einschlägige Schrifttum zu geben. Das Werk enthält deshalb ein vollständiges und sehr wertvolles Literaturverzeichnis. Der erste Band gibt die allgemeine Theorie, während im zweiten Band besondere Zahlenmengen, wie z. B. die Primzahlen, die quadratfreien Zahlen usw., behandelt werden. Der erste Band beginnt mit einer ziemlich abstrakten, mengentheoretischen Einführung des Summenbegriffs. In einem späteren Abschnitt, der ganz isoliert dasteht, werden die Partitionsprobleme erörtert. Hier wird auch eine kurzgefaßte Darstellung von Rademachers Beweis für die Darstellung von $p(n)$ in einer schnell konvergierenden Reihe gegeben. Weiter folgt eine längere Besprechung der verschiedenen Dichtebegriffe, wo u. a. die sogenannte Störche φ -Dichte ausführlich erörtert wird. Dem zentralen Gegenstand der Dichtetheorie, der $(\alpha + \beta)$ -Hypothese, die von Mann endlich gelöst wurde, ist auch gebührende Aufmerksamkeit gewidmet. Des weiteren kann erwähnt werden, daß Basen endlicher Ordnung, Minimalbasen und wesentliche Komponenten erschöpfend behandelt sind.

S. Selberg.

- **Specht, Wilhelm: Elementare Beweise der Primzahlsätze.** (Hochschulbücher für Mathematik. Bd. 30.) Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1956. 78 S. Brosch. DM 6,40.

Verf. gibt eine ausführliche Darstellung des „elementaren“, d. h. von komplexer Funktionentheorie freien Beweises des Primzahlsatzes sowie seiner Verallgemeinerung auf die arithmetische Progression, d. h. die Formel $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(k, l; x) \log x}{x} = \frac{1}{\varphi(k)}$. Die Darstellung geht in allen wesentlichen Punkten auf die grundlegenden Arbeiten von A. Selberg und P. Erdős zurück. Daneben werden auch Gedanken von H. N. Shapiro und E. Landau verwendet. Alle spezielleren Hilfsmittel, insbesondere diejenigen aus der Charakterentheorie, werden zur Bequemlichkeit des Lesers entwickelt.

E. Trost.

- Thébault, Victor: Questions d'arithmétique.** Mathesis 65, Suppl. à No. 10, 1—17 (1956).

Cette note est consacrée à quelques problèmes relatifs à des carrés parfaits, pour lesquels interviennent des nombres curieux, comme 142857 qui représente la période de la fraction $1/7$ et dont les propriétés sont répandues partout.

Zusammenfassg. des Autors.

Xeroudakes, G.: The diophantine system $\sum_{i=1}^3 A_i^n = \sum_{i=1}^3 B_i^n$ ($n = 1, 3$). Applications and significant conclusions. Bull. Soc. math. Grèce 30, 1—46, engl. Zusammenfassg. 46 (1956) [Griechisch].

Dans ce travail, suite d'un autre (C. r. de l'Acad. de Belgrade première séance de l'automne 1953) l'A. résout complètement le prédit système diophantien et examine ce système sous les conditions suivantes: a) $A_1 = A_2$, b) $A_1 = A_2$, $B_1 - B_2 = B_2 - B_3$, c) $A_1 = A_2 = A_3$, d) $A_3 = B_1 + B_2$, $B_3 = A_1 + A_2$, e) $A_1 - A_2 = A_2 - A_3$, $B_1 - B_2 = v(A_1 - A_2)$, f) $A_3 = 0$, $B_1 = A_1 - A_2$, j) $A_3 = 0$, $B_1 - B_2 = v(A_1 - A_2)$. Le système ci-dessus est un cas particulier du:

$$\sum_{i=1}^r A_i^n = \sum_{i=1}^r B_i^n \quad (n = 1, 2, \dots, r)$$

sur lequel il y a quelques travaux de Moessner, Swinerton-Dyer, L. Raffaele e. c. qui sont mentionnés dans la bibliographie de ce travail. C. G. Legatos.

Manin, Ju. I.: Über Gleichungen dritten Grades nach einem Primzahlmodul. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 20, 672—678 (1956) [Russisch].

Let p be a prime > 3 , and $4a^3 - 27b^2 \not\equiv 0 \pmod{p}$. Let N_p be the number of solutions of the congruence $y^2 = x^3 + ax + b \pmod{p}$. It was proved by Hasse (this Zbl. 14, 149, 249) that $|N_p - p| \leq 2\sqrt{p}$. The author gives a new proof of this inequality. The proof is elementary, though its main idea is based on that of Hasse.

L. K. Hua.

Corson H. H.: On some special systems of equations. Pacific J. Math. 6, 449—452 (1956).

Let $GF(q)$ be a finite field of q elements. The author considers the system of equations of the form

$$x_1^{k_1} = f(x_3, \dots, x_n), \quad x_2^{k_2} = g(x_3, \dots, x_n).$$

In case f and g are homogeneous polynomials of degrees m_1 and m_2 , $(m_1, k_1) = (m_2, k_2) = 1$, then the total number of solutions is q^{n-2} .

L. K. Hua.

Lochmüller, Hans-Jürgen: Identische Kongruenzen für Polynome nach zusammengesetzten Moduln. Math. Nachr. 15, 141—154 (1956).

Es bezeichne $m (> 1)$ eine natürliche Zahl, \mathfrak{G} die Gruppe der primen Restklassen mod m , \mathfrak{U} eine Untergruppe von \mathfrak{G} . Um eine bequeme Ausdrucksweise für die folgenden Tatsachen zu sichern, setze man (mit anderer Bezeichnung als die vom Verf.) $f(x, \mathfrak{U}) = \prod_a (x - a)$, wobei a ein Repräsentantensystem der in \mathfrak{U} enthaltenen Restklassen durchläuft. Da $f(x, \mathfrak{U})$ nur mod m bestimmt ist, so läßt sich das Problem nach einer möglichst einfachen und invarianten Bestimmung der Restklasse $f(x, \mathfrak{U}) \pmod{m}$ aufwerfen. In der Hauptsache beschäftigt sich Verf. mit diesem Problem und löst es allgemein. Zur Problemstellung gaben ihm der Tatbestand Anlaß, daß das Problem in den folgenden zwei extremen Spezialfällen gelöst ist: 1. $m = p$ ($=$ Primzahl) und \mathfrak{U} beliebig; 2. $\mathfrak{U} = \mathfrak{G}$ und m beliebig. Und zwar, da \mathfrak{G} für $m = p$ zyklisch ist, so gilt im Fall 1. trivial $f(x, \mathfrak{U}) \equiv x^{O(\mathfrak{U})} - 1 \pmod{p}$, wobei O die Ordnung von endlichen Gruppen bezeichnet. [Insbesondere für $\mathfrak{U} = \mathfrak{G}$ handelt es sich hierbei um den Satz von Lagrange $(x-1)(x-2) \cdots (x-p+1) \equiv x^{p-1} - 1 \pmod{p}$.] Im Fall 2. wird die Lösung durch den Satz von M. Bauer [Nouv. Ann. Math., IV. Sér. 2, 256—264 (1902)] geliefert, nach dem dann für jeden maximalen Primzahlpotenzfaktor von n die Kongruenz $f(x, \mathfrak{U}) \equiv (x^{\sigma(p-1)} - 1)^{O(\mathfrak{G})/\sigma(p-1)} \pmod{p^\mu}$ gilt, wobei $\sigma = 2$ für $p = 2 < m$ und $\sigma = 1$ sonst ist. (Hierbei ist $O(\mathfrak{G}) = \varphi(m)$ die Eulersche Funktion.) Bezüglich des allgemeinen Problems betrachtet Verf. zunächst den Fall einer beliebigen Primzahlpotenz $m = p^\mu (> 1)$. Ist dabei $p \neq 2$, so ist \mathfrak{U} (zyklisch und daher) eindeutig durch $O(\mathfrak{U})$ bestimmt. Für diesen Fall besagt Satz 4:

$$f(x, \mathfrak{U}) \equiv (x^{p-1, O(\mathfrak{U})} - 1)^{O(\mathfrak{U})/(p-1, O(\mathfrak{U}))} \pmod{p^\mu}.$$

Im Fall $m = 2^\mu$ werde (unter Beseitigung der trivialen Fälle $\mu = 1, 2$) nur $\mu \geq 3$ betrachtet. Man hat drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem \mathfrak{U} zyklisch ist und die in \mathfrak{U} enthaltenen Restklassen aus lauter Zahlen $\equiv 1 \pmod{4}$ bestehen oder \mathfrak{U} zyklisch ist und die Hälfte der in \mathfrak{U} enthaltenen Restklassen aus Zahlen $\equiv -1 \pmod{4}$ bestehen oder \mathfrak{U} nicht zyklisch ist. Entsprechend lauten die Sätze 5, 6, 7:

$$f(x, \mathfrak{U}) \equiv (x-1)^{O(\mathfrak{U})} + 2^{\mu-1} (x^{O(\mathfrak{U})} - 1)/(x-1) \text{ bzw.} \\ (x^2 - 1)^{O(\mathfrak{U})/2} + 2^{\mu-1} x^{O(\mathfrak{U})}/(x-1) \text{ bzw. } (x^2 - 1)^{O(\mathfrak{U})/2} \pmod{2^\mu}.$$

Der allgemeinste Fall eines beliebigen m läßt sich auf die vorigen zurückführen, auch diese recht triviale Reduktion wird ausgeführt. Es folgen noch Verallgemeinerungen, bezüglich deren auf die Arbeit hingewiesen werde. Berichtigung: im Satz 6 soll „ $\mu - 1$ “ statt „ $\mu + 1$ “ stehen.

L. Rédei.

Carlitz, L.: Solvability of certain equations in a finite field. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 7, 3–4 (1956).

Es sei K der endliche Körper von der Ordnung $q = p^n$ (p Primzahl) und $k|p-1$. Ein Satz von St. Schwarz (dies. Zbl. 31, 109) besagt, daß in K jede Gleichung $a_1 x_1^k + \dots + a_k x_k^k = a$ ($a_1, \dots, a_k \neq 0$) lösbar ist. Mit einem ähnlichen, leichteren Verfahren wird bewiesen, daß der Satz gültig bleibt, wenn man ein Polynom $g(x_1, \dots, x_k)$ vom Grad $< k$ über K statt a nimmt. Insbesondere folgt, daß in K jede Gleichung $f_1(x_1) + \dots + f_k(x_k) = 0$ lösbar ist, in der die $f_i(x_i)$ Polynome vom Grad k über K sind. Ferner wird bewiesen: Sind $f(x_1, \dots, x_k)$ und $g(x_1, \dots, x_k)$ Polynome über K , von denen das erste homogen und vom Grad k , das zweite vom Grad $< k$ ist, gilt ferner $\sum_{x_1, \dots, x_k \in K} f^{q-1}(x_1, \dots, x_k) \neq 0$, so ist $f(x_1, \dots, x_k) - g(x_1, \dots, x_k) = 0$ in K lösbar.

L. Rédei.

Carlitz, Leonard: Arithmetic properties of elliptic functions. Math. Z. 64, 425–434 (1956).

Es werden die Bezeichnungen aus des Verf. früherer Arbeit (dies. Zbl. 50, 39) verwendet. Unter Heranziehung von Fourier-Entwicklungen entstehen neue Kongruenzbeziehungen. Z. B. ist

$$\beta_{2m}(u) + \left(\frac{1}{p} - 1 + \frac{2m}{p}((p-1)! + 1)\right) A_p^{2m/(p-1)}(u) \equiv 0 \pmod{p^{r+1}},$$

wobei p eine ungerade Primzahl bezeichnet und m, r natürliche Zahlen sind, für die $p^r(p-1)|2m$ ist. Es folgt $\beta_{2m}(u) + \left(\frac{1}{p} - 1\right) A_p^{2m/(p-1)}(u) \equiv 0 \pmod{p^r}$, eine Eigenschaft, wie sie ähnlich die Bernoullischen Zahlen aufweisen.

L. Rédei.

Ankeny, N. C.: The law of quadratic reciprocity. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 28, 145–149 (1956).

Ein das Lemma von Gauß nicht benutzender, elementarer, aber mit vielen Rechnungen verbundener Beweis des quadratischen Reziprozitätssatzes, der von komplexen Einheitswurzeln ausgiebig Gebrauch macht und von den bisherigen Beweisen stark verschieden ist.

L. Rédei.

Shao, Pin-Tsung: On the distribution of the values of a class of arithmetical functions. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 4, 569–572 (1956).

Vorläufige Mitteilung einiger Resultate über gewisse arithmetische Funktionen, deren mit Hilfe der Brunschen Siebmethode erhaltenen Beweise später veröffentlicht werden sollen. Diese Resultate sind Verallgemeinerungen früherer mit elementaren Methoden erhaltenen Resultate von W. Sierpiński, A. Schinzel und Y. Wang über die Funktionen $\varphi(n)$, $\sigma(n)$ und $\tau(n)$ (dies. Zbl. 56, 270, 65, 271 und 70, 42).

B. Stolt.

Lehmer, D. H.: On certain character matrices. Pacific J. Math. 6, 491–499 (1956).

The author considers special matrices of order $p-1$ (p being an odd prime) of which the elements involve Legendre's symbol $\chi(n)$ on quadratic residues modulo p .

It is proved: 1. The characteristic roots of the matrix M with elements $a + b\chi(i) + c\chi(j) + d\chi(ij)$ ($i, j = 1, \dots, p-1$) are $(p-1)\varrho_1, (p-1)\varrho_2, 0, \dots, 0$, where ϱ_1 and ϱ_2 satisfy $\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$. 2. Those of the matrix N composed by $c + \chi(\alpha + i + j)$ ($i, j = 1, \dots, p-1$) (α being an integer), consist of $p^{1/2}$ and $-p^{1/2}$ each occurring with multiplicities $\frac{1}{2}(p-3)$ and the roots of $\lambda^2 - [c(p-1) - \chi(\alpha)]\lambda - cp\chi(\alpha) - 1 = 0$. — Moreover explicit formulas are derived for the elements of M^k and recurrent formulas for those of N^k ($k = 1, 2, \dots$). These formulas give the trace of M^k and N^k and so the sum of the k^{th} powers of the characteristic roots. Comparing these values with those which are indicated above, completes the proof. In addition the elements of M^{-1} and N^{-1} , when M and N are nonsingular, are deduced.

W. Verdenius.

Leech, John: Of the representation of 1, 2, ..., n by differences. J. London math. Soc. 31, 160—169 (1956).

Ref. und A. Rényi (dies. Zbl. 34, 171) haben eine Menge von ganzen Zahlen a_1, \dots, a_k eine Differenzbasis für n genannt, wenn unter den $a_i - a_j$ alle Zahlen $0, 1, \dots, n$ vorkommen. Sie haben für das Minimum $k(n)$ von k bewiesen, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^2(n)}{n}$ (a) existiert, (b) gleich $\inf \frac{k^2(n)}{n}$ ist, (c) im Intervall $2,424 \dots$ ($= 2 + 4/3\pi$) $\leq x \leq 8/3 = 2,666 \dots$ liegt. Im von A. Brauer (Zbl. 60, 98, 2. Referat) schon früher betrachteten Fall $0 = a_1 < \dots < a_l = n$ spricht Verf. von einer eingeschränkten Differenzbasis (für n). P. Erdős und J. Gál (dies. Zbl. 32, 13) bewiesen für das Minimum $l(n) (\geq k(n))$ von l die ähnlichen Eigenschaften (a), (b), (c), jedoch wird in ihrem Beweis nach Verf.s Bemerkung an einigen Stellen die unerlaubte Ersetzung $n \rightarrow n+1$ gemacht. Verf. verbessert (c) (für „allgemeine“ Differenzbasen), indem er zeigt, daß das engere Intervall $2,434 \dots = \max_{\theta > 0} 2(1 - \theta^{-1} \sin \theta) \leq x \leq 2,6646 \dots$ zulässig ist. Die

linke Seite entnimmt er leicht der angeführten Arbeit von Ref. und Rényi. Für die eingeschränkten Differenzbasen beweist er, daß $l^2(n)/n$ (a') existiert, (b') gleich $\inf [(l(n) + 2)^2/(n+1)]$ ($\lambda \geq 2$), (c') im Intervall $2,434 \dots \leq x \leq \frac{375}{112} = 3,348 \dots$ liegt. [Die linke Seite folgt aus (c).] Verf. erwägt noch die Möglichkeiten des Bestehens von (b') für kleinere λ und stellt eine Tabelle von Differenzbasen für gewisse $n \leq 45$ zusammen, wobei nämlich für $k, l = 1, \dots, 11$ jedesmal nur das maximale n mit $k(n) = k$ bzw. $l(n) = l$ beachtet wurde. Eine Berichtigung: auf S. 161 unten ist das Glied $m n$ zu streichen.

L. Rédei.

Vosper, A. G.: The critical pairs of subsets of a group of prime order. J. London math. Soc. 31, 200—205 (1956); Addendum. Ibid. 31, 280—282 (1956).

G sei eine additive Gruppe von Primzahlordnung p , A und B zwei nichtleere Teilmengen von G mit $|A|$ bzw. $|B|$ Elementen und $A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$. Dann gilt (1) $A + B = G$ falls $|A| + |B| > p$ ist, (2) $|A + B| \geq |A| + |B| - 1$ falls $|A| + |B| \leq p$ ist. [A. Cauchy, J. Écol. Polytechn. 9, 99—116 (1813).] Verf. zeigt, daß in (2) dann und nur dann das Gleichheitszeichen steht, wenn (a) A oder B nur ein Element enthält, oder (b) das Komplement von A gleich $c - B$ mit einem $c \in G$ ist, oder (c) $A = \{a + kd | k = 0, 1, \dots, |A| - 1\}$, $B = \{b + kd | k = 0, 1, \dots, |B| - 1\}$ mit geeigneten $a, b, d \in G$ ist.

M. Kneser.

Cohen, Eckford: The finite Goldbach problem in algebraic number fields. Proc. Amer. math. Soc. 7, 500—506 (1956).

In einer früheren Arbeit (s. dies. Zbl. 55, 274) hatte Verf. die Goldbachsche Problemstellung auf den Restklassenring mod m bezüglich des Ringes der ganzen rationalen Zahlen übertragen und war zu einer vollständigen Klärung gelangt. In der vorliegenden Arbeit führt Verf. die Verallgemeinerung auf Restklassenringe mod A vollständig durch, wobei A ein eigentliches (d. h. von (0) und (1) verschiedenes) Ideal eines algebraischen Zahlkörpers endlichen Grades über dem Körper der rationalen Zahlen ist.

H. Ostmann.

Delange, Hubert: Sur un théorème d'Erdős et Kac. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **42**, 130—144 (1956).

Verf. gibt einen neuen Beweis des folgenden von Halberstam (dies. Zbl. **64**, 42) stammenden Satzes [aus dem ein bekanntes Resultat von Erdős-Kac (dies. Zbl. **24**, 102) folgt]: Sei $f(n)$ eine stark additive Funktion, d. h. $f(nm) = f(n) + f(m)$ für $(n, m) = 1$, $f(p^k) = f(p)$ für jede Primzahl p ($k \geq 1$, ganz), $A_k(x) = \sum_{p \leq x} \frac{f(p)^k}{p}$. Sei $A_2(x) \rightarrow \infty$, $|f(p)| \leq M$ (mit derselben Konstanten M für jedes p). Dann gilt für jedes ganze q , $q \geq 1$

$$\sum_{n \leq x} \{f(n) - A_1(x)\}^q = \mu_q x A_2(x)^{q/2} + o(x A_2(x)^{q/2}), \quad \mu_q = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^q e^{-t^2/2} dt.$$

Der Beweis ist bedeutend einfacher als der von Halberstam; die Bedingung $|f(p)| \leq M$ wird schließlich zu $f(p) = o(A_2(p)^{1/2})$ verbessert (vgl. auch Shapiro, dies. Zbl. **71**, 42).

K. Prachar.

Riesel, Hans: A note on the prime numbers of the forms $N = (6a + 1) 2^{2n-1} - 1$ and $M = (6a - 1) 2^{2n} - 1$. Ark. Mat. **3**, 245—253 (1956).

The paper contains two criteria for the primality of the numbers of the form $(6a + 1) 2^{2n-1} - 1$ and $(6a - 1) 2^{2n} - 1$. These theorems follow also from a more general theorem proved by Lehmer [Ann. of Math., II. Ser. **31**, 446 (1930)] and Brewer (this Zbl. **43**, 48). The proofs are based on some results from the theory of the quadratic field $K(\sqrt{3})$. In the first theorem a and n are integers satisfying (1) $a \geq 0$, (2) $n \geq 2$, (3) $2^{2n-1} > a$; and in the second theorem (1) $a \geq 1$, (2) $n \geq 2$, (3) $2^{2n} - 1 \geq a$. The author shows that the third inequality in the theorems not can be removed.

S. Selberg.

McCarthy, J. P.: Quadratic polynomials and prime numbers. Math. Gaz. **40**, 201—202 (1956).

Aufzählung einiger quadratischer Polynome, die für möglichst viele aufeinanderfolgende ganze Zahlen Primzahlen ergeben, und welche aus den schon seit Euler bekannten, z. B. $x^2 + x + 41$, durch lineare Transformation hervorgehen.

A. Aigner.

Schwarz, Štefan: On a type of universal forms in discretely valued fields. Acta Sci. math. **17**, 5—29 (1956).

In dieser bedeutenden Arbeit werden wichtige Sätze vereinigt und verallgemeinert, die bisher fern voneinander zu liegen schienen. Die Hauptresultate lassen sich sehr kurz und in vollständiger Einheitlichkeit formulieren, als es in der Arbeit geschieht, indem man sich der folgenden Definition bedient. Wenn für einen kommutativen Ring P für feste natürliche Zahlen k, s jede Gleichung $a_1 x_1^k + \dots + a_s x_s^k = b$ ($a_1, \dots, a_s, b \in P$) mit passenden $x_1, \dots, x_s \in P$ erfüllbar ist, sofern a_1, \dots, a_s von 0 und den Nullteilern von P verschieden sind, so sagen wir, daß P die Eigenschaft E_s^k hat. (Wenn P nullteilerfrei oder sogar ein Körper ist, so sind alle $a_1, \dots, a_s \neq 0$ zuzulassen.) Verf. (dies. Zbl. **30**, 113; **36**, 292) hat früher gewonnen: Theorem 1. Der endliche Körper $GF(p^f)$ von der Ordnung p^f (p Primzahl) hat für $\delta = (p^f - 1, k) \leq p - 1$ die Eigenschaft E_δ^k . Andererseits ist (vgl. B. W. Jones, The arithmetic theory of quadratic forms, dies. Zbl. **41**, 175) im rational- p -adischen Zahlkörper R_p jede Gleichung $g(x_1, \dots, x_s) = b$ lösbar, in der $s \geq 4$ und g ein homogen quadratisches Polynom mit nichtverschwindender Determinante ist. Insbesondere folgt hieraus, daß R_p die Eigenschaft E_s^2 hat. Nun beziehen sich des Verf. Resultate auf die folgenden drei Fälle: A. $P = R(\vartheta)_p$ ist ein p -adischer Zahlkörper, und zwar die zur p -adischen Bewertung gehörende perfekte Hülle des algebraischen Zahlkörpers $R(\vartheta)$ über dem rationalen Zahlkörper R , wobei p ein Primideal ($\neq 0, 1$) des Ringes \mathfrak{S}_ϑ der ganzen Elemente von $R(\vartheta)$ bedeutet; die

durch \mathfrak{p} teilbare Primzahl und der Grad von \mathfrak{p} werden mit p bzw. f bezeichnet, weshalb p^f die Norm von \mathfrak{p} ist. B. $\mathbf{P} = GF(p^f)_x$ ist der Körper der formalen Potenzreihen in x über $GF(p^f)$. C. $\mathbf{P} = \mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^t$ ($t \geq 2$) für $\mathfrak{p} \parallel p$, wobei $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}$, \mathfrak{p} und p dasselbe bedeuten wie im Fall A. In den Fällen A, B ist \mathbf{P} ein diskret bewerteter (perfekter) Körper, und zwar ist beidesmal der zugehörige Faktorkörper (= Restklassenkörper) isomorph zu $GF(p^f)$. Im Fall C ist \mathbf{P} ein Ring mit Nullteilern. Theorem 2. In den Fällen A, B hat \mathbf{P} für $\delta = (k, p^f - 1) \leq p - 1$ die Eigenschaft $E_{\delta+1}^k$. Theorem 3. Im Fall C hat \mathbf{P} für $\delta = (k, p^f - 1) \leq p - 1$, $s = \delta(p^f - 1)/(p^f - 1)$ die Eigenschaft E_s^k . Die Arbeit enthält noch verschiedene Bemerkungen, Beispiele und Anwendungen ähnlicher Art auf den Fall A, wobei aber Gleichungen von der Form $a_1 x_1^k + \dots + a_s x_s^k = b$, ($a_1, \dots, a_s \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}$; $b \in R(\mathfrak{p})$; $\mathfrak{p} \nmid a_1, \dots, a_s$; $\mathfrak{p} \parallel p$; $p \neq 2$) betrachtet und als Lösungen Elemente x_1, \dots, x_s von $R(\mathfrak{p})$ zugelassen werden.

L. Rédei.

Waerden, B. L. van der: Die Reduktionstheorie der positiven quadratischen Formen. Acta math. 96, 265—309 (1956).

In several papers (this Zbl. 24, 148; 28, 12) H. Weyl studied in detail the basic theorems on Minkowski reduction of positive definite quadratic forms $f(x) = \sum_{1 \leq i \leq k \leq n} f_{ik} x_i x_k$, of discriminant d_n say. His work depended essentially on an inequality by himself (l. c.) and K. Mahler (this Zbl. 19, 395) on the reduction of a lattice with respect to a general convex body. When this body is the unit sphere, the theory simplifies considerably, and stronger estimates hold. These had earlier been obtained by R. Remak (this Zbl. 19, 105) in a purely arithmetical manner. In the present paper the author combines the ideas of Remak and Weyl and succeeds in presenting the reduction theory in a particularly neat form. Part I contains the simplified proofs that $f_{11} \dots f_{nn}/d_n$ is bounded for all reduced forms, that the infinitely many conditions of reduction are implied by finitely many amongst them, and that there are only finitely many integral linear transformations changing a reduced form into a reduced form. Part II deals with the coverings of the space of all positive quadratic forms by the reduced cell and the cells derived from it by linear unimodular transformations of the quadratic form. These results are applied in part III to the extreme forms, in particular for up to six variables. — It would be of great interest if equally far-reaching results could be obtained for the reduction of lattices with respect to more general classes of convex bodies. It is, however, nearly certain that the boundary of the convex body will have to be restricted by some regularity assumption (e. g. boundedness of the radii of curvature) if again finitely many conditions are to be sufficient for reduction.

K. Mahler.

Linnik, Ju. (Y.) V.: An application of the theory of matrices and of Lobatschewskian geometry to the theory of Dirichlet's real characters. J. Indian math. Soc., n. Ser. 20, 37—45 (1956).

Let $a x^2 + 2 b x y + c y^2$ be a quadratic form with real coefficients and with discriminant $-D = b^2 - ac < 0$. To each quadratic form we have a point $z = (-b + i\sqrt{D})/a$ on the upper half-plane. Conversely, to each point on the upper half-plane, we have a quadratic form apart from a factor. The set of reduced (Lagrange) quadratic forms $c > a > 2|b|$ (the equality are allowed sometimes) corresponds to the domain $F: |\Re z| < \frac{1}{2}$, $|z| > 1$. Siegel's theorem may be stated as: the logarithm of the number $h(-D)$ of quadratic forms with integer coefficients lying in F is asymptotically equal to $\frac{1}{2} \log D$ as $D \rightarrow \infty$. Let \mathcal{Z} be a domain in F . The number of those quadratic forms lying in \mathcal{Z} is denoted by $H(\mathcal{Z})$. The author considers the problem concerning $H(\mathcal{Z})/h(-D)$. It can be expected that this ratio is proportional to the Lobatschewsky area of \mathcal{Z} and F . The author proves such an expectation under certain conditions.

L. K. Hua.

Barnes, E. S.: The covering of space by spheres. Canadian J. Math. 8, 293—304 (1956).

R. P. Bambah [Proc. nat. Inst. Sci. India, **20**, 25—52 (1954)] has recently determined the most economical lattice covering of three dimensional space by equal spheres, and naturally at the same time solved the equivalent problem of determining the best possible lower bound for the inhomogeneous minimum of a positive definite ternary quadratic form of fixed determinant. The author introduces the appropriate concept of an extreme form for the problem. By use of a reduction method for positive definite quadratic forms due to G. Voronoi [J. reine angew. Math. **133**, 97—178 (1907)] he determines the extreme forms, showing that there exists only a single class of such forms. This enables him to complete a much simpler proof of Bambah's result.

C. A. Rogers.

Kanold, Hans-Joachim: Eine Bemerkung über die Menge der vollkommenen Zahlen. Math. Ann. **131**, 390—392 (1956).

Kanold, Hans-Joachim: Über einen Satz von L. E. Dickson. I. II. Math. Ann. **131**, 167—179, **132**, 246—255 (1956).

Es bezeichne $N(x)$ die Anzahl der vollkommenen Zahlen $\leq x$. B. Hornfeck (dies. Zbl. **66**, 30) bekam $N(x) = O(x^{1/2})$. Nach seinem Brief an den Verf. gilt sogar $\lim_{x \rightarrow \infty} N(x)/\sqrt{x} \leq \frac{1}{2}$. In der ersten Arbeit wird $N(x) = o(x^{1/2})$ bewiesen. Der Beweis beruht auf dem Satz von L. E. Dickson, nach dem nur endlich viele ungerade vollkommene Zahlen mit einer beliebigen festen Anzahl von verschiedenen Primfaktoren existieren. In der zweiten Arbeit werden auch die mehrfachen vollkommenen Zahlen untersucht. $V(n)$ und $\sigma(n)$ bezeichnen die Anzahl der verschiedenen Primteiler bzw. die Summe aller (positiven) Teiler einer natürlichen Zahl n . Ferner bezeichnen $N(k, s)$, $U(k, s)$, $G(k, s)$ ($k, s = 0, 1, \dots$) die Menge der sämtlichen bzw. ungeraden bzw. geraden n mit $V(n) = k$ und $\sigma(n) = s n$. [Insbesondere ist also $G(2, 2)$ die Menge aller geraden vollkommenen Zahlen, ferner besteht $N(0, 1)$ aus dem einzigen Element 1.] Aus den Resultaten seien erwähnt: Satz 2. Für $k (= 2, 3, \dots)$ und $\xi (= 1, 2, \dots)$ ist $N(k, 2^\xi)$ dann und nur dann unendlich, wenn $N(k - 2, 2^{\xi-1})$ nichtleer und $G(2, 2)$ unendlich ist. Sätze 4, 5. Es sind $N(k, 3^\xi)$ und $N(k, 5^\xi)$ endlich. Es wird als Vermutung ausgesprochen, aber in der dritten Arbeit nebst Verallgemeinerung bewiesen: Satz 6. Es ist $N(k, s)$ dann und nur dann unendlich, wenn $2|s$ gilt, ferner $U(k - 2, s/2)$ nichtleer und $G(2, 2)$ unendlich ist. In der letzten Arbeit werden bei festem $r (= 1, 2, \dots)$ auch die n mit festem Verhältnis $\sigma_r(n)/n^r$ betrachtet, wobei $\sigma_r(n)$ die Summe der r -ten Potenzen der Teiler von n bezeichnet.

L. Rédei.

Vallée Poussin, Ch.-J. de la: Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée. Centre Belge Rech. math., Colloque Théorie des Nombres, Bruxelles 19—21 déc. 1955, 9—66 (1956).

Wiederabdruck der 1898 im den Mém. Acad. roy. Belgique, Coll. 8°, **59** erschienenen Arbeit.

Chalk, J. H. H.: An estimate for the fundamental solutions of a generalized Pell equation. Math. Ann. **132**, 263—276 (1956).

D sei eine natürliche Zahl (> 0). Verf. gibt eine obere Schranke für die ganzzahligen Lösungen von $x^2 + y^2 - D(z^2 + w^2) = 1$ mit minimalem $z^2 + w^2 > 0$ an. Ist D ein Quadrat, so gibt es offenbar Lösungen mit $z^2 + w^2 = D$. Von jetzt an sei D kein Quadrat. Verf. zeigt die Existenz einer Lösung mit

$$z^2 + w^2 > 0 \quad \text{und} \quad \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 + D \prod_{p|D, p > 2} \left(1 + \left(\frac{-1}{p}\right) \frac{1}{p}\right) \quad (p \text{ Primzahl}).$$

Ausgangspunkt ist das Schursche Verfahren [Göttinger Nachr. **1918**, 30—36 (1918)] zur Abschätzung der Lösung von $t^2 - Du^2 = 4$ für $D > 0$, $D \equiv 0, 1 \pmod{4}$ mit $t > 0$ und minimalem $u > 0$. Sei T, U diese Lösung und $\varepsilon(D) = (T + U\sqrt{D})$, so zeigte Schur: $\log \log \varepsilon < \frac{1}{2} \log D - \log \log D$. Er benutzte dabei die Kroneckersche

Klassenzahlformel

$$(1) \quad h(D) \log \varepsilon(D) = \sqrt{D} \sum \left(\frac{D}{n} \right) \frac{1}{n}$$

für die Anzahl der Klassen primitiver indefiniter quadratischer Formen $a x^2 + b x y + c y^2$ mit der Diskriminante $D = b^2 - 4 a c > 0$. Verf. setzt $t = x + i y$, $u = z + i w$ und betrachtet die Hermitesche Form $t \bar{t} - D u \bar{u}$ im Gaußschen Zahlkörper. $f(x, y) = a x \bar{x} + \bar{b} x \bar{y} + b \bar{x} y + c y \bar{y}$ sei eine indefinite Hermiteische Form im Gaußschen Zahlkörper mit a, c rational ganzzahlig, b ganz im Gaußschen Zahlkörper und $D = b \bar{b} - a c$ kein Quadrat. Der Automorphismengruppe der Form f läßt sich auf natürliche Weise eine Gruppe linear gebrochener Transformationen zuordnen, die nach Picard eine Grenzkreisgruppe 1. Art ohne parabolische Spitzen ist. Der nichteuklidische Inhalt ihres Fundamentalbereiches ∂_f sei $\sigma(\partial_f)$. Als Analogon zu (1) wird die von Humbert zuerst angegebene Formel

$$\sum_1^n \sigma(\partial_{f_p}) = \pi D \prod_{p|D, p>2} \left(1 + \left(\frac{-1}{p} \right) \frac{1}{p} \right) \quad (p \text{ Primzahl})$$

benutzt, in der f_1, \dots, f_n ein Repräsentantensystem der Klassen eigentlich primitiver Formen der Determinante $D > 0$ ist („eigentlich primitiv“ passend definiert). Eine dieser Formen ist o. B. d. A. $f_1 = x \bar{x} - D y \bar{y}$. Eine Abschätzung der Lage der isometrischen Kreise der zugehörigen Gruppe, die ja den Fundamentalbereich bestimmen, liefert den Zusammenhang zwischen $\sigma(\partial_{f_1})$ und den Lösungen von $t \bar{t} - D u \bar{u} = 1$ mit minimalem $|u| > 0$. Die Verschärfung für große D erhält man durch eine genauere Betrachtung der möglichen Lage der isometrischen Kreise unter Verwendung der Siegelschen Abschätzung $N \leq 6 + 3\pi^{-1} \sigma(\Delta)$ für die Anzahl N der Erzeugenden einer Grenzkreisgruppe mit Fundamentalbereich Δ .

K.-B. Gundlach.

Korobov, N. M.: Über vollkommene Gleichverteilung und simultan normale Zahlen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 20, 649—660 (1956) [Russisch].

$\varphi(x)$ is called perfectly uniformly distributed (mod 1) if for every $s \geq 1$ and any integers m_1, \dots, m_s not all zero $F_s(x) = m_1 \varphi(x+1) + \dots + m_s \varphi(x+s)$ is uniformly distributed (mod 1). (See the earlier paper of the author, this Zbl. 36, 311.) The following results are proved, where q, q_1, \dots, q_s are integers ≥ 2 . — (1) Let p_1, p_2, \dots be primes such that $p_v < p_{v+1} < \exp(\frac{1}{3} p_v^2)$, let $\psi(v)$ be an integer satisfying $\nu(p_{v+1}/p_v)^3 < \psi(v) < \exp(p_v^2)$, and let $n_1 = 1$, $n_{v+1} = n_v + p_v^2 (p_v - 1) \psi(v)$ if $v \geq 1$. The function $\varphi(x) = \alpha(x) q^x$ where $\alpha(x) = \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q^{n_v}} - \frac{1}{q^{n_{v+1}}} \right) \frac{x^{n_v}}{p_v^2}$ is perfectly uniformly distributed. — (2) For the same functions,

$$\sum_{x=1}^P e^{2\pi i \varphi(x)} = O(P^{3/4} \log P), \quad \sum_{x=1}^P e^{2\pi i F_s(x)} = O(P^{3/4} \log P),$$

if there is an integer $M \geq 2$ and two constants C_1, C_2 with $1 < C_1 \leq \frac{1}{2} C_2$ such that $C_1 M^v < p_v < C_2 M^v$, and if $\psi(v) = \psi_1(v) M^v$ where $\psi_1(v)$ is any increasing positive integral function of v . (3) Let $\varphi(x)$ be perfectly uniformly distributed, and let

$$\alpha_v = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\{\varphi(s k + v)\} q_v]}{q_v^k} \quad (v = 1, 2, \dots, s; \quad \{\lambda\} = \lambda - [\lambda]).$$

Then the points $(\alpha_1 q_1^x, \dots, \alpha_s q_s^x)$ in s -dimensional space are uniformly distributed.

K. Mahler.

Descombes, Roger: Sur la répartition des sommets d'une ligne polygonale régulière non fermée. Ann. sci. Écol. norm. sup., III. Sér. 73, 283—355 (1956).

For real numbers (ξ, η) put

$$k(\xi, \eta) = \liminf_{v, u \text{ integers}, v > 0} |v \xi - u - \eta| v.$$

It was shown by Khintchine (this Zbl. 12, 247) that $k(\xi, \eta) \leq 5^{-1/2}$. After slight refinements by Žogin (this Zbl. 60, 122), the reviewer (this Zbl. 30, 19) and Cole (this Zbl. 51, 36) the reviewer showed that $k(\xi, \eta) \leq 4/11$ except when (ξ, η) are equivalent in an appropriate sense to one of two fixed pairs. The author shows that there is an infinite sequence of successive minima of this kind with a first point of accumulation at

$$\gamma^{-1} = \frac{773868 - 28547(510)^{1/2}}{366795} = (2,83927885)^{-1};$$

and that there are continuum many distinct pairs (ξ, η) with $k(\xi, \eta) = \gamma^{-1}$. The author uses an algorithm closely related to that used by the reviewer and develops its general properties further. The proof of the sequence of successive minima requires a heroic amount of detailed and refined argument about the possible chains of integers in the algorithm. The problem is related to those studied by the author in his thesis (this Zbl. 55, 277) and some of the pairs (ξ, η) occur there. *J. W. S. Cassels.*

Chalk, J. H. H.: Rational approximations in the complex plane. II. J. London math. Soc. 31, 216—221 (1956).

(Part I, this Zbl. 65, 283). Let $f(u, v) = (\alpha u + \beta v)(\gamma u + \delta v)$ be a binary quadratic form with complex coefficients satisfying $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. E. Hlawka (this Zbl. 18, 204) proved that for any complex numbers u_0, v_0 there will be gaussian integers u, v satisfying $|f(u + u_0, v + v_0)| \leq \frac{1}{2} |\Delta|$, and that there will be an infinity of solutions with strict inequality, except in certain special cases. A simpler proof was given by K. Mahler (this Zbl. 27, 159). In this paper the author gives an even simpler proof. All three proofs are based on studies of the Picard group.

C. A. Rogers.

Djerasimović, Božidar: Über die Kettenbruchentwicklung quadratischer Irrationalzahlen. Math. Z. 66, 228—239 (1956).

Verf. führt in Weiterführung seiner Arbeit (dies. Zbl. 64, 286) eine neue Operation mit geordneten Komplexen von natürlichen Zahlen ein, die das Studium der Kettenbruchentwicklungen quadratischer Irrationalzahlen und der Eigenschaften binärer quadratischer Formen erleichtert. Der Operationsbegriff $*$ aus der zitierten Arbeit wird erweitert, indem gesetzt wird:

$$*A = 1(a_1 - 1)'A, \quad A* = A'(a_n - 1)1,$$

wo $A = a_1 a_2 \cdots a_n$ ein geordneter Komplex ganzer Zahlen ist. Der Eulersche Funktionsbegriff wird mit Hilfe der Rekursionsformel $[A] = a_1 [A'] + [A'']$ definiert. Es wird nun definiert: Zwei geordnete Komplexe ganzer Zahlen A und B sind einander gleich: $A = B$, wenn die Glieder des einen Komplexes der Reihe nach den entsprechenden Gliedern des zweiten Komplexes gleich sind. Zwei geordnete Komplexe ganzer Zahlen A und B sind zueinander äquivalent: $A \sim B$, wenn sie die Gleichungen $[A] = \varepsilon [B]$, $[A'] = \varepsilon [B']$, $[A''] = \varepsilon [B'']$, $[A'''] = \varepsilon [B''']$ befriedigen, wo $\varepsilon = +1$ oder $\varepsilon = -1$ in allen vier Gleichungen der gleiche Wert ist. Auf Grund dieser Definition folgt: Zwei äquivalente geordnete Komplexe von natürlichen Zahlen sind auch gleich. Ebenso folgt aus $A \sim B$

$$\underline{A} \sim \underline{B}, \quad A* \sim B*, \quad *A \sim *B \quad \text{und} \quad KAL \sim KBL,$$

wo K und L geordnete Komplexe ganzer Zahlen sind. Weiter wird definiert: Der Ausdruck $A|B$ mit $A = a_1 a_2 \cdots a_m$, $B = b_1 b_2 \cdots b_n$ (beides geordnete Komplexe) ist ebenfalls ein geordneter Komplex ganzer Zahlen, und zwar $A|B = A(-1)*B$. Diese Operation wird mit „ $|$ “ bezeichnet. Diese Operation gestattet ein Kürzen von gleichen Gliedern. Für sie gilt nur das assoziative Gesetz, nicht das kommutative. In der Äquivalenz $A|B \sim C$ bestimmen zwei der Komplexe den dritten. Die gewonnenen Ergebnisse werden auf periodische regelmäßige Kettenbrüche angewandt. $\xi = (B \underline{A})$ und $\eta = (C \underline{A})$ seien die Kettenbruchentwicklungen von zwei zueinander konjugierten quadratischen Irrationalzahlen, wobei A, B und C wieder

Komplexe sind. Dann wird der Satz bewiesen: Die Vorperioden B und C der Kettenbruchentwicklung von zwei zueinander konjugierten quadratischen Irrationalzahlen $\xi = (B \overline{A})$ und $\eta = (C \overline{A})$ und die Periode A des ersteren befriedigen die Äquivalenz $A \sim \underline{C|B}$, aus welcher auch die Äquivalenz

$$B \sim C|A, \quad C \sim B|A$$

folgen. Von diesem Satz werden in der Folge Anwendungen gemacht. *J. Mall.*

Analysis.

● **Tricomi, Francesco G.:** *Lezioni di analisi matematica. Parte I.* 7. ed. totalmente riveduta; *Parte II.* 7. ed., Padova, CEDAM 1956. XII, 381 p. L. 4200.— X, 360 p. L. 3800.—

The present introduction to algebraic analysis, differential and integral calculus, differential geometry and differential equations, has reached with this seventh improved edition a particular high level for amount of information, rigor, and simplicity of exposition. Contents: Part I. 1. Determinants; 2. Linear forms and linear equations; 3. Real numbers and elements of point set theory; 4. The concept of limit; 5. The concept of function; 6. Derivatives and differentials; 7. The main theorems of differential calculus; 8. Some analytic and geometric applications of differential calculus; 9. Indefinite integrals and an introduction to differential equations; 10. Series; 11. Complex numbers; 12. Algebraic equations; 13. Introduction to matrix theory and quadratic forms. Part. II. 1. The definite integral; 2. Methods of integration; 3. Series of functions. Numerical determination of integrals; 4. Differential calculus for functions of more variables. 5. Introduction to differential geometry of curves and surfaces; 6. Integrals of functions of more variables; 7. Ordinary differential equations; 8. Introduction to partial differential equations and to the calculus of variations. The discussion of algebraic analysis at the beginning and end of Part I corresponds to mere teaching necessities of the study program of most universities. The structure of the book is the cumulative result of the exigency of teaching to mixed audiences of students of mathematics, physics, and engineering. In the introduction of the real numbers as decimal expressions this edition differs from the previous one. This concept is then blended with the one of partition in the proofs. The discussion of the linear systems is particularly elegant in the present edition based as it is on the properties of linear dependence and independence of the rows and columns of a $m \times n$ matrix of characteristic p . The elements of point set theory include a proof of Borel covering theorem. The introduction to matrix theory includes the Cayley-Hamilton theorem and the concept of minimal equation. The discussion of quadratic forms includes the inertial law of quadratic forms and the determination of the signature of a quadric. No essential changes have been made on the present edition of Part II. Fourier series are thoroughly discussed, and so are implicit functions of one and more variables. The account of differential geometry includes Frenet formulas for curves, and Meusnier theorem, Euler formulas, and Dupin indicatrix for surfaces. [The rev. was somewhat puzzled by the author's use of the term „punto di condensazione“ as interchangeable with „punto di accumulazione“, and of „insieme nullo“ as interchangeable with „insieme di misura nulla“]. For reviews of previous editions see this Zbl. 31, 13, and 19, 337.

L. Cesari.

● **Salet, W. J. H.:** *Aufgaben über Analysis und Algebra. Band I.* 3. Aufl. Groningen: P. Noordhoff N. V. 1956. 154 S. f 5.90. [Holländisch].

Dieses Büchlein enthält über tausend Aufgaben zur Algebra und Analysis systematisch geordnet und paßt zu den normalen Vorlesungen an Technischen Hochschulen. Daß nach vier Jahren schon die dritte Auflage vorliegt, ist kennzeichnend für die Brauchbarkeit dieser Sammlung.

E. M. Bruins.

● **Salet, W. J. H.: Aufgaben über Analysis und Algebra. Band II.** Groningen: P. Noordhoff N. V. 1955. 149 S. f 6.25 [Holländisch].

Der zweite Teil dieser Aufgaben zur Analyse und Algebra enthält wieder über tausend Probleme, systematisch geordnet, im Allgemeinen über Algebra und Analysis mehrere Variablen.

E. M. Bruins.

Turán, Paul: Über eine neue Methode der Analysis. Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin, math.-naturw. R. 5 (1955/56), 275—279, dtsh., russ., engl., französ. Zusammenfassg. 280 (1956).

Der Verf. gibt erneut eine Übersicht über seine so fruchtbare Methode (vgl. dies. Zbl. 52, 46; 66, 38) und weist auf neue Fragestellungen hin. *E. Hlawka.*

Mengenlehre:

Erdős, P. and G. Fodor: Some remarks on set theory. V. Acta Sci. math. 17, 250—260 (1956).

Sei E eine Menge der Mächtigkeit $\text{kard } E = m$; jedem $x \in E$ werde eine nicht leere Teilmenge $f(x)$ von E zugeordnet. Zwei verschiedene Elemente x, y aus E heißen unabhängig, wenn $x \notin f(y)$ und $y \notin f(x)$. Eine Teilmenge von E heißt frei, wenn sie aus einem einzigen Element besteht oder wenn je zwei verschiedene ihrer Elemente unabhängig sind. Abkürzungen: $\Sigma'_F = \bigcup_{x \in F} f(x)$, $\Pi'_F = \bigcup_{x, y} (f(x) \cap f(y))$, wo $x, y \in F$, $x \neq y$ ($F \subset E$). Einer Menge $F \subset E$ wird die Eigenschaft $T(q, p)$ zugeschrieben, wenn $\text{kard } \Sigma'_F = q$ und $\text{kard } \Pi'_F < p$ ist (für $q \leq m$, $p \leq m$). — F heißt abgeschlossen, wenn $f(x) \subset F$ für $x \in F$ gilt. — Es soll stets $\text{kard } \Sigma'_E = m$ vorausgesetzt werden. — Man wird, um Fragestellungen von Interesse zu erhalten, den $f(x)$ gewisse Bedingungen auferlegen, etwa eine der folgenden: (A) Es gibt ein $n < m$, so daß $\text{kard } f(x) < n$ für alle $x \in E$ ist. — (B) Es gibt ein $n < m$, so daß man $\text{kard } (f(x) \cap f(y)) < n$ für $x \neq y$, $x, y \in E$ hat. — (C) Für alle verschiedenen Paare x, y aus E gilt $f(x) \not\subset f(y)$ und $f(y) \not\subset f(x)$. — (D) Für jedes $x \in E$ hat die Menge aller $y \in E$ mit $f(x) \cap f(y) \neq \emptyset$ eine kleinere Mächtigkeit als m . — Fragen: Impliziert eine der genannten Bedingungen die Existenz einer Menge $F \subset E$ mit der Eigenschaft $T(q, p)$ oder die Existenz von freien Mengen gewisser Mächtigkeiten? Hinsichtlich der Bedingung (A) sind diese Probleme in früheren Abhandlungen behandelt worden; die gegenwärtige ist unter anderem der Berücksichtigung der Bedingungen (B), (C) und (D) gewidmet. — Weitere Frage: Existiert auf Grund von (B) und der Voraussetzung $\text{kard } f(x) < m$ für alle $x \in E$ stets eine freie Teilmenge von E mit der Mächtigkeit m ? Ohne die allgemeine Kontinuumhypothese ($=$ a. K. H.) wird allgemein für $m \geq \aleph_0$ nur die Existenz einer freien Teilmenge der Mächtigkeit \aleph_0 bewiesen. Ein weitergehendes Teilresultat wird mit den Sätzen 6 und 7 gegeben: Es existiert eine freie Teilmenge der Mächtigkeit m jedenfalls in folgenden Fällen: 1. $m = \aleph_1$ und $n < \aleph_0$; 2. $m = \aleph_{\alpha+1}$, $r = \aleph_\alpha$ und $n < r^*$; 3. m singular. In den Fällen 2. und 3. wird jedoch zum Beweis die a. K. H. benutzt. Dabei bedeutet r^* (bei beliebigem r) die kleinste Kardinalzahl, für welche r als Summe von r^* Kardinalzahlen dargestellt werden kann, die kleiner als r sind; r ($\neq 0$) heißt singular bzw. regulär, wenn $r^* <$ bzw. $= r$ ist. — Schließlich werden die beiden folgenden Fragen beantwortet: a) Impliziert die Bedingung (A) die Existenz einer echten abgeschlossenen Teilmenge von E mit der Mächtigkeit m ? b) Impliziert (A) die Existenz zweier fast disjunkter abgeschlossener Teilmengen von E mit der Mächtigkeit m ? [F_1 und F_2 heißen fast disjunkt, wenn $\text{kard } (F_1 \cap F_2) < \min(\text{kard } F_1, \text{kard } F_2)$ ist]. — Die Antwort auf a) lautet bejahend, wenn es ein reguläres r mit $\aleph_0 < n \leq r < m$ gibt, und verneinend, wenn $m > \aleph_0$ ist, einen singulären unmittelbaren Vorgänger hat und n als dieser Vorgänger gewählt wird. Unter der letzten Bedingung ist auch b) zu verneinen, während unter der ersten auch b) bejaht werden kann; zum Beweis der letzteren Aussage wird jedoch die a. K. H. benutzt,

wenn $m (\neq \aleph_{\alpha+\omega})$ die Summe von n Kardinalzahlen ist, die $< m$ sind (Sätze 17—20).
W. Neumer.

Jaffard, Paul: Un problème sur les ensembles lié à la théorie de la croissance. Bull. Sci. math., II. Sér. 80, 100—108 (1956).

Verf. untersucht die Existenz von Ultrafiltern \mathfrak{U} mit der Eigenschaft D : Es gibt eine Folge Y_1, Y_2, \dots mit $Y_\nu \in \mathfrak{U}$ und $\bigcap_\nu Y_\nu = \emptyset$. Ergebnis: In einer Menge, die höchstens die Mächtigkeit des Kontinuums hat, hat jeder Ultrafilter, der nicht Hauptfilter ist, die Eigenschaft D . Unabhängig von der während des Druckes erschienenen Arbeit von W. Krull (dies. Zbl. 70, 49) erhält Verf. bei Anwendungen auf die Gruppe aller reellen Funktionen über einer beliebigen Menge E und deren Homomorphismen, die durch Filter in E definiert werden, mehrere Resultate dieser Arbeit.

P. Lorenzen.

Grabieli, Federico: Gerichtete Mengen und verallgemeinerte Grenzwerte. Revista Soc. Cubana Ci. fis. mat. 3, 139—148 (1956) [Spanisch].

Kurze Darstellung der Theorie der gerichteten Mengen und verallgemeinerten Grenzwerte mit einigen Anwendungen auf Abbildungen von gerichteten Mengen in gerichtete Mengen. Auf die Tatsache, daß bereits M. Picone 1919 die gerichteten Mengen eingeführt hat, wird besonders hingewiesen.

G. Aumann.

Cuesta, N.: Denjoysche Ordinatrizen. Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. 16, 179—192 (1956) [Spanisch].

Es bezeichne $<$ die natürliche Ordnung, $<_1$ irgendeine totale Ordnung der Menge $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ der natürlichen Zahlen (nicht notwendig vom Typus ω). Die zur Ordnung $(N, <_1)$ gehörige Denjoysche Ordinatrix (dies. Zbl. 25, 148) ist die Folge $((a_n))$, $n = 1, 2, 3, \dots$, wobei $a_n = 0$, wenn die Menge $P_n = \{x: x < n, \text{ \& } x <_1 n\}$ leer, und $a_n = \sup_1 P_n$ sonst. Eine Folge $((a_n))$ von Elementen aus $\{0, 1, 2, \dots\}$ ist genau dann eine Ordinatrix, wenn $a_n < n$ für $n = 1, 2, 3, \dots$. Mit $a_n <_0 n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, als erzeugende Ordnungsrelationen ergibt sich eine teilweise (irreflexive und transitive) Ordnung $(N_0, <_0)$ von $N_0 = N \cup \{0\}$. Mit Hilfe dieser Ordnung studiert Verf. die Struktur von $(N, <_1)$, wobei insbesondere gewisse „Schnitte“ (B, C) (d. h. Paare B, C mit $B \cup C = N$ und $B <_1 C$) gekennzeichnet werden.

G. Aumann.

Gillman, Leonard: On a theorem of Mahlo concerning anti-homogeneous sets. Michigan math. J. 3, 173—177 (1956).

An ordered set E is anti-homogeneous (a. h.) if no two of its elements are of the same character. J. Novak [Colloquium math. 3, 171 (1955), problem 134] asks whether there exists a continuous a. h. ordered set. The author ties this problem with some Mahlo's investigations [Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, math.-phys. Kl. 63, 187—225 (1911)]. One proves the Mahlo's theorem: If E is continuous and $F_\pi \supset S_\pi$ for every π and if F_Φ is nowhere dense in E , then Φ is a ϱ -number (Th. 1). Let moreover all intervals of E be of the same cardinality $\aleph_\sigma = |E|$. If $|C_\pi| \leq \aleph_\pi$ ($\pi < \varepsilon$) then $\varepsilon = \sigma = \gamma$, every interval of E has a subinterval that is a $\eta_{\pi+1}$ -set, every subset of E of cardinality $< |E|$ is nowhere dense. If moreover S_ε is nowhere dense in E , then ε is a semi-inaccessible ϱ -number (Th. 4). One asks whether for every semi-strongly inaccessible ϱ -number ε there exists a continuous a. h. set of cardinality \aleph_ε . Notations. For a family $F = (F_\pi)$ of subsets of a dense set E let $F(\tau) = \bigcup F_\pi$ ($\pi \leq \tau$); the smallest ordinal τ such that $F(\tau)$ be somewhere dense in E is denoted $\Phi(F)$. According to Mahlo, inaccessible numbers \aleph_λ , ω_λ are called ϱ -numbers provided every increasing sequence $\rightarrow \omega_\lambda$, contains a proper initial section whose limit is inaccessible. S_π denotes all $C_{\pi\pi}$ -elements of E ; C_π denotes all the $c_{\alpha\beta}$ -elements of E such that $\alpha \leq \pi$, $\beta \leq \pi$, $\pi \in \{\alpha, \beta\}$; one puts $\sigma = \Phi(S)$, $S = (S_\pi)$, $\gamma = \Phi(C)$, $C = (C_\pi)$. \aleph_λ is semistrongly inaccessible, provided $\alpha < \aleph_\lambda$ implies $2^\alpha \leq \aleph_\lambda$.

G. Kurepa.

Bagemihl, F. and L. Gillman: Some cofinality theorems on ordered sets. *Fundamenta Math.* **43**, 178—184 (1956).

Theorem 1. Sei β eine Ordnungszahl der Form $\omega_\alpha \varphi + \varrho$ mit $\varphi > 0$ und $\varrho < \omega_\alpha$. Notwendig und hinreichend dafür, daß es eine Menge $M \subset W(\beta)$ mit $|M| = \aleph_\alpha$ und $|M \cap W(\gamma)| < \aleph_\alpha$ für alle $\gamma < \beta$ gibt, ist, daß $\varrho = 0$ gilt und φ entweder keine Limeszahl ist oder eine Limeszahl mit $\text{cf}(\varphi) = \text{cf}(\alpha)$. — Dabei bedeutet $W(\beta)$ die Menge aller $\gamma < \beta$, ferner $|M|$ die Mächtigkeit von M und $\omega_{\text{cf}(\varphi)}$ diejenige reguläre Zahl, mit der ω_φ konfinal ist. — Eine geordnete Menge M heiße \aleph_α -homogen, wenn jedes ihrer Intervalle $[a, b]$ die Mächtigkeit \aleph_α hat ($a \in M \ni b$, $a < b$). — $T(\alpha, \beta)$ bezeichne für beliebige Ordnungszahlen α, β die lexikographisch geordnete Menge aller Folgen $t = (\tau_\xi)_{\xi < \omega_\beta}$ mit $\tau_\xi \in W(\omega_\alpha)$, wobei jeweils nur endlich viele $\tau_\xi \neq 0$ sind aber nicht alle τ_ξ verschwinden. Im Fall $\alpha \geq \beta$ ist $T(\alpha, \beta)$ eine \aleph_α -homogene Menge der Mächtigkeit \aleph_α . — **Theorem 2.** Ist $\beta \leq \text{cf}(\alpha)$, so existiert genau dann eine Menge $M \subset T(\alpha, \beta)$, für die $|M| = \aleph_\alpha$ und $|M \cap R(t)| < \aleph_\alpha$ für alle $t \in T(\alpha, \beta)$ gilt, wenn $\beta = \text{cf}(\alpha)$ ist. — Dabei bezeichnet $R(t)$ die Menge aller $x \in T(\alpha, \beta)$ mit $t < x$. — **Theorem 3.** Ist $\beta < \text{cf}(\alpha)$ und $M \subset T(\alpha, \beta)$, $|M| = \aleph_\alpha$, so enthält M eine wohlgeordnete Teilmenge der Mächtigkeit \aleph_α . Ferner sind 2^{\aleph_α} zu M ähnliche Teilmengen in $T(\alpha, \beta)$ vorhanden. — **Theorem 4.** Sei $\text{cf}(\alpha) < \alpha$. M sei \aleph_α -homogen und jedes Intervall von M enthalte Teilmengen beider Typen $\omega_{\text{cf}(\alpha)}$, $\omega_{\text{cf}(\alpha)}^*$. Dann gibt es ein $E \subset M$ mit $|E| = \aleph_\alpha$, so daß E keine Menge von einem der Typen ω_α oder ω_α^* enthält. **Folgerung:** Ist $\alpha > 0$, so ist auch $\text{cf}(\alpha)$ genau dann > 0 , wenn es eine \aleph_α -homogene Menge M gibt mit der Eigenschaft, daß jede Teilmenge $N \subset M$ mit $|N| = \aleph_\alpha$ eine wohlgeordnete Teilmenge der Mächtigkeit \aleph_α enthält. W. Neumer.

Fodor, G.: Eine Bemerkung zur Theorie der regressiven Funktionen. *Acta Sci. math.* **17**, 139—142 (1956).

Sei A eine nicht mit ω konfinale Limeszahl, $W(A)$ die Menge aller Zahlen $< A$ und M eine stationäre Teilmenge von $W(A)$ [d. h. $W(A) - M$ soll keine in $W(A)$ abgeschlossene und mit $W(A)$ konfinale Teilmenge enthalten]. — **Hilfssatz:** Sei $\tau \leq \omega_{\text{cf}(A)}$ und $\{K_\alpha\}_{\alpha < \tau}$ eine Folge von nichtleeren, paarweise disjunkten und nicht-stationären Teilmengen von $W(A)$; x_α sei das erste Element von K_α und $U = \{x_\alpha\}_{\alpha < \tau}$. Sei ferner U nicht stationär und im Fall $\tau = \omega_{\text{cf}(A)}$ mit $W(A)$ konfinal. Dann ist auch die Menge $\bigcup_{\alpha < \tau} K_\alpha$ nicht stationär. — [Der Beweis, den Verf. für den Hilfssatz gibt, setzt im Fall $\tau = \omega_{\text{cf}(A)}$ nicht nur die Konfinalität von U und $W(A)$ sondern stillschweigend auch die Konfinalität von $W(A)$ mit jeder Teilmenge U^* von U voraus, deren Mächtigkeit $|U^*| = \aleph_{\text{cf}(A)}$ ist. Diese zusätzliche Voraussetzung ist bei den Anwendungen des Hilfssatzes erfüllt. Ref.] — **Satz 1.** Zu jeder auf der stationären Teilmenge M von $W(A)$ definierten regressiven Funktion $\varphi(\mu) < \mu$ ($0 < \mu \in M$), $\varphi(0) = 0$ (wenn $0 \in M$) existiert eine Ordnungszahl $\alpha < A$ und eine stationäre Teilmenge $N \in M$, so daß $\varphi(\mu) \leq \alpha$ für alle $\mu \in N$ ist. — **Satz 2.** Ist A regulär, so existiert für jede auf M definierte regressive Funktion φ eine stationäre Teilmenge N von M , so daß $\varphi(\mu)$ für alle $\mu \in N$ dieselbe Zahl ist. W. Neumer.

Differentiation und Integration reeller Funktionen. Maßtheorie:

Nikodým, Otton Martin: On extension of a given finitely additive field-valued, non negative measure, on a finitely additive Boolean tribe, to another tribe more ample. *Rend. Sem. math. Univ. Padova* **26**, 232—327 (1956).

L'A. démontre dans cet article les résultats annoncés dans quatre notes (c. Zbl. **65**, 264; **70**, 28) dans le compte-rendu desquelles le rapporteur a commis une erreur qui sera corrigée ci-dessous. Le résultat fondamental est un théorème d'extension des mesures simplement additives à valeurs dans un corps totalement

ordonné; mais l'extension de la mesure exige une extension simultanée du corps. Précisément, on a: Si B tribu (ou algèbre) de Boole est une sous-tribu de B' , si μ est une mesure simplement additive, non négative sur B à valeurs dans un corps totalement ordonné φ , il existe un corps totalement ordonné Φ et une mesure simplement additive, non négative M sur B' à valeurs dans Φ tels que: 1. il existe un isomorphisme t de φ sur un sous-corps de Φ . 2. $M(a) = t\mu(a)$, $\forall a \in B$. 3. $t\mu^*(A) \leq M(A) \leq t^*\mu(A)$, $\forall A \in B'$, où μ^* et $^*\mu$ sont respectivement des mesures intérieure et extérieure que l'on définira ci-dessous; 4. $\text{card } \Phi \leq \max(\text{card } \varphi, \text{card } B')$. La première démarche de l'A. est pour toute chaîne la définition de „bouts“ qui permette le plongement de la chaîne dans une chaîne plus vaste. Soit C une chaîne dont l'ordre est désigné par \leq . La relation entre deux sous-ensembles de $M: E. \leq F \Leftrightarrow \text{„}\forall y \in F, \exists x \in E \text{ tel que } x \leq y\text{“}$ est transitive, et on a $\forall E$ et $\forall F: \text{„}\overline{E.} \leq \overline{F}$ ou $F. \leq \overline{E.}\text{“}$. „ $E. \leq F$ et $F. \leq E.$ “ est une relation d'équivalence. L'espace quotient $^*\overline{C}$ correspondant est l'espace des „bouts gauches“ $^*\alpha$ totalement ordonné par $^*\alpha \leq ^*\beta \Leftrightarrow \text{„}\forall E \in ^*\alpha, \forall F \in ^*\beta, E. \leq F.\text{“}$. On peut procéder de même avec les „bouts droits“ $^*\alpha'$ dont l'ensemble $\overline{C'}$ est aussi une chaîne. $^*\overline{C}$ et $\overline{C'}$ en $\mathfrak{P} \mathfrak{P}(C)$, on peut considérer leur réunion et poser $^*\alpha \leq ^*\beta \Leftrightarrow \text{„}\exists E \in ^*\alpha, \exists F \in ^*\beta, \forall x \in E, \forall y \in F, x \leq y\text{“}$ (de même pour $\alpha' \leq \beta'$). „ $^*\alpha \leq ^*\beta$ et $^*\beta \leq ^*\alpha$ “ est une relation d'équivalence (signifiant $\exists a \in C$ tel que $\{a\} \in ^*\alpha$, $\{a\} \in ^*\beta$). L'espace quotient \overline{C} avec l'ordre correspondant est une chaîne complète, contenant un sous-ensemble isomorphe à C . Il faut remarquer que, quoique \overline{C} soit une chaîne complète, le procédé précédent appliqué à \overline{C} redonnerait une chaîne $\overline{\overline{C}}$ complète plus vaste que \overline{C} — contrairement à ce que le R. avait affirmé dans le compte-rendu des notes de l'A. Si C a une structure de groupe abélien totalement ordonné, cette structure peut être transposée à \overline{C} par les méthodes habituelles; de même si C admet des multiplicateurs non négatifs dans un corps totalement ordonné F , et C est isomorphe (pour l'ordre et les opérations) à un sous-ensemble de \overline{C} . L'A. désigne par $B\varphi$ -agrégats ce que l'on peut présenter rapidement, en supposant la tribu B réalisée comme tribu de sous-ensembles d'un ensemble E , comme les applications de E dans le corps φ ne prenant qu'un nombre fini de valeurs λ_i , chacune étant prise sur un ensemble a_i de la tribu. L'ensemble de ces applications a une structure naturelle d'ordre et d'espace vectoriel V sur φ , isomorphes à celles que l'A. définit pour l'ensemble des $B\varphi$ -agrégats. Chacun étant représenté par la notation $X = \sum \lambda_i a_i$, $f(X) = \sum \mu(a_i) \lambda_i$ où μ est une mesure sur B à valeurs dans F est une forme linéaire sur l'espace vectoriel V . Norme d'un agrégat: Si $X = \sum \lambda_i A_i$ est un $B'\varphi$ -agrégat, et $\{a_1, \dots, a_m\}$ une partition dans B (sous-tribu de B'), la $B\varphi$ -norme de X est le bout gauche $p(X)$ de l'ensemble des éléments de F définis par $\sum_{k=1}^m \mu(a_k) [\max \{|\lambda_\alpha|; a_k \cdot A_\alpha \neq 0\}]$. On a $p(X + Y) \leq p(X) + p(Y)$, $p(\lambda X) = |\lambda| p(X)$. Enfin $f(X) \leq p(X)$ pour les $B\varphi$ -agrégats. L'intérêt de V est d'être le plus petit espace vectoriel sur φ contenant les fonctions caractéristiques (à valeurs dans φ) des a_i (considérés comme parties de E), la valeur correspondante de f étant $\mu(a_i)$. Le prolongement de f à l'espace V' des $B'\Phi$ -agrégats, (Φ surcorps de φ) fournira donc un prolongement M de μ à B' . L'inégalité $f(X) \leq p(X)$ permet à l'A. d'appliquer le processus de Banach pour le prolongement des fonctionnelles linéaires. Le processus doit être répété transfiniment. Chaque étape peut exiger une extension du corps dans lequel f prend ses valeurs en un surcorps totalement ordonné. L'A. prouve, à cet effet, qu'à toute „lacune“ dans un corps totalement ordonné (i. e. une partition de F en deux parties A, B telles que $\forall x \in A$ et $\forall y \in B, x < y$) correspond une extension \overline{F} algébrique ou transcendante contenant un élément z postérieur à tous les éléments homologues de ceux de A et antérieur à tous les éléments homologues de ceux de B dans l'isomorphisme de F sur un sous-corps de \overline{F} . La mesure extérieure $^*\mu(A)$ de $A \in B'$ est le bout gauche

de l'ensemble des éléments de φ de la forme $\mu(a_1) + \dots + \mu(a_n)$ où $a_i \in B$ et $A \subset a_1 + \dots + a_n$. La mesure intérieure est définie par $\mu^*(A) = \mu(1) - \mu(c_0 A)$. L'utilité des inégalités 3. du Théorème cité au début est essentiellement de prouver que l'extension M est non négative. Tout l'article est écrit avec un grand souci de rigueur. L'A. s'interdit les identifications d'ensemble isomorphes et évite souvent les passages au quotient, préférant parler de diverses relations d'„égalité“ sur un même ensemble que d'espaces quotient successifs. Le R. s'est souvent écarté du langage de l'A. afin de donner un aperçu aussi concis et intuitif que possible des méthodes utilisées.

A. Revuz.

Krickeberg, Klaus: *Extreme Derivierte von Zellenfunktionen in Booleschen σ -Algebren und ihre Integration*. S. Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1955, 217—279 (1956).

In a note (this Zbl. 50, 60) the reviewer started a Burkil theory of interval functions for abstract intervals called „cells“. In order to save the usual expensive Vitali conditions [O. Haupt-G. Aumann-Chr. Pauc, *Differential- und Integralrechnung III* (this Zbl. 64, 48), § 10.1—and 10.2] thus give to the theory a larger field of applications, the classical pointwise derivatives were replaced by Radon-Nikodym integrands and global derivatives. In the present memoir the author, resorting to the complete lattice property of measurable functions with regard to essential ordering, introduces „essential derivatives“ and shows the necessity of Vitali conditions to secure a Burkil inequality (Th. 2. 4) for such derivatives. The use of essential derivatives saves the cumbersome restrictions (e. g. condition L) imposed by the use of pointwise derivatives when their measurability is needed (O. Haupt-Chr. Pauc, this Zbl. 56, 276). Some results were announced by the author in a previous note (this Zbl. 55, 51). Setting in § 1—3. $\mu|_{\mathfrak{B}}$: positive σ -finite measure defined on the abstract Boolean σ -algebra \mathfrak{B} . E : unit of \mathfrak{B} . A \mathfrak{B} -function on E is defined by means of a spectral scale (spectral decomposition of E). The family \mathfrak{F} of the \mathfrak{B} -functions is a complete lattice; sup and inf are denoted by \vee and \wedge . For $f, g \in \mathfrak{F}$, $f = g[A]$ means that the restrictions of f and g to A are equal. $f \in \mathfrak{F}$ is integrable if the integrals over E of the positive and negative parts of f are not both infinite, summable if they are both finite. Θ or (Θ, \ll) : set of elements σ, τ, \dots directed by \ll . $\mathfrak{S} = (f_\sigma)$: Moore-Smith sequence in \mathfrak{F} . $g_\tau = \bigvee_{\tau \ll \sigma} f_\sigma$, $h_\tau = \bigwedge_{\tau \ll \sigma} f_\sigma$.

$\overline{\lim} f_\sigma = \bigwedge g_\tau$, $\lim f_\sigma = \bigvee h_\tau$. § 1 deals with the commutativity of integration and passage to the limit for \mathfrak{S} . A Moore-Smith sequence (φ_σ) of real σ -additive functions defined on \mathfrak{B} is called „terminally uniformly absolutely continuous from above“ if to any $\varepsilon > 0$ there exists a terminal set Δ in Θ , a $\delta > 0$ and an element H in \mathfrak{B} of finite measure such that $((\sigma \in \Delta) \& (A \in \mathfrak{B}) \& (\mu(H \cdot A) < \delta)) \rightarrow (\varphi_\sigma(A) < \varepsilon)$.

Theorem 1. 3 (Generalized Fatou-Vitali Lemma): If $\overline{\lim} f_\sigma$ is integrable, terminally many f_σ are integrable and the sequence of their indefinite integrals is terminally uniformly absolutely continuous from above, then $\overline{\lim} \int_E f_\sigma d\mu \leq \int_E (\overline{\lim} f_\sigma) d\mu$.

Condition F_2 for \mathfrak{S} : All f_σ are integrable. To any $\varepsilon > 0$ and any $\varrho \in \Theta$ there exists an index ζ with $\varrho \ll \zeta$ such that for any finite subset $\{\sigma_1, \dots, \sigma_p\}$ of Θ with $\zeta \ll \sigma_k$, $k = 1, \dots, p$, there is an index ξ with $\zeta \ll \xi$ and $\int_E (\bigvee_k f_{\sigma_k}) d\mu \leq \int_E f_\xi d\mu + \varepsilon$.

Theorem 1. 5: If there exists $\tau \in \Theta$ such that g_τ is integrable, $\int_E g_\tau d\mu < +\infty$

and $-\infty < \overline{\lim} \int_E f_\sigma d\mu$, then the assertions $\int_E (\overline{\lim} f_\sigma) d\mu \leq \overline{\lim} \int_E f_\sigma d\mu$,

$\int_E (\overline{\lim} f_\sigma) d\mu = \overline{\lim} \int_E f_\sigma d\mu$ and F_2 are equivalent. § 2 deals with integration and differentiation of cell functions. \mathfrak{R} : non-empty set of elements of \mathfrak{B} of finite, positive measure, called „cells“. Cell partition of E : (enumerable) disjoint subset \mathfrak{S} of \mathfrak{R}

with $V \subseteq E$. A set $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ is \mathfrak{C} -fine if every \mathfrak{A} -set is part of an \mathfrak{C} -cell. \mathfrak{T} or (\mathfrak{T}, \ll) : directed set of cell partitions of E (special instance of Θ in § 1). For $\mathfrak{C}, \mathfrak{T} \in \mathfrak{T}$, $\mathfrak{T} \sqsubset \mathfrak{C}$: \mathfrak{C} is \mathfrak{T} -fine. ψ (cell function): real function defined on \mathfrak{R} , $\psi(\mathfrak{C}) = \sum \psi(S)$ for $S \in \mathfrak{C}$ if it exists. Provided $\psi(\mathfrak{C})$ exists for a terminal subset of \mathfrak{T} , $\int_E \psi = \lim \psi(\mathfrak{C})$, $\int_E \bar{\psi} = \lim \bar{\psi}(\mathfrak{C})$. $D(\psi, \mathfrak{C})$ (\mathfrak{C} -derivative of ψ): function

taking on each $S \in \mathfrak{C}$ the value $\psi(S)/\mu(S)$. $\bar{D}\psi$ (upper derivate) $= \lim \bar{D}(\psi, \mathfrak{C})$, $\underline{D}\psi$ (lower derivate) $= \lim \underline{D}(\psi, \mathfrak{C})$. A set $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{B}$ is called a „fine covering“ of $A \in \mathfrak{B}$ if, for any terminal subset \mathfrak{D} of \mathfrak{T} , $A \leq V(\mathfrak{Q} \cdot \cup \mathfrak{D})$. Strong Vitali condition V (for \mathfrak{T}): Corresponding to any $A \in \mathfrak{B}$, any fine covering \mathfrak{Q} of A , any terminal subset \mathfrak{G} of \mathfrak{T} and any $\varepsilon > 0$, there exists a finite and disjoint subset \mathfrak{P} of \mathfrak{Q} included in some partition of \mathfrak{G} such that $\mu(A - A \cdot V \mathfrak{P}) < \varepsilon$. Theorem 2. 4:

If $\mu(E) < \infty$ and for any non-negative μ -Lipschitzian cell function ψ , $\int_E \bar{D}\psi d\mu \leq \int_E \bar{\psi}$,

then \mathfrak{T} fulfills V . The restriction $\mu(E) < \infty$ can be omitted if $\ll = \sqsubset$. Hint to the proof: Auxiliary function $\psi(K) = \mu(K)$ for $K \in \mathfrak{Q}$, $= 0$ for $K \in \mathfrak{R} - \mathfrak{Q}$.

Let $\mathfrak{Z} \in \mathfrak{T}$, \mathfrak{D} be the set of the \mathfrak{T} -partitions $\gg \mathfrak{Z}$ and $\bar{D}_\mathfrak{Z} \psi = V \bar{D}(\psi, \mathfrak{C})$ for $\mathfrak{C} \in \mathfrak{D}$. By hypothesis $A \leq V(\mathfrak{Q} \cdot \cup \mathfrak{D})$, hence $1 = \bar{D}_\mathfrak{Z} \psi[A]$. In virtue of Th. 1. 5, $0 \leq \psi$, $0 \leq \bar{D}_\mathfrak{Z} \psi \leq 1$ and $\mu(E) < \infty$, there exists \mathfrak{Z} and \mathfrak{X} in \mathfrak{G} with $\mathfrak{Z} \ll \mathfrak{X}$ and $\int_E (\bar{D}_\mathfrak{Z} \psi - D(\psi, \mathfrak{X})) d\mu < \varepsilon$. Take $\mathfrak{P} = \mathfrak{X} \cdot \mathfrak{Q}$. The cell function ψ is called

Θ -absolutely continuous if to any $\varepsilon > 0$, there exists $\delta > 0$, a terminal set \mathfrak{D} in \mathfrak{T} and H in \mathfrak{B} of finite measure such that for any subset \mathfrak{F} of a partition in \mathfrak{D} with $\mu(H \cdot V \mathfrak{F}) < \delta$, $\psi(\mathfrak{F})$ exists and $|\psi(\mathfrak{F})| < \varepsilon$. Theorem 2. 7: If for $\ll = \sqsubset$, the cell function ψ is Θ -absolutely continuous and of bounded Θ -variation, then

$\int_E \psi = \int_E \underline{D}\psi d\mu$, $\int_E \bar{\psi} = \int_E \bar{D}\psi d\mu$ and these integrals are finite. Several results of

§ 2 (e. g. Th. 2. 7) are formulated for $\ll = \sqsubset$. In § 3 the author exhibits conditions on (\mathfrak{T}, \ll) securing the coincidence of the \ll -derivates and \ll -integrals with the \sqsubset -derivates and \sqsubset -integrals for universally absolutely continuous cell functions.

Condition R expresses substantially the validity of a lemma of D. Rutovitz (O. Haupt-G. Aumann-Chr. Pauc, loc. cit., p. 232). Condition D : For any

$\mathfrak{T} \in \mathfrak{T}$ and any disjoint finite set $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{R}$, such that, corresponding to any cell $J \in \mathfrak{F}$ there is $\mathfrak{C} \in \mathfrak{T}$ with $J \in \mathfrak{C}$ and $\mathfrak{C} \gg \mathfrak{T}$, there exists \mathfrak{Z} in \mathfrak{T} with $\mathfrak{T} \ll \mathfrak{Z}$ and $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{Z}$.

Under condition D , V is equivalent with Condition V_0 : For any $\varepsilon > 0$, any fine covering of any $A \in \mathfrak{B}$ of finite measure includes a finite disjoint set \mathfrak{P} with $\mu(A - A \cdot V \mathfrak{P}) \leq \varepsilon$. In § 4 and 5, (E, \mathfrak{B}, μ) is a measure space, μ is σ -finite, μ^* the completion of μ , $E \in \mathfrak{B}$. \mathfrak{N} : set of the μ -nullsets, \mathfrak{N}^* : σ -ideal of the μ^* -nullsets. The

definition of § 1–3 are transposed via $\mathfrak{B}/\mathfrak{N}$ and the quotient measure. Thus $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{R}$ is a fine covering of the set $A \in \mathfrak{B}$ if, corresponding to any terminal subset \mathfrak{D} of \mathfrak{T} , $\mathfrak{Q} \cdot \cup \mathfrak{D}$ includes an enumerable subset \mathfrak{M} with $A \subseteq \cup \mathfrak{M} \bmod \mathfrak{N}^*$. Condition V

becomes: To any $\varepsilon > 0$ any terminal subset \mathfrak{G} of \mathfrak{T} , and any fine covering \mathfrak{Q} of a set $A \in \mathfrak{B}$ of finite measure, there exists a finite subset \mathfrak{P} of \mathfrak{Q} included in a partition of \mathfrak{G} , for which $\mu(A - A \cdot \cup \mathfrak{P}) \leq \varepsilon$. The pointwise derivates of a cell function ψ

are denoted by $\bar{D}^* \psi$ and $\underline{D}_* \psi$. Condition L : Any fine covering $\mathfrak{Q} \bmod \mathfrak{N}^*$ of any set $M \subseteq E$ includes an enumerable subset covering $M \bmod \mathfrak{N}^*$. Theorem 4. 2: Let

\mathfrak{T} admit an enumerable cofinal subset. Then $\bar{D}\psi \leq \bar{D}^* \psi \bmod \mathfrak{N}^*$ holds for any cell function. Condition L is necessary for $\bar{D}\psi = \bar{D}^* \psi \bmod \mathfrak{N}^*$, ψ denoting any non-negative μ -Lipschitzian cell function, and suffices to secure the validity of this

equality for any cell function. § 5 gives examples: \mathfrak{R} = set of all \mathfrak{B} -sets of finite positive measure, \mathfrak{T} = set of all cell partitions of E . De la Vallée Poussin-Jessen nets $\ll = \sqsubset$ satisfy V_0 but not V .

Chr. Pauc.

Pauc, Chr. et A. Revuz: Sur une formule générale d'intégration par parties. *Ann. Mat. pura appl.*, IV. Ser. **42**, 307—312 (1956).

In questo lavoro viene dimostrata una formula d'integrazione per parti in uno spazio X topologico e ordinato nel senso adottato dal Revuz stesso in *Inst. Fourier* **6** (1955/56), 187—269 (1956). Si indichi con $\inf x y$ quello dei due punti x e y di X che precede l'altro nell'ordinamento di X , con $C_-(x)$ l'insieme costituito da tutti i punti y di X per i quali $y < x$, con $S(x, u_1, \dots, u_n)$ l'insieme $C_-(x) - \bigcup_{i=1}^n C_-(u_i)$, e, se $U(x)$ è una funzione reale definita su X , con ΔS si indichi la funzione d'insieme

$$\Delta S = U(x) - \Sigma_1 U(\inf x u_i) + \dots + (-1)^p \Sigma_p U(\inf x u_{i_1} \dots u_{i_p}) + \dots \\ \dots + (-1)^n \Sigma_n U(\inf x u_{i_1} \dots u_{i_n}),$$

ove con Σ_p si intende la somma estesa a tutte le combinazioni di classe p degli indici $1, \dots, n$. Una funzione $U(x)$ definita in X dicesi a variazione limitata, se per ogni S di X si ha: $\sup_{i=1}^n |\Delta(S_i)| < +\infty$ ove $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n$ è una decomposizione di S in insiemi a due a due disgiunti. D'altra parte si ha che condizione necessaria e sufficiente perchè, assegnata una funzione $U(x)$ in X , esista una misura di Radon m_U definita sui boreliani σ -limitati di X (cioè i boreliani ognuno dei quali è contenuto nella riunione di una infinità numerabile di compatti) tale che $m[C_-(x)] = U(x)$, è che $U(x)$ sia a variazione limitata e continua a destra. Pertanto, se \tilde{X} è uno spazio il quale possa riguardarsi topologico e ordinato rispetto a due ordinamenti diversi, l'uno duale dell'altro, e $U(x)$ è una funzione a variazione limitata e continua a destra in uno di quei due ordinamenti, esiste una funzione $U^*(x)$ tale che $m_U[C_+(x)] = U^*(x)$ e questa funzione è a variazione limitata e continua a destra nell'ordinamento duale del precedente. Gli Autori dimostrano allora che, se $U(x)$ e $V(x)$ sono due funzioni a variazione limitata e continue a destra in \tilde{X} , sussiste la formula d'integrazione per parti: $\int_{\tilde{X}} V dm_U = \int_{\tilde{X}} U^* dm_V$. L. De Vito.

Stoljarov, N. A.: Über eine Verallgemeinerung des Stieltjesschen Integrals. *Ukrain. mat. Žurn.* **8**, 330—334 (1956) [Russisch].

L'A. donne la généralisation suivante de l'intégrale de Stieltjes: Soient f et φ deux fonctions réelles, finies sur $[a, b]$, et ψ une fonction continue, strictement croissante sur $[a, b]$. Pour $a < x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b$, posons

$$S = \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \frac{[\psi(x_{k+1}) - \psi(x_k)]\varphi(x_{k-1}) - [\psi(x_{k+1}) - \psi(x_{k-1})]\varphi(x_k) + [\psi(x_k) - \psi(x_{k-1})]\varphi(x_{k+1})}{[\psi(x_{k+1}) - \psi(x_k)][\psi(x_k) - \psi(x_{k-1})]}.$$

Si S tend vers une limite déterminée quand $\alpha = \max(x_k - x_{k-1})$ tend vers zéro, alors on dit que cette limite est l'intégrale généralisée de Stieltjes et on écrit

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} S = \int_a^b f(x) \frac{d^2\varphi(x)}{d\psi(x)}.$$

Pour $\psi(x) = x$ on obtient l'intégrale étudiée par H. Hahn [*S.-Ber. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl.* **1925**, 449—470 (1925)] et L. Kantorovič (*ce Zbl.* **11**, 60). On établit des conditions suffisantes pour l'existence de (1). Par exemple, si $f'(x)$ et $\varphi'(x) \neq 0$ existent et sont continues et si $\varphi(x)$ est à variation bornée sur $[a, b]$ et possède une dérivée à droite, resp. à gauche, au point a , resp. b , alors (1) existe. Si, en outre, $\varphi(x)$ possède aux points $a = c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_i < c_{i+1} < \dots < c_k < c_{k+1} = b$ des dérivées unilatérales finies, alors

$$\int_a^b f(x) \frac{d^2\varphi(x)}{d\psi(x)} = \sum_{i=0}^k \int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x) \frac{d^2\varphi(x)}{d\psi(x)} + \sum_{i=1}^k \frac{f(c_i)}{\varphi'(c_i)} [\varphi'_+(c_i) - \varphi'_-(c_i)].$$

Il résulte ainsi qu'une égalité donnée par L. V. Kantorovič (loc. cit.) est fausse. On donne un théorème d'intégration par parties pour l'intégrale (1) et on établit une relation entre l'intégrale de Hellinger et l'intégrale (1). *S. Marcus.*

Peyovitch, T.: Sur quelques théorèmes élémentaires des intégrales généralisées. *Commentarii math. Univ. Sancti Pauli* **5**, 77—80 (1956).

Per $x \geq a$ sia $f(x)$ una funzione integrabile, e sia $\varphi(x)$ una funzione tale che sia $\varphi(x) \rightarrow \infty$ per $x \rightarrow \infty$ e che abbia derivata positiva e integrabile. Dei teoremi dimostrati dall'A. riportiamo il seguente: Se per $x \rightarrow \infty$ è $\int_x^\infty f(t) dt = o(1)$, allora per $x \rightarrow \infty$ risulta $\varphi^k(x) \int_x^\infty \frac{f(t)}{\varphi^k(t)} dt = o(1)$, $\int_x^\infty \varphi^{k-1}(x) \varphi'(x) dx \int_x^\infty \frac{f(t)}{\varphi^k(t)} dt = o(1)$, ove φ è una costante positiva. *S. Cinquini.*

Rogers, C. A.: Two integral inequalities. *J. London math. Soc.* **31**, 235—238 (1956).

Rogers, C. A.: A single integral inequality. *J. London. math. Soc.* **32**, 102—108 (1957).

$f_1(x), \dots, f_k(x)$ seien nichtnegative integrierbare Funktionen im n -dimensionalen Euklidischen Raum und $f_1^*(x), \dots, f_k^*(x)$ die zugehörigen zentralsymmetrisierten Funktionen [die dadurch gekennzeichnet sind, daß $f_i^*(x)$ nur von der Länge des Vektors x abhängt und für jedes positive t die Menge der x mit $f_i^*(x) > t$ das gleiche Maß hat wie die Menge der x mit $f_i(x) > t$]. Sind weiter c_{ij} ($i = 1, \dots, k$; $j = 1, \dots, m$) irgendwelche Konstanten, so ist

$$\int \cdots \int \prod_{i=1}^k f_i \left(\sum_{j=1}^m c_{ij} x_j \right) dx_1 \cdots dx_m \leq \int \cdots \int \prod_{i=1}^k f_i^* \left(\sum_{j=1}^m c_{ij} x_j \right) dx_1 \cdots dx_m,$$

wo dx_j das Volumelement im n -dimensionalen Raum der Vektoren x_j bedeutet. In der ersten Note werden zwei Spezialfälle dieses Satzes, in der zweiten der allgemeine Fall behandelt. Der Satz wird zuerst für $n = 1$ bewiesen und der Fall $n > 1$ dann durch Steinersche Symmetrisierung auf den eindimensionalen zurückgeführt. Für Anwendungen auf die Geometrie der Zahlen s. die Arbeit des Verf., dies. Zbl. **71**, 274. *M. Kneser.*

Cheng, Min-Teh and Yung-Hoo Chen: Fractional integrals of functions of several variables with applications to the theory of approximation. *Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III* **4**, 639—641 (1956).

$F(P)$ étant dans R^m une fonction périodique de période 1 relativement à chaque variable, d'intégrale nulle dans le cube unité, de coefficients de Fourier $c_{n_1 \dots n_m}$, l'A. définit une intégrale d'ordre fractionnaire α $I_\alpha^*(F)$ en posant

$$A_\nu(P) = \sum_{n_1^2 + \dots + n_m^2 = \nu} c_{n_1 \dots n_m} e^{2\pi i(n_1 x_1 + \dots + n_m x_m)}$$

$$I_\alpha^*[F(P)] = \lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{\nu \leq R^2} \left(1 - \frac{\nu}{R^2}\right)^{\sigma_m} \frac{A_\nu(P)}{(2\pi)^\alpha \nu^{\alpha/2} e^{\pi \alpha/2}}, \quad \sigma_m = \left[\frac{m-1}{2}\right] + 1, \quad \alpha \geq 0.$$

$I_\alpha^*(F)$ coïncide avec celle de M. Riesz (ce Zbl. **33**, 276) pour $0 < \alpha < 1$. Une condition de Lipschitz $\text{Lip}^* \alpha$ étant définie par

$$\omega^*(\varrho) = \max_{0 \leq t \leq \varrho} \left| \frac{1}{S(t)} \int_{S(P,t)} [F(R) - F(P)] dR \right| = O(\varrho^\alpha)$$

où $S(t)$ est la surface de la sphère $S(P, t)$. Si $F \in \text{Lip } \alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, on a $I_\beta^*(F) \in \text{Lip}^*(\alpha + \beta)$ pour $0 < \beta < 1$. Définition d'un Laplacien $\Delta^\beta F = \Delta I_{2(1-\beta)}^*(F)$. Si $\Delta^\beta F(x, y) = G(x, y)$, $0 < \beta < 1$, est continue, alors $I_{2\beta}^*(G) = F$. Résultats concernant l'approximation des fonctions de deux variables par des polynômes trigonométriques. Les démonstrations seront publiées au „Science Report of Peking University“. *A. Revuz.*

Pucci, Carlo: Alcune proprietà degli involucri. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **20**, 294—298 (1956).

Pucci, Carlo: A proposito di un teorema riguardante la misura di involucri di insiemi. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **12**, 420—421 (1957).

Sei X eine beschränkte Menge des n -dimensionalen Euklidischen Raumes, X_t die Menge aller Punkte, die von X höchstens den Abstand t haben, Y_t der Rand von X_t , m das n -dimensionale Lebesguesche Maß und μ das $(n-1)$ -dimensionale Minkowskische Flächenmaß. Der Verf. zeigt, daß für fast alle Werte $t > 0$ die Menge Y_t nach Minkowski meßbar und das Maß $\mu(Y_t) = d m(X_t)/dt$ ist. *M. Kneser.*

Cecconi, Jaurès: La disuguaglianza di Cavalieri per la k -area secondo Lebesgue in un n -spazio. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **42**, 189—204 (1956).

Let $J = \{u: u = (u_1, \dots, u_k), |u_i| \leq 1, i = 1, \dots, k\}$ be the unit k -cell in E_k and let $(T, J): x = x(u) = \{x_1(u), \dots, x_n(u)\}$ be a continuous transformation from J into E_n . Let $f(x)$ be a Lipschitz function of constant H defined on E_n , and for each real t , let $D = D^-(t)$ be the set of points in J for which $f[x(u)] < t$. The author considers the boundary D^* of D and defines a $(k-1)$ -area $\alpha_{k-1}[x(u), D^*]$ of the image of D^* under T by considering polyhedral varieties (P_j, F_j) converging uniformly to (T, J) , where $\{F_j\}$ is a sequence of figures invading D . The area α_{k-1} is then defined as the lower limit of the $(k-1)$ -dimensional areas of the restrictions of the P_j 's to F_j^* (the boundary operation is not relative to E_k , even though this is not explicitly stated). The quantity $\alpha_{k-1}[x(u), D^*] = \alpha_{k-1}[S(t)]$ can be interpreted as the area of a „section“ $S(t)$ of the k -variety (T, J) . The author proves that $\alpha_{k-1}[S(t)]$ reduces (in the case $k=2, n=3$) to the generalized length defined by L. Cesari (Surface area, Princeton 1956). The first part of the paper contains some lower semi-continuity relations of α_{k-1} analogous to those of L. Cesari (loc. cit. chapter VI). If $L_k(T, J)$ denotes the k -dimensional Lebesgue area of (T, J) the

main result $H \cdot L_k(T, J) \geq \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_{k-1}[S(t)] dt$ is an extension of L. Cesari's Cavalieri inequality. In the author's proof of the invariance of α_{k-1} with respect to Fréchet equivalent mappings it is not stated explicitly that only homeomorphisms are permitted which can be approximated by quasi-linear homeomorphisms.

Ch. J. Neugebauer.

Cecconi, Jaurès: Una osservazione sulla convergenza in variazione e in area. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **11**, 524—525 (1956).

Let (T, A) be a continuous mapping from the unit square $A \subset E_2$ into E_3 , and consider for each plane $\pi \subset E_3$, the plane mapping $(T_\pi, A) = (\tau_\pi T, A)$ where τ_π is the orthogonal projection of E_3 onto π . Both L. Cesari (Surface Area, Princeton 1956, p. 393) and T. Rado (this Zbl. **33**, 172) have proved the following theorem: Let (T_n, A) be a sequence of continuous mappings converging uniformly to (T, A) with $L(T, A) < \infty$, where $L(T, A)$ denotes the Lebesgue area of (T, A) . If (T_n, A) converges in area to (T, A) , i. e., if $L(T_n, A) \rightarrow L(T, A)$, then (T_n, A) converges in variation to (T, A) , i. e., for each $\pi \subset E_3$, $L(T_{\pi, n}, A) \rightarrow L(T_\pi, A)$. By interpreting Lebesgue area as Cauchy area and by using a fundamental inequality of L. Cesari (loc. cit., p. 295) the author proves the converse of the above theorem: If (T_n, A) converges uniformly to (T, A) and if for each $\pi \subset E_3$, $L(T_{\pi, n}, A) \rightarrow L(T_\pi, A)$, then $L(T_n, A) \rightarrow L(T, A)$.

Ch. J. Neugebauer.

Myers jr., Wm. M.: Functionals associated with a continuous transformation. Pacific J. Math. **6**, 517—528 (1956).

Let S be a Fréchet surface of the type of the 2-cell in Euclidean three-space. Reichelderfer [Trans. Amer. math. Soc. **53**, 251—291 (1943)] defined a functional $eA(S)$ called the essential area of S and Rado (Length and area, this Zbl. **33**, 170) defined a functional $a(S)$ called the lower area of S . In this paper it is shown that

$eA(S) = a(S)$ and furthermore it is shown that four other similarly defined and equally useful functionals of S yield the same value as $eA(S)$ and $a(S)$.

Earl J. Mickle.

Bakel'man, I. Ja. und A. L. Verner: Die verallgemeinerten Ableitungen der stetigen Funktionen von zwei Veränderlichen. Uspechi mat. Nauk 11, Nr. 1 (67), 173—179 (1956) [Russisch].

$f(x, y)$ sei in der ganzen Ebene definiert und stetig. Verallgemeinerte erste Ableitungen im Sinne von Sobolev (e. A. v. S.) $\partial f/\partial x, \partial f/\partial y$ werden z. B. so erklärt: Für jedes abgeschlossene Quadrat Q und jede auf Q stetig differenzierbare Funktion $\varphi(x, y)$, die auf dem Rande von Q verschwindet, existiere eine Funktion $\partial f/\partial x$ mit

$$\iint_Q f(x, y) (\partial \varphi/\partial x) dx dy = - \iint_Q \varphi(x, y) (\partial f/\partial x) dx dy.$$

Für die Existenz der e. A. v. S. ist notwendig und hinreichend, daß die Variation $W(Q)$ von $f(x, y)$ (im üblichen Sinne) auf Q für jedes Q eine absolut stetige Mengenfunktion der Q ist. Überdies ist $W(Q) = \iint_Q ((\partial f/\partial x)^2 + (\partial f/\partial y)^2)^{1/2} dx dy$. Weiter lassen

sich Funktionen $f(x, y)$, deren e. A. v. S. existieren, dadurch kennzeichnen, daß $f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)$ mittels zweier summierbarer Funktionen $f_i(x, y)$, $i = 1, 2$ in der Gestalt $\int_{L_n} (f_1 dx + f_2 dy)$ für fast alle Punktepaare (x_i, y_i) , $i = 1, 2$ und für

fast alle Streckenzüge L_n , welche (x_1, y_1) und (x_2, y_2) verbinden und aus n Strecken bestehen, die parallel zur x - oder y -Achse sind, dargestellt werden kann. Entscheidend für diese Sätze ist die Tatsache, daß eine Funktion mit e. A. v. S. endliche Tonelli-Variation auf jedem Q besitzt und umgekehrt.

L. Schmetterer.

Slobodeckij, L. N. und V. M. Babič: Über die Beschränktheit des Dirichletschen Integrals. Doklady Akad. Nauk SSSR 106, 604—606 (1956) [Russisch].

Es sei Ω ein beschränktes Gebiet des R_k , das von einer Hyperfläche S mit folgenden Eigenschaften berandet werde: (1) S besitze in jedem Punkte eine Tangentialebene. (2) Um jeden Punkt $P_0 \in S$ kann eine Kugel K_{P_0} mit einem von P_0 unabhängigen Radius ρ so beschrieben werde, daß $\Sigma_{P_0} = S \cap K_{P_0}$ die Eigenschaft von Liapounoff hat, d. h. jede zur Normalen von S in P_0 parallele Gerade schneidet höchstens einmal. (3) Werden cartesische Koordinaten in K_{P_0} so eingeführt, daß die x_n -Achse zur Normalen von S in P_0 parallel ist, so ist Σ in der Form $x_n = F(x_1, \dots, x_{n-1})$ darstellbar, wobei F stetige Ableitungen bis zur Ordnung l in der Kugel k : $\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 < \rho$ habe. Die auf S definierte Funktion f gehöre zur Klasse $A_0(S)$, wenn für jedes Teilstück Σ_{P_0} von S die auf Σ_{P_0} definierte Funktion

$$f^*(\xi) = f^*(x_1, \dots, x_{n-1}) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, F)$$

folgende Eigenschaft hat: Es sei α irgendein Einheitsvektor mit $n-1$ Komponenten und

$$\omega(h\alpha, f^*) = \left\{ \int |f^*(\xi + h\alpha) - f^*(\xi)| d\xi \right\}^{1/2}.$$

Hier wird integriert über den Durchschnitt der Kugel k mit derjenigen Kugel, die aus k durch die Verschiebung $h\alpha$ entsteht. Dann sei für alle hinreichend kleinen δ

das Integral $\int_0^\delta \left(\frac{\omega(h\alpha, f^*)}{h} \right)^2 dh \leq C$, wobei C nicht von α abhängt. Die Funktion f

gehöre zur Klasse $A_l(S)$, wenn alle Ableitungen von f bis zur Ordnung l zur Klasse $A_0(S)$ gehören. Nach diesen Definitionen wird der folgende Satz formuliert: Die Funktionen f_0, f_1, \dots, f_{k-1} seien auf S definiert. Notwendig und hinreichend dafür, daß in Ω eine Funktion $u = u(x_1, \dots, x_n)$ existiert, so daß

$$\partial^j u / \partial \bar{n}^j|_S = f_j, \quad j = 0, 1, \dots, k-1,$$

(\bar{n} = innere Normale von S) gilt, für welche das Dirichletsche Integral

$$D_k(u) = \int_{\Omega} \cdots \int \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k} \frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} \left(\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \right)^2 dx_1 \cdots dx_n$$

endlich ist, ist die Zugehörigkeit von f_j zur Klasse $A_{k-1-j}(S)$ für $j = 0, 1, \dots, k-1$.

W. Thimm.

• **Erugin, N. P.: Implizite Funktionen.** Leningrad: Verlag der Leningrader Universität 1956. 60 S. R. 2.— [Russisch].

L'A. étudie la résolution en variables réelles du système $F(x, y, z) = 0$, $\Phi(x, y, z) = 0$ au voisinage d'une solution particulière $(0, 0, 0)$ lorsque le jacobien $J = D[F, \Phi]/D[x, y]$ vérifie $J(x, y, z) \geq 0$, $J(0, 0, 0) = 0$. Dans différentes hypothèses sur F et Φ , il donne des développements de x et y en fonction de z , avec des indications sur l'intervalle de validité des développements et sur le prolongement analytique des solutions.

G. Bourion.

Golab, S. et S. Łojasiewicz: Un théorème sur la valeur moyenne θ dans la formule des accroissements finis. Ann. Polon. math. 3, 118—125 (1956).

Die Verff. suchen, wie die Funktion f beschaffen sein muß, damit $\theta(x, y)$ in $f(y) - f(x) = (y - x) f'[x + \theta(x, y)(y - x)]$ eine homogene Funktion mit dem Exponent 0 sei. Dies wird mit zwei Methoden angegriffen. Bei der ersten wird f dreimal stetig derivierbar und $f''(x) \neq 0$, bei der zweiten nur f' existierend und streng monoton vorausgesetzt. In beiden Fällen erhalten die Verff. $f(x) = a x \ln |x| + b x + c$, oder $= a \ln |x| + b x + c$ oder $= a x^d + b x + c$ (statt der letzteren sollten die zwei Lösungen $a |x|^d + b x + c$ und $a |x|^d \operatorname{sign} x + b x + c$ stehen, da ja auch negative x -Werte in Betracht kommen). Die zweite Methode erreicht ihr Ziel durch Lösung der Funktionalgleichung $f(u x) = p(u) f(x) + q(u) x + r(u)$. Es sei bemerkt, daß, wenn auch hier die Derivabilitätsbedingung als natürlich gilt, diese Funktionalgleichung auch ohne Derivierbarkeitsvoraussetzungen (nur die Meßbarkeit vorausgesetzt) mittels Ausnützung der Symmetrie der linken Seite gelöst werden kann.

J. Aczél.

Babenko, K. I.: Über ein neues Problem der Quasianalytizität und über die Fouriertransformation der ganzen Funktionen. Trudy Moskovsk. mat. Obšč. 5, 523—542 (1956) [Russisch].

Man bezeichne mit $C(l_k, m_n)$ wo l_k, m_n für ganze nicht negative k und n definierte positive Konstanten sind, die Klasse der Funktionen, die auf der ganzen Zahlengeraden den Relationen $|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq A^k B^n l_k m_n$ ($-\infty < x < \infty$) für beliebig wählbare aber für die betreffende Funktion feste positive A und B genügen. Der Verf. stellt Bedingungen dafür auf, daß es in $C(l_k, m_n)$ nicht konstante Funktionen gibt. Dabei werden allerdings (p. 527) über die Konstanten l_k und m_n Voraussetzungen gemacht, deren Tragweite schwer zu überblicken ist. Im speziellen Fall, wo $l_k = k^{k\alpha}$, $m_n = n^{n\beta}$ ist für positive α und β mit $\alpha + \beta > 1$, werden die Fourier-Transformierten der Funktionen der betreffenden Klasse diskutiert. Sodann werden die erhaltenen Ergebnisse auf einen Fall des Unitätsproblems für die Cauchysche Aufgabe angewandt.

A. Ostrowski.

Moldovan, Elena: Sur certains théorèmes de moyenne. Comun. Acad. Republ. popul. Romîne 6, 7—12 u. russ. u. französ. Zusammenfassg. 12 (1956) [Rumänisch].

On considère une famille \mathfrak{F} , à n paramètres réels a_1, a_2, \dots, a_n , de fonctions réelles $y = F(x; a_1, a_2, \dots, a_n)$, ($a \leq x \leq b$, $-\infty < a_i \leq a_i \leq b_i < +\infty$, $i = 1, \dots, n$) telles que: 1. Chaque fonction de \mathfrak{F} est continue par rapport à l'ensemble de ses $n+1$ arguments; 2. Pour chaque système de n points distincts $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ et pour chaque système de n nombres y_1, y_2, \dots, y_n appartenant au domaine des valeurs de la fonction F , le système d'équations $F(x_i; a_1, \dots, a_n) = y_i$, $i = 1, \dots, n$ admet une seule solution en a_1, \dots, a_n . On démontre quelques théorèmes de moyenne pour les fonctions de la famille \mathfrak{F} . Par exemple: Si $f(x)$ est continue sur $[a, b]$ et a, sur $[a, b]$, $n+1$ points $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$ d'intersection

avec une fonction de \mathfrak{F} , alors il existe sur (x_1, x_{n+1}) un point ξ tel que, sur chaque intervalle contenant ξ il existe $n + 1$ points distincts où $f(x)$ rencontre une fonction de \mathfrak{F} . Ce théorème contient comme cas particuliers un théorème de moyenne de T. Popoviciu [Magyar Tud. Akad. Mat. fiz. Oszt. Kózl. 4, 353—356 (1954)] et un théorème de moyenne de I. Singer [Acad. Republ. popul. Române, Bul. ști., Sect. Ști. mat. fiz. 5, 251—272 (1953)]. On établit aussi un théorème de moyenne pour l'équation différentielle $y^{(n)} = G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, mais l'auteur ne précise pas quelles sont les hypothèses faites sur la fonction G . S. Marcus.

Brunk, H. D., G. M. Ewing and W. R. Utz: Some Helly theorems for monotone functions. Proc. Amer. math. Soc. 7, 776—783 (1956).

È indicata con $F(X) \equiv F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una generica funzione reale, definita in un intervallo $R \equiv \{a_i \leq x_i \leq b_i; i = 1, 2, \dots, n\}$ dello spazio euclideo S_n ad n dimensioni. Fissati ad arbitrio due indici μ, ν tali che $1 \leq \mu < \nu \leq n$, si indichi con $R_{\mu\nu}$ la proiezione ortogonale di R sullo spazio euclideo S_{n-2} definito dalle equazioni $x_\mu = x_\nu = 0$. Se P è un qualunque punto di $R_{\mu\nu}$, l'insieme dei punti $X \in R$ aventi P per proiezione ortogonale sull' S_{n-2} , è un intervallo bidimensionale $R'_{\mu\nu}$ riferibile alle due coordinate x_μ, x_ν : si indichi con $F_{\mu\nu}(x_\mu, x_\nu; P)$ la funzione $F(X)$, al variare di X in $R'_{\mu\nu}$. Gli Autori chiamano monotona (non decrescente, rispettivamente non crescente) la $F(X)$, se essa è tale separatamente rispetto a ciascuna delle x_i ($i = 1, 2, \dots, n$), e se la differenza seconda

$$F_{\mu\nu}(\alpha_1, \alpha_2; P) + F_{\mu\nu}(\beta_1, \beta_2; P) - F_{\mu\nu}(\alpha_1, \beta_2; P) - F_{\mu\nu}(\beta_1, \alpha_2; P)$$

non cambia mai di segno (è sempre ≥ 0 , rispettivamente ≤ 0) comunque si facciano variare $\mu, \nu, P \in R_{\mu\nu}, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in R'_{\mu\nu}, \beta = (\beta_1, \beta_2) \in R'_{\mu\nu}$, con $\alpha_1 \leq \beta_1, \alpha_2 \leq \beta_2$. Lo studio di siffatte funzioni è classico: per esse gli Autori cominciano col generalizzare, al caso di n qualunque, un noto teorema di W. H. Young [Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 93, 28—41 (1916)] ed E. W. Hobson (The theory of functions of a real variable ecc., 2. Ediz., Cambridge 1921, pp. 391—392; quest'Autore chiama quasi-monotona una funzione monotona definita come sopra). Ma i risultati seguenti sono da ritenersi in gran parte nuovi (almeno nella perspicua enunciazione datane dagli Autori) e di notevole interesse. Viene dimostrato il teorema: se $\{F_q(X)\}$ ($q = 1, 2, \dots$) è una successione di funzioni monotone non decrescenti (non crescenti) ed equilimitate in R ($|F_q| \leq A$, costante indipendente da q), esistono una successione subordinata $\{F_{q_i}(X)\}$ ($i = 1, 2, \dots$) ed una funzione $F(X)$ monotona non decrescente (non crescente) e limitata in R ($|F| \leq A$), tali che $\lim_{i \rightarrow \infty} F_{q_i}(X) = F(X)$ in tutto R . Altri

risultati vengono molto efficacemente espressi, introducendo il concetto di diagramma monotono („monotone graph“). Per un generico punto $C \equiv (c_1, c_2, \dots, c_n) \in R$, viene indicato con $[A, C]$ l'insieme dei punti $X \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R$ tali che $a_i \leq x_i \leq c_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) e, se $a_i < c_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), viene indicato con $[A, C)$ l'insieme dei punti $X \in R$ tali che $a_i \leq x_i < c_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). È chiamata diagramma monotono la frontiera d'un insieme, misurabile secondo Lebesgue, che sia somma d'insiemi (in numero finito od infinito) dei tipi $[A, C]$ oppure $[A, C)$ [Le componenti dei due tipi hanno evidentemente importanza essenziale nello studio di siffatti diagrammi monotoni]. Gli Autori si pongono così in grado di analizzare una classe più vasta di funzioni $F(X)$, anch'esse definite in R , anch'esse chiamate monotone (non decrescenti, rispettivamente non crescenti), ma suscettibili di assumere anche valori infiniti in R : per es. le $F(X)$ non decrescenti in R , sono per definizione tali separatamente rispetto a ciascuna delle x_i ($i = 1, 2, \dots, n$), e le loro differenze seconde sono sempre ≥ 0 , quando i punti indicati con $(\alpha_1, \alpha_2; P), (\beta_1, \beta_2; P), (\alpha_1, \beta_2; P), (\beta_1, \alpha_2; P)$ variano comunque, ma mantenendosi sempre, tutti e quattro, estranei all'involucro dell'insieme $E \subset R$ in cui $F(X) = \pm \infty$. Orbene si dimostra che: a) se $F(X)$ è non decrescente in R , i suoi eventuali punti di discontinuità sono contenuti in un insieme costituito dalla somma di un numero finito o di un'infinità

numerabile d'iperpiani $x_i = \alpha_i^j$ ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots$) e di due diagrammi monotoni; b) se $\{F_q(X)\}$ è una successione di funzioni non decrescenti in R , esistono una successione subordinata $\{F_{q_i}(X)\}$ ($i = 1, 2, \dots$) ed una funzione $F(X)$ non decrescente in R , tali che $\lim_{i \rightarrow \infty} F_{q_i}(X) = F(X)$ in tutto R , fatta al più eccezione

dei punti di R che appartengono a due diagrammi monotoni. Altri interessanti risultati riguardano le funzioni $F(X)$ che sono monotone soltanto rispetto a ciascuna delle x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) separatamente. T. Viola.

Kurepa, Svetozar: Convex functions. Periodicum math.-phys. astron., II. Ser. 11, 89—93, serbokroatische Zusammenfassg. 93—94 (1956).

Die Hauptaussage dieser Arbeit lautet: Falls $f(x)$ für jedes Paar $x, y \in (a, b)$ die Jensensche Ungleichung $2f(\frac{1}{2}(x+y)) \leq f(x) + f(y)$ erfüllt und auf einer Menge $T \subset (a, b)$ beschränkt ist, für die das innere Maß von $T + \hat{T}$ positiv ist, dann ist $f(x)$ in (a, b) stetig [vgl. A. Ostrowski, J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. 38, 54—62 (1929); H. Kestelman, Fundamenta Math. 34, 144—147 (1947)]; in dieser Aussage kann das innere Maß nicht durch das äußere ersetzt werden. Es wird auch bewiesen: Falls $|f(x)| = 1$, $f(x+y) = f(x)f(y)$ für alle reellen x, y gilt und f auf einer beschränkten abgeschlossenen Menge T mit der obigen Eigenschaft

stetig ist, so ist f überall stetig, und das innere Maß von $\sum_{k=1}^n r_k H$, wo H die Hamel-Basis [Math. Ann. 60, 459—462 (1905)] und die r_k rationale Zahlen sind, ist gleich Null. Es werden aus diesen Sätzen verschiedene Folgerungen gezogen.

J. Aczél.

Klee jr., V. L.: Solution of a problem of E. M. Wright on convex functions. Amer. math. Monthly 63, 106—107 (1956).

Die Frage von E. M. Wright (dies. Zbl. 57, 48) nach der Existenz einer reellen konvexen Funktion mit nicht monotonen Steigungen konstanter Schrittlänge wird durch Konstruktion einer Funktion f folgender Art beantwortet: Es ist

$$f(rx + (1-r)y) \leq rf(x) + (1-r)f(y)$$

für alle reellen x und y und alle rationalen r ; ferner gibt es zu je zwei verschiedenen reellen x und y ein positives p mit $f(x+sp) - f(x) < f(y+sp) - f(y)$ für alle rationalen $s > 0$. Die Konstruktion benutzt einen Isomorphismus der reellen Geraden und der reellen Zahlenebene, beide betrachtet als Vektorräume über dem Körper der rationalen Zahlen. G. Aumann.

Kenyon, Hewitt: Note on convex functions. Amer. math. Monthly 63, 107 (1956).

Das E. M. Wrightsche Problem (siehe vorstehendes Referat) erledigt die Funktion $f(x) = \sum_{h \in H} r_{x,h}^2$, wo $r_{x,h}$ die rationalen Koeffizienten der Darstellung $\sum_{h \in H} r_{x,h} h$ der reellen Zahl x bezüglich einer Hamelbasis H bedeuten; für f gilt $f(\frac{1}{2}(a+b)) \leq \frac{1}{2}(f(a) + f(b))$ für alle reellen a und b , aber nicht $f(a+c) - f(a) \leq f(b+c) - f(b)$ für alle reellen a, b, c mit $a \leq b$ und $c > 0$. G. Aumann.

Bellman, Richard: On explicit solutions of some trinomial equations in terms of the maximum operation. Math. Mag. 30, 41—44 (1956).

The unique positive root of the trinomial equation $\Phi(x) + ax = b$, where $\Phi(x)$ denotes x^n or generally a strictly convex or strictly concave function of x , can be exhibited in explicit form if the operation of taking the maximum or minimum of a function is allowed. Upper and lower bounds for solutions of equations can in the same manner be obtained using Newton's method. E. J. Nyström.

Marcus, Solomon: Sur une généralisation des fonctions de G. Hamel. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 20, 584—589 (1956).

Die Hamelschen Funktionen sind die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$, als ihre Verallgemeinerung werden die vom Ref.

eingeführten (dies. Zbl. 34, 326; 38, 202) internen Funktionen untersucht, d. h. diejenigen, bei denen aus $f(x) \neq f(y)$ immer $\min(f(x), f(y)) < f(\frac{1}{2}(x+y)) < \max(f(x), f(y))$, aus $f(x) = f(y)$ immer $f(x) = f(\frac{1}{2}(x+y)) = f(y)$ folgt. Von der Bemerkung ausgehend, daß diese Eigenschaft gegenüber monotonen Abbildungen invariant ist, werden Beispiele von nichtmonotonen internen Funktionen gegeben, die nichtkonvex bzw. beschränkt sind, ferner von solchen, für die die Menge $E_f = \{(x, y) : y = f(x)\}$ nirgends dicht in der Ebene bzw. zusammenhängend ist. Als deskriptives Analogon eines Satzes des Ref. wird bewiesen, daß eine nicht monotone interne Funktion auf keiner Menge von der zweiten Kategorie und von der Baireschen Eigenschaft die Bairesche Eigenschaft besitzt. Ist $f(x)$ nichtmonoton und intern, so besitzt sie entweder in keinem Punkt die lokale Darboux'sche Eigenschaft (s. Czászár, dies. Zbl. 49, 42) und dann wird die Menge E_f total unzusammenhängend, oder ist sie Darboux'sch. Mit Hilfe dieser Ergebnisse werden Beispiele von verschiedenen pathologischen Mengen- und Funktionstypen gegeben.

A. Császár.

Allgemeine Reihenlehre:

Allen, H. S.: Transformations of sequence spaces. J. London math. Soc. 31, 374—375 (1956).

The notation and definitions used are those in R. G. Cooke, Infinite matrices and sequence spaces (this Zbl. 40, 25). A sequence space is a (complex) linear space whose elements are sequences of complex numbers. Let α and β be sequence spaces and $L(\alpha, \beta)$ denote the set of all infinite matrices which map α into β . The symbol $\alpha \rightarrow \beta$ denotes the subset of $L(\alpha, \beta)$ consisting of all those matrices $A = (a_{nk})$ such that $\sum a_{nk} x_k$ ($n = 1, 2, \dots$) converges absolutely. A sequence space α is normal if whenever $x = (x_n) \in \alpha$ and $y = (y_n)$ is such that $|y_n| \leq |x_n|$ for all n , then $y \in \alpha$. It is easily proved that if α is normal then $\alpha \rightarrow \beta = L(\alpha, \beta)$. The author characterizes the sets $L(\alpha, \beta)$ and $\alpha \rightarrow \beta$ when β is arbitrary and α is either C (the set of sequences whose terms are all equal after a certain stage) or D (the set of all alternating sequences $x = (x_n)$ for which $x_{n+1} = -x_n$ for $n \geq n_0$). We quote one of these. $L(C, \beta)$ is the set of all matrices $A = (a_{nk})$ such that (1) column vectors of A are in β ; (2) the series $y_n = \sum_i a_{ni}$ ($n = 1, 2, \dots$) is convergent; and (3) the sequence $y = (y_n) \in \beta$. Also $C \rightarrow \beta$ consists of those matrices in $L(C, \beta)$ whose rows form absolutely convergent series. If α is any sequence space, the set of all sequences $y = (y_n)$ such that $\sum |x_n y_n|$ is convergent for every $x = (x_n) \in \alpha$ is called the dual of α and denoted by α^* . The space α is called perfect if $\alpha = \alpha^{**}$. The author proves also a result relating to perfect spaces. Let α contain all sequences whose terms are zero after a certain stage and be normal. Let β be perfect and $\alpha^{**} \supset \lambda \supset \alpha$ then $\alpha \rightarrow \beta = \lambda \rightarrow \beta = L(\lambda, \beta) = \alpha^{**} \rightarrow \beta$ and $(\alpha \rightarrow \beta)' = \beta^* \rightarrow \alpha^*$ where ' denotes transposed matrices. Some corollaries of this theorem are cited.

V. Ganapathy Iyer.

Makarem, H. H. A. El: Some results on matrix spaces. I. II. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 59, 490—498, 499—510 (1956).

All the results given in this paper have been previously published by the author [Rev. Economics, polit. Business Studies, Fac. of Commerce, Cairo Univ. 4, Nr. 1 (1956)]. They consist of necessary and sufficient conditions for a matrix to transform one sequence space of specified type into another, with allied results on projective boundedness, projective convergence, and strong projective convergence of a sequence of matrices. The reviewer had already conveyed to the author, before the latter published these papers, that all these isolated results, with their similar proofs, are very probably particular cases of a small number of much more general theorems. As an example of this, the author's (II), p. 493, is a particular case of a theorem

recently given by H. S. Allen [(preced. review), Theorem I, p. 374]. Some other results of the author have been more recently generalized in this way by H. R. Chillingworth (not yet published). The author's condition (iii) in (II), p. 493, can in any case be replaced by the simpler condition that $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} \right|$ converges. If the author had succeeded in covering all his results by a few theorems of greater generality, the results would have been more impressive.

R. G. Cooke.

Ramanujan, M. S.: Existence and classification of products of summability matrices. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **44**, 171—184 (1956).

There are four methods of defining generalized limits or generalized sums by infinite matrices, viz., sequence-to-sequence, series-to-sequence, series-to-series, and sequence-to-series. The paper starts with a brief resumé of these, and is then concerned with the existence and classification of products of matrices belonging to one or more of the above four classes. In the final section some inclusion theorems relating to sequence-to-series transformations are given. This paper and one by F. Gerrish [Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **60**, 60—72 (1957)] overlap somewhat, but are on the whole complementary. This is noted by both authors at the conclusion of their respective papers.

R. G. Cooke.

Petersen, G. M.: Summability methods and bounded sequences. J. London math. Soc. **31**, 324—326 (1956).

The following theorem is due to A. Brudno [Mat. Sbornik n. Ser. **16**, 191—247 (1945)]: Let every bounded sequence summable by a Toeplitz matrix A also be summable by a Toeplitz matrix B . Then it is summable to the same value by B as by A . Since Brudno's proof (in Russian) is long and complicated, it appeared desirable to have a simpler proof. There has been (for some time) such a proof, unpublished, due to P. Erdős and G. Piranian. The present note supplies another (very neat) simple proof, based on the following theorem: If two regular (i. e., Toeplitz) matrices A and B sum a bounded sequence $\{s_n\}$ to different sums, then there exists a bounded sequence which is summable- A , but not summable- B . Brudno's theorem is clearly an immediate deduction from this.

R. G. Cooke.

Petersen, G. M.: Almost convergence and two matrix limitation methods. Math. Z. **66**, 225—227 (1956).

Verf. betrachtet die beiden Matrixverfahren, die durch $C\text{-lim } s_n = \lim \frac{1}{2} (s_{2m} + s_{2m+1})$ bzw. $B\text{-lim } s_n = \lim \frac{1}{2} (s_{2m+1} + s_{2m+2})$ definiert sind, sowie die Fastkonvergenz F von Lorentz (dies. Zbl. **31**, 295). Bekanntlich bedeutet $F\text{-lim } s_n = s$, daß $\lim_p (s_n + \dots + s_{n+p})/p = s$ gleichmäßig in n gilt. Theorem 1: Fastkonvergenz einer Folge $\{s_n\}$ ist gleichbedeutend damit, daß $\{s_n\}$ Summe einer beschränkten B -limitierbaren und einer beschränkten C -limitierbaren Folge ist. Satz 2: Kein zeileninfinites Matrixverfahren ist äquivalent mit oder stärker als C . Letzteres Ergebnis wurde auch von Erdős-Piranian, dies. Zbl. **37**, 327, gefunden. Weiter bemerkt Verf.: B, C und ein gewisses permanentes Matrixverfahren D (das in Goffmann-Petersen, dies. Zbl. **70**, 286, konstruiert wurde) sind so beschaffen, daß kein permanentes Matrixverfahren B, C und D auch nur für beschränkte Folgen enthält.

K. Zeller.

Kuttner, B.: On cores of sequences and of their transforms by regular matrices. Proc. London math. Soc., III. Ser. **6**, 561—580 (1956).

An infinite matrix A is said to be core regular if (i) A is regular (i. e., a T -matrix), and (ii) for any sequence $\{s_m\}$, the core of its A -transform $\{\sigma_n\}$ is contained in the core of $\{s_m\}$. The object of this paper is to obtain necessary and sufficient conditions that a regular matrix should be core regular. If A is any regular matrix, write $A = B + iC$, where $B = (b_{n,m})$, $C = (c_{n,m})$, $a_{n,m} = b_{n,m} + ic_{n,m}$; $b_{n,m}$, $c_{n,m}$ real. Then B is a real regular matrix, and C is a real matrix which transforms any convergent sequence into a null sequence. Theorem 1. In order that A should be

core regular, it is necessary and sufficient that (i) B is core regular, (ii) there are integers N, M such that $c_{n,m} = 0$ for $n > N$ and $m > M$. The author proves, in Lemma 5, that in order that a real regular matrix A should be core regular, it is necessary and sufficient that for every sequence $\{s_m\}$ of real non-negative numbers, either

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n \geq 0, \text{ or}$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = -\infty.$$

A real core regular matrix is said to be of Type I if (1) holds for every $\{s_m\}$, and of Type II if there are some sequences $\{s_m\}$ for which (2) holds. A real matrix A is said to be totally regular if it is regular and if, for any sequence $\{s_m\}$ of real numbers such that $s_m \rightarrow +\infty$ as $m \rightarrow \infty$, we have $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = +\infty$. The following theorems

are then established. Theorem 2. In order that a real matrix A should be core regular of Type I, it is necessary and sufficient that it should be totally regular. Theorem 3. Suppose that A is a real core regular matrix of Type II. Then if $\{s_m\}$ is a sequence of real non-negative numbers for which $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = -\infty$, then

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_{n,m} = -\infty \quad \text{for all sufficiently large } n, \text{ where } \sigma_{n,m} = \sum_{k=0}^m a_{n,k} s_k.$$

Theorem 4. In order that a real regular matrix A should be core regular of Type II, it is necessary and sufficient that (a) all except possibly a finite number of rows of A contain an infinity of non-zero elements; (b) there is an integer N such that, for all $n > N$, there is a $\mu(n)$ with the property that whenever $m > \mu(n)$, then $a_{n,m} \leq 0$; (c) there are non-negative numbers $\lambda_{n,m}$ defined for all non-negative integers n, m with the following properties: (i) for any fixed m , the sequence $\{\lambda_{n,m}\}$ is non-increasing; (ii) for any fixed n , the series $\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_{n,m}$ is convergent; (iii) for all n, m ,

$a_{n,m} \geq -\lambda_{n,m}$; (iv) given any set S of an infinity of values of n , there exist a finite subset S^* of S , integers N, M , and a number $\delta > 0$, such that, for each $m > M$, $a_{n,m} \leq -\delta \lambda_{N,m}$ for at least one n of S^* . As remarked by the author, Theorem 2 is included in a result of C. A. Rogers [(this Zbl. 43, 62) Theorem 15]. R. G. Cooke.

Bajšanski, Bogdan M.: Sur une classe générale de procédés de sommations du type d'Euler-Borel. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. 10, 131–152 (1956).

In dieser Arbeit wird die Klasse derjenigen Limitierungsverfahren (E, f) studiert, deren Transformationsmatrix (a_{nv}) mit Hilfe einer in $z = 0$ regulären Funktion $f(z)$ durch $[f(z)]^n = \sum_{v=0}^{\infty} a_{nv} z^v$ erklärt wird. Die Verfahren E_q (Euler-Knopp),

S_r (Meyer-König), B_I (Borel-Gaier) ordnen sich in diese Klasse ein, ebenso ein neues Verfahren $E(\alpha, \beta)$ von Karamata, das durch $f(z) = [\alpha + (1 - \alpha - \beta)z]/(1 - \beta z)$ (α, β reell) erzeugt wird. [Bemerkung des Ref.: In Wirklichkeit entsteht das Verfahren $E(\alpha, \beta)$ durch Schaltung eines E_q -Verfahrens vor ein S_r -Verfahren, bei geeigneter Wahl von q und r .] Das erste Hauptproblem ist die Frage der Permanenz des Verfahrens (E, f) . Hinreichend dafür sind folgende Bedingungen: a) Die Funktion $f(z)$ ist regulär in $|z| \leq 1$, und es ist $|f(z)| < 1$ für $|z| \leq 1$, $z \neq 1$, aber $f(1) = 1$; b) an der Stelle $z = 1$ zeigt $f(z)$ das Verhalten

$$f(z) = z^a + A i^p (z - 1)^p + o(|z - 1|^p), \quad a = f'(1), \quad \Re(A) \neq 0, \quad p > 1.$$

Beim Beweis werden die Zeilennormen $\sum_{v=0}^{\infty} |a_{nv}|$ mit Hilfe der Cauchyschen Koeffizientenformel für die a_{nv} abgeschätzt. Auch der Fall wird diskutiert, daß mehrere (endlich viele) Stellen z_k auf $|z| = 1$ mit $|f(z_k)| = 1$ vorliegen. Ist $|f(z)| = 1$ auf ganz $|z| = 1$ und $f(z) \equiv e^{i\theta} \cdot z^k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), so ist das zugehörige (E, f) -Verfahren nicht permanent; speziell ergibt sich also die Nichtpermanenz des $(E, (z - \alpha)/(1 - \alpha z))$ -Verfahrens ($0 < \alpha < 1$). Weiter wird die Stärke zweier Verfahren (E, f) und (E, g) verglichen; außer (schärferen) Bedingungen an f und g wird eine Größenbeschränkung der zugelassenen Folgen $\{s_n\}$ verlangt. Abschließend wer-

den die allgemeinen Sätze auf den Spezialfall des $E(\alpha, \beta)$ -Verfahrens angewandt und insbesondere gezeigt, daß dieses Verfahren genau dann permanent ist, wenn entweder $\alpha = \beta = 0$ oder aber $\alpha < 1$, $\beta < 1$, $\alpha + \beta > 0$ ist. *D. Gaier.*

Hlawka, Edmund: Folgen auf kompakten Räumen. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **20**, 223—241 (1956).

Eine Folge reeller Zahlen heißt mod 1 gleichverteilt, wenn für jede stetige Funktion f mit Periode 1 die Beziehung

$$\lim_n \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} = \int_0^1 f(x) dx = \mu(f)$$

gilt. Verf. verallgemeinert hier in zwei Richtungen. Einmal läßt er statt der oben verwendeten Matrix der arithmetischen Mittel allgemeine Matrizen $A = \{a_{nk}\}$ zu, die den Bedingungen $\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$ und $\lim_n \sum_k a_{nk} = 1$ (teilweise auch $\lim_n a_{nk} = 0$) genügen, also im wesentlichen regulär sind. Zum anderen entnimmt er die x_n statt dem Torusraum $0 \leq x_j < 1$ einem kompakten Raum X mit abzählbarer Basis. — Gibt es eine Folge $n(t)$, so daß

$$\lim_t \sum_k a_{n(t), k} f(x_k) = \mu(f) = \int_X f d\mu$$

existiert, so nennt er μ ein A -Maß der Folge $\omega = \{x_k\}$. Ist dabei μ ein positives Radon-Maß, so spricht er von einem A -Verteilungsmaß. Ferner bedeutet A -Summierbarkeit einer Folge ω , daß ω nur ein A -Maß besitzt; und A -Gleichverteilung, daß dabei überdies ω positiv ist. Er beweist 20 Sätze, die z. B. Existenz von A -Mäßen (auch unter Zusatzbedingungen) betreffen, die Struktur der Menge der zu einer Folge gehörigen A -Maße behandeln, Folgen oder Matrizen mit bestimmten Eigenschaften bezüglich dieser Maße konstruieren, gewisse günstige Eigenschaften von Matrizen hervorheben. Bei den Sätzen und Beweisen spielen folgende Begriffe und Eigenschaften eine Rolle: Auswahl vermöge Kompaktheit, das Grundmengenprinzip in Banachräumen, Konstruktion neuer Matrizen durch Zeilenauswahl (vgl. Goffmann-Petersen, dies. Zbl. **70**, 59, und Petersen, dies. Zbl. **70**, 286), Matrizen mit $\lim_n \sum_k |a_{n+1, k} - a_{n, k}| = 0$, die Boreleigenschaft bei Limitierungs-

verfahren, Matrizen mit Abschätzungen für die Zeilenteilsummen $\sum_{k=1}^t a_{nk} s_k$ („Mittelwertsätze, Abschnittskonvergenz“). Bei letzterer Eigenschaft zitiert er nur eine Arbeit von Jurkat und Peyerimhoff, offenbar weil diese Verf. ungenaue Quellenangaben machen. Die Mittelwertsätze wurden jedoch schon lange bei Verfahren wie den bewichteten Mitteln (auf die es Hlawka besonders ankommt) implizit benützt; später erkannten Riesz und Boscquet das Bestehen dieser Eigenschaft bei weiteren Verfahren und ihre Bedeutung für Vergleichs- und Konvergenzfaktorensätze. Die funktionalanalytische Deutung der Eigenschaft (Abschnittskonvergenz) und damit ihre allgemeine Formulierung ist durch Wilansky und Ref. gegeben worden. Jurkat und Peyerimhoff schlossen an zum Teil unveröffentlichte Untersuchungen des Ref. an. Näheres bei Wilansky-Zeller, Math. Z. **64**, 258—269 (1956) (dies. Zbl. **71**, 280). *K. Zeller.*

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Bari, N. K. und S. B. Stečkin: Beste Annäherungen und differentielle Eigenschaften zweier konjugierter Funktionen. Trudy Moskovsk. mat. Obšč. **5**, 483—522 (1956) [Russisch].

Eine zusammenfassende Darstellung der Zusammenhänge zwischen $E_n(f^{(p)})$, $E_n(\tilde{f}^{(q)})$ und $\omega_k(\delta, f^{(p)})$ mit mehreren neuen Resultaten. Es sei $\varphi \in C[0, \pi]$, $\varphi \uparrow$, $\varphi(t) \neq 0$ für $t > 0$, $\varphi(+0) = 0$. Für jedes solche φ sind folgende Bedingungen

äquivalent: (B) $\sum_{n=1}^{\infty} \nu^{-1} \varphi(\nu^{-1}) = O[\varphi(n^{-1})]$ (N. K. Bari, dies. Zbl. 65, 50),

(Z) $\int_0^{\delta} t^{-1} \varphi(t) dt = O[\varphi(\delta)]$ (hängt zusammen mit A. Zygmund, dies. Zbl. 60, 138),

(L) Für ein $C > 1$ gilt: $\lim \varphi(C\delta)/\varphi(\delta) > 1$ (S. M. Lozinskij, dies. Zbl. 46, 70),

(S) Es gibt ein $0 < \alpha < 1$ und $A \geq 1$, so daß für $t_1 \leq t_2$ $\varphi(t_1) t_1^{\alpha} \leq A \varphi(t_2) t_2^{\alpha}$ (S. B. Stečkin, dies. Zbl. 42, 300), (P) Für jedes $0 < \theta < 1$ gibt es ein ganzes p ,

für welches $\varphi(p^{-1} n^{-1}) < \theta \varphi(n^{-1})$. Erfüllt φ eine dieser Bedingungen, dann sind für jedes $f \in C^r$ alle Relationen

$$(*) \quad E_n(f^{(p)}) \sim n^{p-r} \varphi(n^{-1}), \quad E_n(\tilde{f}^{(q)}) \sim n^{q-r} \varphi(n^{-1})$$

$p, q = 0, 1, \dots, r$ gleichwertig. Ist aber (B) nicht erfüllt, dann gibt es Funktionen $f_1, f_2, f_3 \in C^r$ mit $E_n(f_1) \sim n^{-r} \varphi(n^{-1})$ und $E_n(f_1^{(r)}) \not\sim \varphi(n^{-1})$; $E_n(f_2) \sim n^{-r} \varphi(n^{-1})$

und $E_n(f_2^{(r)}) \not\sim \varphi(n^{-1})$; $E_n(f_3) \sim \varphi(n^{-1})$ und $E_n(\tilde{f}_3^{(r)}) \not\sim \varphi(n^{-1})$. Ist außer (B) noch

(B_k) $\sum_{\nu=1}^n \nu^{k-1} \varphi(\nu^{-1}) = O[n^k \varphi(n^{-1})]$ erfüllt, dann sind die Beziehungen (*) sogar

mit jeder der Relationen $\omega_{k+s-r}(\delta, f^{(s)}) \sim \delta^{r-s} \varphi(\delta)$, $\omega_{k+r-m}(\delta, \tilde{f}^{(m)}) \sim \delta^{r-m} \varphi(\delta)$,

$s, m = 0, 1, \dots, r$ gleichwertig. Auch (B_k) wird in mehreren äquivalenten Formen angegeben. Es sei $\varphi(t_1)/t_1 < A \varphi(t_2)/t_2$ für $t_1 < t_2$; dann sind $\omega(\delta, f) \sim \varphi(\delta)$ und

$\omega(\delta, \tilde{f}) \sim \varphi(\delta)$ dann und nur dann gleichwertig, wenn φ die Bedingungen B und B₁ erfüllt.

G. Freud.

Dzjadyk, V. K.: Über die konstruktive Charakterisierung der Funktionen, die einer Bedingung $\text{Lip } \alpha$ ($0 < \alpha < 1$) auf einem endlichen Intervall der reellen Achse genügen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 20, 623–642 (1956) [Russisch].

Als Ausdehnung eines wohlbekannten Satzes von S. N. Bernstein wird gezeigt, daß für die in $[-1, +1]$ definierte Funktion $f(x)$ dann und nur dann $f^{(r)} \in \text{Lip } \alpha$ ($r \geq 0$ ganz, $0 < \alpha < 1$) gilt, wenn es eine Polynomfolge $\{P_n(x)\}$ (Grad von $P_n \leq n$) mit

$$(*) \quad |f(x) - P_n(x)| \leq C n^{-r-\alpha} [(1-x^2)^{(r+\alpha)/2} + n^{-r-\alpha}]$$

gibt. Gilt (*) mit $\alpha = 1$, dann ist

$$(**) \quad f^{(r)}(x+h) + f^{(r)}(x-h) - 2f^{(r)}(x) = O(|h|)$$

(Ob aus (**) folgt, daß (*) besteht, wird nicht untersucht.) Daß (*) notwendig ist, folgt aus einem Satze von A. F. Timan (dies. Zbl. 42, 71). Der Beweis benützt folgenden an sich interessanten Satz 2: aus

$$(***) \quad |P_n(x)| \leq L[(1-x^2)^{e/2} + n^{-e}] \text{ folgt } |P'_n(x)| \leq C(\varrho) n L[(1-x^2)^{(e-1)/2} + n^{-e+1}].$$

Bemerkung des Ref.: Wir berücksichtigen bei der Formulierung des Satzes 2, daß aus (***) mit $\varrho < 0$ $|P_n(x)| \leq C_1(\varrho) L n^{-e}$ folgt.

G. Freud.

Dzjadyk, V. K.: Über die Fortsetzung von Funktionen, die einer Lipschitz-Bedingung in der Metrik L_p genügen. Mat. Sbornik, n. Ser. 40 (82), 239–242 (1956) [Russisch].

Gehört die in $[a, b]$ definierte Funktion $f(x)$ zur Klasse $\text{Lip } (\alpha, p)$, dann kann sie auf die ganze reelle Achse unter Erhaltung dieser Eigenschaft fortgesetzt werden.

G. Freud.

Timan, A. F. and L. I. Tučinskij (Tuchinsky): Approximation of differentiable functions given on a finite segment by algebraic polynomials. Doklady Akad. Nauk SSSR 111, 771–772 (1956) [Russisch].

Verallgemeinert die Ergebnisse von Timan, dies. Zbl. 42, 70 auf Funktionen, deren r -te Ableitung zu $\text{Lip } \alpha$ gehört ($r > 0$, ganz). Die erhaltenen Größenordnungen lassen sich nicht verbessern.

L. Schmetterer.

Potapov, M. K.: On Jackson type theorems in the L_p metric. Doklady Akad. Nauk SSSR 111, 1185–1188 (1956) [Russisch].

Verallgemeinert Satz und Beweismethode von Timan (dies. Zbl. 42, 71) auf Funktionen, deren r -te Ableitung ($r > 0$, ganz) zu $\text{Lip}(p, \alpha)$, $p > 1$, $0 < \alpha \leq 1$ gehört. Ähnliche Sätze werden auch für Funktionen $f(x)$ (definiert über $[a, b]$) bewiesen, deren r -te Ableitung für alle c, d mit $a \leq c < d \leq b$ und einer Konstanten M der Ungleichung

$$\left(\int_c^d |f^{(r)}(x+h) - f^{(r)}(x)|^p \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \right)^{1/p} \leq M |h|_i^\alpha$$

genügt. Die Untersuchungen wurden auf Anregung von S. M. Nikol'skij durchgeführt. *L. Schmetterer.*

Aljančić, S.: Über Summierbarkeit von Orthogonalentwicklungen stetiger Funktionen. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. 10, 121–130 (1956).

Let $\{\varphi_\nu(x)\}$ be an orthonormal system in (a, b) and $|\varphi_\nu(x)| < N_\nu$. Kaczmarz gave necessary and sufficient conditions for the Toeplitz summation method to be f_φ -permanent (which means that it sums uniformly all orthogonal development of continuous functions $f(x)$ with respect to $\varphi_\nu(x)$ over the interval (a, b)). The author considers any matrix method $(\lambda_{\nu\mu})$ which is not always permanent and shows that a set of necessary and sufficient conditions to be f_φ -permanent is: 1. $\{\varphi_\nu(x)\}$ is

C -closed, 2. $\int_a^b |K_{n,\mu}(t, x)| dt \leq M_\mu$ ($\mu = 0, 1, \dots$) where $K_{n,\mu}(t, x) \equiv$

$\sum_{\nu=0}^n \lambda_{\nu\mu} \varphi_\nu(t) \varphi_\nu(x)$ ($\mu = 0, 1, \dots$), 3. $\int_a^b |d_t K_\mu(t, x)| < M$ where $K_\mu(t, x) \equiv$

$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_a^t K_{n(\mu), \mu}(\tau, x) d\tau$ and $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \lambda_{\nu\mu} = 1$ ($\nu = 0, 1, \dots$). *G. Sunouchi.*

Friedman, Bernard and L. I. Mishoe: Eigenfunction expansions associated with a non-self-adjoint differential equation. Pacific J. Math. 6, 249–270 (1956).

Es seien λ_n die Eigenwerte und $u_n(x)$ zugehörige, passend normierte Eigenfunktionen von $u'' + q(x)u + \lambda[p(x)u - u'] = 0$, $u(0) = u(1) = 0$, wobei $q(x)$ in $\langle 0, 1 \rangle$ stetig und $p(x)$ dort zweimal stetig differenzierbar ist. Mit Hilfe der Eigenfunktionen $v_n(x)$ der adjungierten Eigenwertaufgabe werden Orthogonalitätseigenschaften bewiesen. Zu einer Funktion $F(x)$ wird ihre Fourierreihe $S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n u_n(x)$

aufgestellt mit $a_n = \int_0^1 F(t) [p v_n + v'_n] dt$. Ist $F(x)$ von beschränkter Variation

in $\langle 0, 1 \rangle$ und $F(0+) + \exp\left[-\int_0^1 p(t) dt\right] F(1-) = 0$, so konvergiert die Reihe S gegen $\frac{1}{2}[F(x+0) + F(x-0)]$, in Stetigkeitspunkten also gegen $F(x)$. Erfüllt $F(x)$ nicht die angeschriebene Randbedingung, so konvergiert S gegen einen komplizierteren Ausdruck, der in der Arbeit angegeben wird. *L. Collatz.*

Mishoe, L. L. and G. C. Ford: On the uniform convergence of a certain eigenfunction series. Pacific J. Math. 6, 271–278 (1956).

Die Arbeit schließt direkt an die vorstehend besprochene an und beweist einen Satz über gleichmäßige Konvergenz: Hat $F(x)$ in $\langle 0, 1 \rangle$ eine Ableitung von beschränkter Variation und ist $F(0) = F(1) = 0$, so konvergiert die Reihe S in $(0, 1)$ gleichmäßig gegen $F(x)$. Zum Beweise wird eine asymptotische Darstellung der Eigenwerte

$$\lambda_n = 2n\pi i + 2 \int_0^1 p(t) dt + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

hergeleitet (n positiv oder negativ).

L. Collatz.

● **Steklov, V. A.:** Über den asymptotischen Ausdruck einiger Funktionen, die durch eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung bestimmt werden, und ihre Anwendung auf die Aufgabe, eine beliebige Funktion in eine Reihe nach diesen Funktionen zu entwickeln. Unter Redaktion und mit Kommentaren von N. S. Landkofa. Chařkov: Verlag der Staatlichen A. M. Gořkij-Universität zu Chařkov 1957. 140 S. R. 4.50 [Russisch].

Die durch den ausführlichen Titel gekennzeichnete Arbeit ist 1907 in den „Mitteilungen der mathematischen Gesellschaft Charkow“ in französischer Sprache erschienen. Neben einer zweiten 1923 erschienenen Monographie wird in dieser Arbeit die Theorie der Entwicklungen von Steklov und Hobson begründet. Es handelt sich hier um eine russische Übersetzung dieser ersten grundlegenden Arbeit. Bei der Übersetzung wurden kleinere Versehen beseitigt, außerdem etwa 20 Seiten Erläuterungen angefügt. Die betrachteten Differentialgleichungen beschreiben die speziellen Funktionen von Jacobi, Laguerre, Hermite und Tschebyscheff, sowie auch Bessel und Lamé. W. Haacke.

Campbell, Robert: Determination effective de toutes les moyennes de Césaro d'ordre entier pour des séries de polynomes orthogonaux comprenant ceux de Laguerre et de Hermite. C. r. Acad. Sci., Paris **243**, 882—885 (1956).

In einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. **57**, 52) war eine Methode mitgeteilt worden, mit der man die Fejerschen Summen $\sigma_n^1(x)$ einer Funktion $f(x)$, entwickelt nach orthogonalen Polynomen einer bestimmten Klasse (F), bestimmen kann. Die Berechnung der Mittel σ_n^p der C_p -Summierung für $p > 1$ war dort nur im Falle der Hermiteschen Polynome möglich. In der vorliegenden Arbeit wird eine Erweiterung gebracht, die für $p > 1$ eine Berechnung der σ_n^p für alle Polynome der Klasse (F) ermöglicht. H. Unger.

Singh, Basudeo: On a sequence of Fourier coefficients. Proc. Amer. math. Soc. **7**, 796—803 (1956).

Let $B_n(x)$ be the n -th term of the conjugate Fourier series of $f(x)$, and let $\psi(t) = f(x+t) - f(x-t) - l$. The author shows that if

$$\Psi(t) = \int_0^t \psi(u) du = o(t) \quad \text{and} \quad \int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{|\psi(t+\varepsilon) - \psi(t)|}{t} dt \rightarrow 0$$

as $\varepsilon \rightarrow 0$ for some fixed δ , then the sequence $\{n B_n(x)\}$ is summable $(C, 1)$ to the value l/π . The method of proof is very near to that of the $(C, 1)$ summability of the derived Fourier series [cf. A. Zygmund, Bull. Acad. Polon. **1925**, 207—217 (1926)]. From this he derives Lebesgue's test for convergence of the conjugate Fourier series by applying Tauber's theorem. G. Sunouchi.

Kahane, J. P.: Sur certaines classes de séries de Fourier absolument convergents. J. Math. pur. appl., IX. Sér. **35**, 249—259 (1956).

Let A denote the class of functions $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$ with $\|f\| = \sum |a_n| < \infty$, and $A\{\omega_n\}$ denote the class of functions $F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n e^{inx}$ with $\|F\| = \sum |A_n| \omega_n < \infty$, where $\{\omega_n\}_{-\infty}^{\infty}$ is a given sequence such that $\omega_n \geq 1$ for all n . A and $A\{\omega_n\}$ are Banach spaces with the norms $\|f\|$ and $\|F\|$ respectively. A^* denotes the class of functions f which are locally equal to functions of A . The author begins by proving the following extension of a theorem of Leibenson: If $F \in A(\omega_n)$, then $F(f(x)) \in A$ if and only if f be real and $\|e^{inf}\| = O(\omega_n)$, as $n \rightarrow \pm \infty$. With the help of this result and a classical result of Wiener relating to the absolute convergence of Fourier series he deduces: If in the neighbourhood of every point x , f is equal to a real function f_x for which $\|e^{inf_x}\| = O(\omega_n)$ as $n \rightarrow \pm \infty$, then $\|e^{inf}\| = O(\omega_n)$. He uses these two results to prove a number of theorems concerning the rapidity of the growth of $\|e^{inf}\|$ when f is either linear by intervals or analytic. The following two

results are typical: (1) If f be real, continuous and linear by intervals satisfying $f(x + 2\pi) = f(x) \pmod{2\pi}$, then $\|e^{inf}\| = O(\log n)$, $n \rightarrow \pm \infty$; moreover if $f(x) = |x|$ in $[-\pi, \pi]$ then $\|e^{inf}\| = (2/\pi) \log n + O(1)$. (2) If f be a real, non-constant, analytic 2π -periodic function, then there exist two positive constants λ_1 and λ_2 such that $\lambda_1 \sqrt{|n|} < \|e^{inf}\| < \lambda_2 \sqrt{|n|}$ for all integral n . Several interesting corollaries are mentioned and finally an example f is given for which $f \in A^*$ but $|f| \notin A^*$.

U. N. Singh.

Bojanić, R.: On uniform convergence of Fourier series. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. **10**, 153–158 (1956).

Let C denote the class of continuous and periodic functions with period 2π and let C_F denote the class formed by those functions $f \in C$ whose Fourier series converge uniformly. Let $\Omega(t)$ be a continuous function such that $\Omega(t) \downarrow 0$ as $t \rightarrow 0$ and $\Omega(x+y) \leq \Omega(x) + \Omega(y)$. We shall denote by C^Ω the class of functions $f \in C$ whose modulus of continuity $\omega(t)$ satisfies the condition $\omega(t) = O\{\Omega(t)\}$ as $t \rightarrow 0$. Suppose that P and Q are two given classes of integrable functions. We shall denote by (P, Q) the class of sequences $\{\lambda_n\}$ which are such that whenever

$$(1) \quad \frac{1}{2} a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

is the Fourier series of a function of class P , the series

$$(2) \quad \frac{1}{2} \lambda_0 a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

is the Fourier series of a function of class Q . The author gives conditions relating to a sequence $\{\lambda_n\}$ such that whenever (1) is a Fourier series of a function of class C^Ω , the series (2) converges uniformly. In fact he proves the following Theorem: Given

a sequence $\{\lambda_n\}$, let $A_n(t) = \frac{1}{2} \lambda_0 + \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu \cos \nu t$ and let $\sum_{\nu=0}^n A_\nu(t) = G_n(t)$. If

$$(3) \quad \int_0^{2n} |G_n(t)| dt = O(n) \quad \text{and} \quad (4) \quad \Omega\left(\frac{1}{n}\right) \int_0^{2\pi} |A_n(t)| dt = o(1),$$

then the sequence $\{\lambda_n\}$ belongs to the class (C^Ω, C_F) . This theorem generalizes the classical Dini-Lipschitz test for uniform convergence of a Fourier series and it also contains a theorem of M. Tomić (this Zbl. **66**, 315).

U. N. Singh.

Satō, Masako: Uniform convergence of Fourier series. VI. Proc. Japan Acad. **32**, 99–104 (1956).

Verf. beweist seinen früheren Satz 6 (vgl. Teil V, dies. Zbl. **67**, 42) in abgeänderter Form, indem er die Voraussetzung

$$\int_0^{|h|} |f(x+u) - f(x)| du = o(|h|) \quad \text{durch} \quad \int_0^{|h|} (f(x+u) - f(x)) du = o(|h|), \quad h \rightarrow 0$$

ersetzt. — Als Verallgemeinerung eines Satzes von R. Salem erhält er ferner den Satz: Es sei $f(x) \in L$ und

$$\frac{1}{h} \int_0^h (f(t+u) - f(t-u)) du = O\left(\frac{1}{\log 1/h}\right) \quad h \rightarrow 0$$

gleichmäßig für alle t , dann gilt für die Teilsummen der Fourierreihe von $f(x)$

$$|s_n(x)| \leq \theta(x, f) + O(1) \quad \text{mit} \quad \theta(x, f) = \max_{\alpha \leq x \leq \beta} \left| \frac{1}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta f(t) dt \right|. \quad \text{V. Garten.}$$

Tomić, M.: Sur la sommation de la série de Fourier d'une fonction continue avec le module de continuité donné. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. **10**, 19–36 (1956).

The author completes his previous result (this Zbl. **66**, 315) and generalizes it in the following form. If $\lambda_{k,n}$ is a triangular matrix, a set of sufficient conditions for it to transform every Fourier series of a continuous function with modulus of continuity

$\omega(\delta)$ into a uniformly convergent series is

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{k,n} = 1, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2) \quad \omega\left(\frac{1}{n}\right) \int_0^\pi \left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_{k,n} \cos kt \right| dt = o(1),$$

$$(3) \quad \int_0^\pi \left| \sum_{k=0}^{2m-1} D\left(\frac{k}{m}\right) \lambda_{k,n} \cos kt \right| dt = O(1)$$

where $m = [(n+1)/2\alpha]$, with α an integer ≥ 1 , and $D(x)$ is the Fourier transform of Jackson's kernel, that is $D(x) = 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x^3$ ($0 \leq x \leq 1$), $= (2-x)^3/4$ ($1 \leq x \leq 2$), $= 0$ ($x \geq 2$). This theorem implies formally Nikolsky's theorem (this Zbl. 30, 28) but the author's proof uses Nikolsky's result and the best approximation polynomial of Jackson. Many special sufficient conditions are given also.

G. Sunouchi.

Mohanty, R. and S. Mahapatra: On the absolute logarithmic summability of a Fourier series and its differentiated series. Proc. Amer. math. Soc. 7, 259 (1956).

Sufficient conditions are given, on the familiar pattern, for the summability of a Fourier series and its differentiated series, at a point, by the $|R, \log w, z|$ means.

K. Chandrasekharan.

Temko, K. V.: Convex capacity of sets and the Fourier-series. Doklady Akad. Nauk SSSR 110, 943—944 (1956) [Russisch].

Im Zusammenhang mit der Untersuchung von Ausnahmемengen bei Fourierreihen hat Beurling den Begriff der logarithmischen Kapazität einer Menge eingeführt (dies. Zbl. 23, 142). Daran schlossen sich die Untersuchungen von Salem und Zygmund (dies. Zbl. 60, 185) an. Hier wird in naheliegender Verallgemeinerung der genannten Arbeiten die konvexe Kapazität einer Menge eingeführt. α_n sei eine konvexe Folge positiver monoton gegen 0 strebender Zahlen mit $\sum \alpha_n = \infty$. Eine Borelsche Menge B aus $[0, 2\pi]$ heißt von positiver konvexer Kapazität, wenn über $[0, 2\pi]$ ein nichtnegatives totaladditives Maß η existiert mit $\eta(B) = 1$ und wenn $\int_B Q(r, x - y, \alpha) d\eta(y)$ für $r \rightarrow 1 - 0$ gleichmäßig beschränkt in x ist, wobei $Q(r, x, \alpha) = \frac{1}{2} \alpha_0 + \sum r^n \alpha_n \cos nx$. Damit lassen sich bekannte Sätze über trigonometrische Reihen verallgemeinern.

L. Schmetterer.

Chao, Chi-Chang: The closed-form summation of some common Fourier series. Quart. J. Mech. appl. Math. 9, 508—512 (1956).

The author has given a method of summation in closed form of Fourier series whose coefficients are ratios of polynomials of certain type. This method is valid only for sine and cosine series. The closed form summation of Fourier series of this type is obtained by solving an ordinary differential equation. The form of this differential equation is determined by the denominator of the coefficients of the given Fourier series and the boundary conditions satisfied by the differential equations are determined by the numerator of the coefficients.

U. N. Singh.

Izumi, Shin-ichi: Some trigonometrical series. XX. Proc. Japan Acad. 32, 93—96 (1956).

Suppose m_1, \dots, m_n are distinct positive integers. Put $f(x) = -\cos m_1 x - \dots - \cos m_n x$ for real x . Since f has mean-value zero, its maximum value is a positive number K . Let T be the number of solutions of the equation $m_i + m_j = m_k$ in integers i, j, k between 1 and n inclusive. Using elementary calculus and Schwarz's inequality the author proves that

$$T = -\frac{2}{3\pi} \int_0^{2\pi} f^3(x) dx \geq \frac{n(n-2K^2)}{3K},$$

Thus $K \geq \{\theta + (\theta^2 + \frac{1}{2}n)^{1/2}\}^{-1}$, where $\theta = 3T/2n^2$. The author proves a similar inequality for

$$\frac{4}{\pi} \int_0^{2\pi} f^4(x) dx = 3U + 4V,$$

where U is the number of solutions of the equation $m_i + m_j = m_k + m_l$ and V is the number of solutions of the equation $m_i + m_j + m_k = m_l$ in integers i, j, k, l between 1 and n inclusive. Remark. In the paper itself Theorems 2, 3, and 4 are stated incorrectly.

P. T. Bateman.

Nikol'skij, S. M.: Über eine Ungleichung für periodische Funktionen. Uspechi mat. Nauk 11, Nr. 1 (67), 219—222 (1956) [Russisch].

Die Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ gehöre zur Klasse $H_{*}^{(r_1, \dots, r_n)}(M_1, \dots, M_n)$ ($1 \leq p \leq \infty$) [vgl. Nikol'skij, Trudy mat. Inst. Steklov. 38, 244—278 (1951)].

Es sei $\int_0^{2\pi} f dv = 0$ mit $dv = dx_1 \dots dx_n$. Dann gilt die Ungleichung:

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_0^{2\pi} |f|^p dv \right)^{1/p} \leq c \sum_{k=1}^n M_k,$$

wobei c nur von p, r_1, \dots, r_n abhängt.

W. Thimm.

Ghizzetti, Aldo: Sui coefficienti di Fourier-Stieltjes di una funzione non decrescente. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 20, 580—583 (1956).

La suite c_k ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, c_{-k} = c_k$) est la suite des moments trigonométriques d'une fonction croissante α , c.-à.-d. $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikx} d\alpha(x)$, si et

seulement si les formes $H_n(\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n) = \sum_{h,k=0}^n c_{h-k} \bar{\zeta}_h \zeta_k$ ($n = 0, 1, \dots$) sont positives, ou encore si les déterminants $|c_{h-k}|_0^n$ ($n = 0, 1, \dots$) sont positifs (Shohat and Tamarkin, The Problem of Moments, p. 7). Il est trivial que cette condition est nécessaire, et pour démontrer qu'elle est suffisante on utilise d'habitude le lemme de Fejér-Riesz sur les polynômes trigonométriques positifs. Ici l'A. donne une nouvelle démonstration de la suffisance de cette condition. Il pose

$$\sigma_n(x) = H_n(1/\sqrt{n+1}, e^{ix}/\sqrt{n+1}, \dots, e^{inx}/\sqrt{n+1}) \geq 0$$

et $0 \leq \alpha_n(x) = \int_0^x \sigma_n(x) dx \leq 2\pi c_0$. En vertu du théorème de choix de Helly, on peut extraire de α_n une sous-suite qui tend vers la fonction α cherchée.

J. Horváth.

Ghizzetti, Aldo: Sui coefficienti di Legendre-Stieltjes di una funzione non decrescente. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 20, 753—758 (1956).

Soit $T_k(x) = \cos k\theta$ ($\cos \theta = x$) le k -ième polynôme de Tchebycheff ($k = 0, 1, \dots$). La suite b_k ($k = 0, 1, \dots$) est la suite des moments de Tchebycheff d'une fonction croissante α , c.-à.-d. $b_k = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 T_k(x) d\alpha(x)$, si et seulement si les déterminants

$$\begin{vmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_n \\ b_1 & b_0 & \dots & b_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & b_{n-1} & \dots & b_0 \end{vmatrix}$$

sont positifs, ou encore si les formes $\sum_{h,k=0}^n b_{h-k} \zeta_h \bar{\zeta}_k$ ($n = 0, 1, \dots; b_{-i} = b_i$) sont positives. La démonstration est la même que celle du théorème de la note précédente, qui se réduit d'ailleurs au résultat actuel quand les c_k sont réels. — D'ici l'A. déduit par une transformation simple une condition nécessaire et suffisante pour que a_k ($k = 0, 1, \dots$) soit la suite des moments de Legendre d'une fonction croissante α , c.-à.-d. $a_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 P_k(x) d\alpha(x)$, où $P_k(x)$ est le k -ième polynôme de Legendre.

J. Horváth.

Verblunsky, S.: On an expansion in exponential series. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 7, 231—240 (1956).

Let $k(u)$ ($0 \leq u \leq 1$) be a function of bounded variation with $k(0) = k(0+)$, $k(1) = k(1-)$, $k(0)k(1) \neq 0$. Suppose that the zeros λ_ν ($\nu = 1, 2, 3, \dots$) of $A(z) = \int_0^1 k(u) e^{zu} du$ are all simple and different from zero. Put $\varphi_0(u) = k(u)$, $\varphi_\nu(u) =$

$\lambda_\nu^{-1} k(u) + e^{-\lambda_\nu u} \int_u^1 k(v) e^{\lambda_\nu v} dv$, $\varphi_0(u) = 1$, $\varphi_\nu(u) = e^{\lambda_\nu u}$, then $\{\varphi_\nu, \psi_\nu\}$ is a bi-orthogonal system in $(0, 1)$. For $f(u) \in L(0, 1)$ write $\alpha_0 = [A(0)]^{-1} \int_0^1 f(u) du$,

$\alpha_\nu = [A'(\lambda_\nu)]^{-1} \int_0^1 f(u) \varphi_\nu(u) du$. Further put $B(z) = z A(z)$. The author proves that there exists a $\delta > 0$ such that if each λ_ν is the center of a disk Δ_ν of radius δ , then there exists an increasing sequence $r_p \rightarrow \infty$, such that the circle $|z| = r_p$ has no points in common with the Δ_ν . Let ν_p be the greatest integer ν such that $|\lambda_\nu| < r_p$. The following results are proved: 1. If $f(u) \in L^p(0, 1)$ then, as $p \rightarrow \infty$,

$$\alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{\nu_p} \alpha_\nu e^{\lambda_\nu t} - \frac{1}{\pi} \int_0^1 f(u) \frac{\sin r_p(t-u)}{t-u} du$$

converges to zero uniformly in every closed interval contained in the interior of $(0, 1)$. 2. If $f(u)$ is integrable in every finite interval and $\int_0^1 k(u) f(t+u) du = 0$, then, as $p \rightarrow \infty$,

$$\sum_{\nu=1}^{\nu_p} \alpha_\nu e^{\lambda_\nu t} - \frac{1}{\pi} \int_a^b f(u) \frac{\sin r_p(t-u)}{t-u} du$$

converges to zero uniformly in every closed interval contained in the interior of (a, b) . — The proofs use the theory of residues. These theorems are partial extensions of results due to Delsarte (this Zbl. 13, 254).

J. Horváth.

Spezielle Funktionen:

Schwartz, J.: Riemann's method in the theory of special functions. Bull. Amer. math. Soc. 62, 531—540 (1956).

Verf. macht den Versuch, eine einheitliche Theorie der speziellen Funktionen unter dem Gesichtspunkte Riemanns im Falle der hypergeometrischen Funktionen zu gewinnen. Als spezielle Funktion wird jede Lösung einer gewöhnlichen homogenen linearen Differentialgleichung der Ordnung n bezeichnet; das der Differentialgleichung zugeordnete „Riemannsche Symbol“ charakterisiert alle Singularitäten der Differentialgleichung und gestattet, Aussagen über die Lösungen und ihr Verhalten in der Umgebung der singulären Stellen zu machen. Anwendung auf die gewöhnliche, confluyente und verallgemeinerte hypergeometrische Differentialgleichung und auf die der Sphäroidfunktionen.

O. Volk.

O'Brien, Vivian: Remarks on Chaplygin functions. J. aeronaut. Sci. 23, 894—895 (1956).

Die Chaplyginschen Funktionen sind von der Form $\psi = r^{k/2} F(a_k, b_k; c_k; r) \sin k \vartheta$. Verf. gibt für den ausgearteten Fall (c_k eine negative ganze Zahl) die (aus der Theorie der hypergeometrischen Funktion folgende) Lösung mit logarithmischem Gliede für die Chaplyginsche Gleichung. Daran schließt er eine kurze Bemerkung über die Nullstellen der Chaplyginschen Funktionen.

O. Volk.

Saran, Santi: Transformations of hypergeometric functions of three variables. Bull. Calcutta math. Soc. 48, 9—23 (1956).

The author defines five hypergeometric functions of three variables, represents them by triple integrals and deduces transformations of these functions by manipulating the integrals (this Zbl. 64, 309).

T. Erweida.

Mitrinovitch, Dragoslav S.: Inégalités pour les dérivées des polynômes de Legendre. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 11, 172—177 (1956).

Verf. leitet die Abschätzungen

$$\left| \frac{d^s P_n(x)}{dx^s} \right| \leq \frac{s!}{2^s} \binom{n}{s} \binom{n+s}{s}, \quad \left| \frac{d^s P_n(x)}{dx^s} \right| \leq \frac{n^{2s}}{s!},$$

$$|d^s P_n(x)/dx^s| \leq (n+s+1)^{2s}/2^s s!, \quad |x| \leq 1; \quad n=1, 2, \dots; \quad s \leq n$$

$$\max |d^s P_n(x)/dx^s| \sim n^{2s}/s! 2^s, \quad n \gg 1, \quad s \ll n$$

abund vergleicht sie mit denen von Sansone (dies. Zbl. 26, 397), Picone (dies. Zbl. 51, 53) und Colucci (dies. Zbl. 51, 10). [Anmerkung des Ref.: S. 174 Z. 4 v. o. ist ein Druckfehler; (9) wird nach x (nicht nach t) differenziert. Beachtet man, daß

$$\binom{n}{s} \binom{n+s}{s} = \frac{n(n+1) \cdot (n-1)(n+2) \cdots (n-s+1)(n+s)}{s! s!} < \frac{n^s (n+1)^s}{s! s!}$$

ist, so erhält man aus der ersten Abschätzung:

$$|d^s P_n(x)/dx^s| \leq n^s (n+1)^s / 2^s \cdot s! \leq n^{2s}/s!]. \quad O. Volk.$$

Gatteschi, Luigi: Una nuova rappresentazione asintotica dei polinomi di Legendre mediante funzioni di Bessel. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 11, 203—209 (1956).

Die von E. Hilb [Math. Z. 5, 17—25 (1919)] für das ganze Intervall $0 \leq \vartheta \leq \pi$ gegebene asymptotische Darstellung der Legendreschen Polynome

$$P_n(\cos \vartheta) = \sqrt{\vartheta/\sin \vartheta} J_0((n + \frac{1}{2}) \vartheta) + \sigma(\vartheta),$$

— Verf. hat früher (dies. Zbl. 47, 307) eine verbesserte Abschätzung von $\sigma(\vartheta)$ gegeben — wird verschärft in die folgende:

$$P_n(\cos \vartheta) = \sqrt{\frac{\vartheta}{\sin \vartheta}} \left\{ J_0((n + \frac{1}{2}) \vartheta) - \frac{\vartheta}{24(n + \frac{1}{2})} J_1((n + \frac{1}{2}) \vartheta) + \varepsilon(\vartheta) \right\},$$

mit $\varepsilon(\vartheta) = \vartheta^4 O(1)$, $0 < \vartheta < \pi/2n$; $\varepsilon(\vartheta) = \vartheta^{5/2} O(n^{-3/2})$, $\pi/2n < \vartheta \leq \pi/2$. Damit kann Verf. auch die in der bereits erwähnten Arbeit gegebenen Näherungswerte für die Nullstellen $\vartheta_{n,\nu}$ von $P_n(\cos \vartheta)$ verbessern.

O. Volk.

Cooke, J. C.: Some relations between Bessel and Legendre functions. Monatsh. Math. 60, 322—328 (1956).

Partendo dalla relazione

$$(*) \quad \left(\frac{\pi c}{2}\right)^{1/2} \int_0^\infty e^{-zt} t^{-1/2} J_m(\varrho t) J_{n+1/2}(ct) dt = P_n^{-m}(\mu) q_n^m(\zeta)$$

dove: $z = c\mu\zeta$, $\varrho = c\sqrt{(1-\mu^2)(1+\zeta^2)}$, $-1 < \mu < 1$; J_m è la funzione di Bessel di ordine m ;

$$q_n^m(\zeta) = e^{i\pi(n+1-2m)/2} Q_n^m(i\zeta); \quad P_n^m(\zeta), \quad Q_n^m(\zeta)$$

sono le funzioni di Legendre, l'A. costruisce delle relazioni integrali tra le funzioni di Bessel J , Y , H , K , I , e le stesse funzioni di Legendre. La relazione (*) è ottenuta dall'A. trasformandone un'altra da lui provata in precedenza (questo Zbl. 50, 73).

G. Sansone.

Munsch, Gilbert: Sur quelques relations de récurrence entre certains polynomes d'Appell et Kampé de Fériet. C. r. Acad. Sci., Paris 243, 767—770 (1956).

Es handelt sich um die im Zusammenhang mit der Schrödingerschen Gleichung im Falle der Atome mit zwei Elektronen auftretenden Polynome

$$F_{m,n}(\xi, \eta) = \sum_{i,j} \frac{(-m-n, i+j)(m+1, i)(n+1, j)}{(1, i)(1, j)(1, i)(1, j)} \xi^i \eta^j,$$

$$E_{m,n}(\xi, \eta) = \sum_{i,j} \frac{(m+n+i, i+j)(-m, i)(-n, j)}{(1, i)(1, j)(1, i)(1, j)} \xi^i \eta^j,$$

$(k, 0) = 1$, $(k, i) = k(k+1) \cdots (k+i-1)$, die ein in einem Dreieck biorthogonales Polynomensystem darstellen. Verf. führt Differentialoperatoren von der Form $\mathfrak{A}_i = \partial_\xi A_i \partial_\xi + \partial_\xi B_i \partial_\eta + \partial_\eta C_i \partial_\eta + F_i$ ein, zwischen denen für die verschiedenen A_i, \dots, F_i gewisse Relationen bestehen, die zur Einführung der weiteren Operatoren \mathfrak{B}_i Veranlassung geben. Es werden nun die Entwicklungen von $\mathfrak{A}_i F_{m,n}(\xi, \eta)$, $\mathfrak{A}_i E_{m,n}(\xi, \eta)$, abgeleitet, die im bereits erwähnten Problem der Quantenmechanik von Nutzen sind; für die Operatoren vom Grade 0 und 1 werden sie explicite angegeben. O. Volk.

Dickinson, D. J., H. O. Pollak and G. H. Wannier: On a class of polynomials orthogonal over a denumerable set. Pacific J. Math. 6, 239—247 (1956).

Sia $\{\lambda_n\}$ una successione a termini positivi, e risulti convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$. Fissato un intero $s > 0$ si costruisca una successione di polinomi $\{\varphi_n^{(s)}(x)\}$ col seguente procedimento $\varphi_{-1}^{(s)}(x) = 0$, $\varphi_0^{(s)}(x) = 1$, $\varphi_1^{(s)}(x) = x$, $\varphi_{n+1}^{(s)}(x) = x \varphi_n^{(s)}(x) - \lambda_{n+s} \varphi_{n-1}^{(s)}(x)$, ($n \geq 0$), $s \geq 0$. Gli AA. ispirandosi ad un teorema di J. Favard (questo Zbl. 12, 62) costruiscono una funzione peso $\alpha^{(s)}(x)$ non decrescente tale che

$$\int_{-a^{(s)}}^{a^{(s)}} \varphi_m^{(s)}(x) \varphi_n^{(s)}(x) d\alpha^{(s)}(x) = \prod_{i=1}^n \lambda_{i+s} \text{ per } n = m, = 0 \text{ per } n \neq m,$$

dove l'intervallo di integrazione contiene nel suo interno tutti i valori inversi degli zeri di una trascendente intera ben determinata. Come applicazione del teorema gli AA. dimostrano che per i polinomi $L_n^{(s)}(x)$ legati ai polinomi di Lommel $R_{n,\nu}(x)$ dalla relazione $L_n^{(s)}(x) = R_{n,s+1}(1/x) s! [2^n (s+n)!]^{-1}$ si ha

$$2(s+1) \sum x^p L_n^{(s)}(x) x^2 = \begin{cases} s! (s+1)! / 4^n (s+n)! (s+n+1)! & \text{per } p = n, \\ 0 & \text{per } p < n, \end{cases}$$

dove nel primo membro la somma è estesa a tutti i valori di x che sono zeri finiti della $J_s(1/x)$. G. Sansone.

• **Šervatov (Scherwatow), V. (W.) G.:** Hyperbelfunktionen. (Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik. Bd. 18.) Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1956. 53. S., 39 Abb. Br. DM 3,80.

Vgl. die Besprechung des russ. Originals in diesem Zbl. 57, 305. Die dort gebrauchte Schreibweise des Verf. Šervatov, V. G. ist zu berichtigen in Šervatov, V. G.

Funktionentheorie:

Al'per, S. Ja.: Über die Konvergenz der Lagrange'schen Polynome im Komplexen. Uspechi mat. Nauk 11, Nr. 5 (71), 44—50 (1956) [Russisch].

$f(z)$ étant régulière dans D simplement connexe et continue sur \bar{D} , soit $L_n[f, z]$ le polynome d'interpolation relatif aux points $z_1^{(n)}, \dots, z_n^{(n)}$ donnés sur la frontière. 1. D étant d'abord le cercle-unité: pour chaque choix du tableau $(z_k^{(n)})$, il existe $f(z)$ pour laquelle la suite des L_n n'est pas uniformément convergente sur D ; la démonstration suit celle de Faber pour le segment. 2. D étant un domaine de Jordan, on suppose que pour chaque n les $z_k^{(n)}$ correspondent aux sommets d'un polygone régulier dans la représentation conforme de l'extérieur de D sur $|w| > 1$; l'A. perfectionne un résultat de Fejér en prouvant la convergence uniforme des L_n sur D , moyennant des hypothèses assez générales sur D et sur $f(z)$. G. Bourion.

Krasnoščekova, T. I.: Über die Nullstellen der Partialsummen einer Potenzreihe. Untersuchungen über ausgewählte Fragen der Analysis und Geometrie 37—40 (1956) [Russisch].

L'A. présente en utilisant les familles normales la démonstration du théorème de Jentzsch sur l'accumulation des zéros des sommes partielles $S_n(z)$ d'une série de Taylor $\sum a_n z^n$ et montre de plus que, si $\limsup |a_n/a_{n+1}| = 1$, le nombre des zéros de $S_n(z)$ est borné indépendamment de n dans tout domaine $|z| > 1 + \varepsilon$. G. Bourion.

Piranian, George: The orders of lacunarity of a power series. *Boll. Un. mat. Ital.*, III. Ser. **11**, 198—199 (1956).

Construction d'une série de Taylor dont les indices de lacunarité de Hadamard-Ostrowski et de Fabry-Pólya ont des valeurs données, par une méthode plus simple que celle de G. Ricci (ce Zbl. **66**, 54). *G. Bourion.*

Leont'ev, A. F.: Über das Regularitätsgebiet der Grenzfunktion einer Folge analytischer Funktionen. *Mat. Sbornik*, n. Ser. **39 (81)**, 405—422 (1956) [Russisch].

$f(z) = \sum a_n z^n$ étant une fonction entière donnée qui a tous ses coefficients a_n différents de zéro, et $\{\lambda_k\}$ une suite donnée de nombres réels ou complexes, on considère les combinaisons linéaires finies de fonctions $f(\lambda_k z)$ (pseudopolynômes). D'après Pólya, si $f(z)$ est l'exponentielle e^z et si $k/\lambda_k \rightarrow 0$, toute fonction qui admet (dans un domaine quelconque) une approximation uniforme par pseudopolynômes a nécessairement un domaine d'existence à un seul feuillet et simplement connexe. L'A. discute les extensions possibles de ce théorème. Il construit d'abord une fonction $f(z)$ d'un type fini de l'ordre 1 pour laquelle l'énoncé de Pólya ne s'étend pas. Il montre ensuite que pour $f(z) = 1 + \sum z^n/[P(1)P(2) \cdots P(n)]$ où P est un polynôme de degré p tel que $P(0) = 0$, $P(n) \neq 0$ pour $n > 0$, le théorème considéré s'étend, la condition imposée aux λ_k étant ici $k|\lambda_k|^{-1/p} \rightarrow 0$. Les méthodes sont celles utilisées précédemment par l'A. (ce Zbl. **45**, 351). Des résultats obtenus dans l'hypothèse $\limsup k|\lambda_k|^{-1/p} < \infty$ étendent des énoncés de Valiron sur les séries de Dirichlet. *G. Bourion.*

Trošin, G. D.: Über die Konvergenz einer Folge von Partialsummen einer Reihe gegen eine ganze Funktion endlicher Ordnung. *Mat. Sbornik*, n. Ser. **39 (81)**, 433—446 (1956) [Russisch].

On considère une fonction entière $f(z)$ d'ordre fini ϱ et une suite $\{\lambda_k\}$, d'exposant de convergence ϱ_1 , $\varrho_1 > \varrho$. Soit $\{\psi_n(z)\}$ une suite de combinaisons linéaires finies des $f(\lambda_k z)$ qui converge dans tout le plan vers une fonction $\psi(z)$. I. I. Repin a prouvé (ce Zbl. **64**, 316) que, si l'ordre global ω de la suite $\{\psi_n(z)\}$ vérifie $1/\omega > 1/\varrho - 1/\varrho_1$, il correspond à $\psi(z)$ un développement formel $\sum \gamma_k f(\lambda_k z)$ dépendant seulement de ψ et non de la suite particulière $\{\psi_n\}$ et que moyennant une condition supplémentaire sur les λ_k ce développement converge effectivement vers $\psi(z)$. L'A. montre que sans condition supplémentaire sur les λ_k , il y a une suite de sommes partielles du développement formel qui converge effectivement vers $\psi(z)$. *G. Bourion.*

Leont'ev, A. F.: Über Folgen von linearen Aggregaten, die in einem Gebiet konvergieren, wo das die Aggregate erzeugende Funktionensystem nicht vollständig ist. *Uspechi mat. Nauk* **11**, Nr. 5 (71), 26—37 (1956) [Russisch].

Cet exposé énumère les résultats publiés par l'A. au sujet des problèmes suivants et en rapproche les résultats analogues d'autres mathématiciens (les fonctions envisagées sont holomorphes dans un domaine D et le seul mode de convergence utilisé est la convergence uniforme dans l'intérieur de D): 1. La suite $\{\exp(-\lambda_n z)\}$ n'étant pas complète dans D , donner des propriétés des fonctions $y(z)$ limites de combinaisons linéaires finies des $\exp(-\lambda_n z)$. On obtient en particulier des équations différentielles d'ordre infini $\sum c_k y^{(k)}(z) = 0$, des équations intégrales du type $\int_C \gamma(t-z) y(t) dt = 0$;

des équations mixtes $\sum_{m=0}^q \sum_{n=1}^p \alpha_{mn} y^{(m)}(z + k_n) = 0$. Voir: A. F. Leont'ev, ce Zbl. **45**, 351; **58**, 61 et **64**, 314; A. O. Gel'fond, ce Zbl. **47**, 332; J. Kahane, Thèse ce Zbl. **64**, 359; I. F. Lochin, ce Zbl. **47**, 75; L. F. Korsakova, Trudy Gor'kovskogo Pedinstituta 1951, 31—54; A. A. Miroljubov, *Mat. Sbornik*, n. Ser. **34 (76)**, 357—384 (1954). — 2. Questions analogues pour une suite $\{f(\lambda_n z)\}$ où $f(z) = \sum \alpha_n z^n$ est une fonction entière d'ordre et type finis à coefficients non nuls. Voir: A. F. Leont'ev, *Mat. Sbornik*, n. Ser. **31 (73)**, 381—413 (1952) et ce Zbl. **55**, 305;

A. I. Markuševič, Mat. Sbornik, n. Ser. **17** (59), 211—252 (1945); Gel'fand et Leont'ev, ce Zbl. **44**, 299. — 3. Le système $\{f(\lambda_n z)\}$ étant supposé complet dans tout le plan, on étudie l'approximation d'une fonction entière donnée par des combinaisons linéaires des $f(\lambda_n z)$. Voir: A. F. Leont'ev, Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **66**, 153—156 (1949); ce Zbl. **38**, 51; **52**, 78; I. I. Repin, ce Zbl. **64**, 316; G. D. Trošin, ce Zbl. **64**, 68; G. P. Lapin, ce Zbl. **45**, 354. — 4. Mêmes problèmes pour des fonctions de variable réelle: L. Schwartz, Étude des sommes d'exponentielles réelles, Paris 1943; A. F. Leont'ev, ce Zbl. **41**, 29. *G. Bourion.*

Turan, Paul: On the zeros of the zeta-function of Riemann. J. Indian math. Soc., n. Ser. **20**, 17—36 (1956).

Die einleitenden Seiten dieser Note zeigen die Bedeutung einer genaueren Kenntnis der Größenordnung von $N(\sigma, T)$ für eine Reihe wichtiger zahlentheoretischer Probleme. Die Aussage $N(\sigma, T) < c_1 T^{2(1-\sigma)} \log^2 T$ wäre bereits tieflegend (für kleine $1 - \sigma$) und hat wesentliche Konsequenzen. Hier werden Beiträge zu der geringeren Aussage $N(\sigma, T) < c T^{2(1+\epsilon)(1-\sigma)}$ angestellt. Die Behauptung wird zurückgeführt auf eine Vermutung, die aus dem Nichtverschwinden von $\zeta(s)$ in einem Parallelogramm $\sigma_0 \leq \sigma \leq 1$, $|t - t_0| \leq \log t_0$ schließt auf eine geringe Häufigkeit der Nullstellen von $\zeta(s)$ in $\sigma_0 - 5\delta \leq \sigma \leq \sigma_0$, $|t - t_0| \leq \delta/2$ ($g(\delta)$ mit $\delta \rightarrow 0$). *G. Hoheisel.*

Levinson, Norman: On closure problems and the zeros of the Riemann zeta function. Proc. Amer. math. Soc. **7**, 838—845 (1956).

Diese Variante zu den Resultaten von Beurling (dies. Zbl. **65**, 303) bringt einen elementarer verlaufenden Beweis, ohne einen wesentlich neuen Sachverhalt zu schaffen. Bemerkenswert ist die Einsicht des Verf., daß auf diesem Wege schwerlich die Lösung des Nullstellenproblems zu erwarten ist. *G. Hoheisel.*

Bochner, S.: Gamma factors in functional equations. Proc. nat. Acad. Sci. USA **42**, 86—89 (1956).

Die in den Funktionalgleichungen der Zeta-Funktionen algebraischer Zahlkörper und verwandter Dirichlet-Reihen vorkommenden Faktoren treten durchweg als verallgemeinertes Eulerintegral der Form

$$(1) \quad \Delta(s) \mu(x)^{-s} \lambda(x) = \int_P e^{-(x,t)} R(t)^s d\Omega(t)$$

auf, s komplexe Veränderliche, x, t Punkte des Euklidischen E_n , $(x, t) = \sum_{i=1}^n x_i t_i$, P ein offener Teil des E_n , $R(t)$ ein Polynom in t_1, \dots, t_n , und $\Omega(t)$ ein gewisses Borelsches Maß auf P . Dabei stellt sich $\Delta(s)$ stets als Produkt gewöhnlicher Γ - und e -Faktoren heraus:

$$(2) \quad \Delta(ks) = A e^{as} \prod_{i=1}^r \Gamma(s - a_i),$$

k ganz rational, $A > 0$, a reell, a_i komplex. Der Verf. is „going to give a criterion by which a function $\Delta(s)$ which satisfies relation (1) is indeed of the form (2). The integral (1) which we will envisage will be rather general and will very amply include all the particular cases known. But ours will be a pure existence theorem, and none of the particular computations is in any way superseded by it“. — Das Kriterium besteht außer den schon genannten Bedingungen für P , $R(t)$ und $d\Omega$ im wesentlichen in Differenzierbarkeitsforderungen für μ und λ , Regularität von Δ in einer Halbebene $\sigma \geq \sigma_0$ und einer gleichmäßigen Endlichkeitsforderung für das Integral (1). *H. Leptin.*

Riney, T. D.: On the coefficients in asymptotic factorial expansions. Proc. Amer. math. Soc. **7**, 245—249 (1956).

Let ${}_p g_q(w) = \prod_{i=1}^p \Gamma(w + \sigma_i) \prod_{j=0}^q \Gamma(w + \varrho_j)$, where $w = u + iv$ is a complex variable, the σ_i and ϱ_j are complex numbers, $p \leq q$ and $\varrho_j \neq \varrho_k$ for $j \neq k$.

Put $\alpha = q + 1 - p$, $\beta = \sum_{j=0}^q \varrho_j - \sum_{i=1}^p \sigma_i + \frac{1}{2(1-\alpha)}$. It is known that in every half plane $u > u_0$ the asymptotic development

$${}_x g_\alpha(w) = (\sqrt{2\pi})^{1-\alpha} \alpha^{\alpha w + \beta - 1/2} \left[\sum_{m=0}^M \frac{c_m}{\Gamma(\alpha m + \beta + m)} + O\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha w + \beta + M + 1)}\right) \right]$$

holds for large $|w|$ [W. B. Ford, Univ. of Michigan Studies, sci. Ser. 11 (1936); E. M. Wright, this Zbl. 25, 404; H. K. Hughes, Bull. Amer. math. Soc. 51, 456—461 (1945)]. The author proves that the coefficients c_m satisfy the recursion formula

$$c_m = \frac{-1}{m\alpha} \sum_{n=0}^{m-1} c_n e(m, n) \quad (c_0 = 1), \quad \text{where} \quad e(m, n) = \sum_{j=0}^q \frac{D_j \Gamma(\beta - \alpha \varrho_j + \alpha + m)}{\Gamma(\beta - \alpha \varrho_j + n)}$$

$$\text{and} \quad D_j = \prod_{i=1}^p (\sigma_i - \varrho_j) \left/ \sum_{k=0, k \neq j}^q (\varrho_k - \varrho_j) \right. \quad J. Horváth.$$

Hayman, W. K.: A generalisation of Stirling's formula. J. reine angew. Math. 196, 67—95 (1956).

Verf. beschäftigt sich mit Funktionen $f(z)$, die nachstehende Eigenschaften besitzen und von ihm als zulässige Funktionen („admissible functions“) bezeichnet werden. a) $f(z)$ ist holomorph für alle z mit $|z| < R$ ($0 < R \leq \infty$). b) Es gibt ein positives $R_0 < R$, derart daß $f(r)$ reell und positiv wird, falls r reell ist und zwischen R_0 und R liegt. c) Bei Annäherung $r \rightarrow R$ stehen $f(r)$ und $f(re^{i\theta})$ (θ reell) in folgender (quotienten-) asymptotischer Relation: Das Holomorphiegebiet von f zerfällt in zwei Teilgebiete, von denen das eine alle reellen $r < R$ einschließt und auf welchem $f(re^{i\theta})/f(r) \sim e^{i\theta a(r) - \theta^2 b(r)/2}$ gilt, während auf dem Komplementärgebiet $f(re^{i\theta})/f(r) = o(1/\sqrt{b(r)})$ ist, für $r \rightarrow R$, beide Male gleichmäßig bezüglich θ . d) Schließlich wird $b(r) \rightarrow \infty$ für $r \rightarrow R$ verlangt. Der Ausdruck $i\theta a(r) - \frac{1}{2}\theta^2 b(r)$ stellt dabei die nach dem zweiten Glied abgebrochene Entwicklung von $\log f(re^{i\theta})$ (an der Stelle $\log r$) nach Potenzen von $i\theta$ vor. Die erste der beiden asymptotischen Forderungen c) wird daher für jedes f , welches a) und b) genügt, innerhalb eines passend gewählten Gebietes um die positive reelle Achse stets zu erfüllen sein, erst durch die zweite asymptotische Bedingung für das komplementäre Gebiet wird der Kreis der zugelassenen Funktionen weitgehend eingeschränkt. Wie Verf. zeigt, ist für das Erfülltsein von a)—d) notwendig, daß für alle hinreichend nahe bei R gelegenen r $f(re^{i\theta}) < f(r)$ gilt, falls $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$. Zulässig (mit $R = \infty$) im Sinne obiger Definition ist e^z und allgemein $e^{P(z)}$, P ein Polynom, dessen Koeffizienten einfachen Bedingungen genügen. Ferner ganze Funktionen vom Geschlecht 0, die b) und d) genügen und deren Nullstellen fast alle außerhalb eines zur positiven x -Achse symmetrischen Winkelraumes liegen, dessen Öffnungswinkel $> \pi$ ist. Hierzu gehört die wohlbekannte, aus der ζ -Funktion durch elementare Abänderungen entstehende Funktion $\Xi(t)$ (welche zufolge der Funktionalgleichung der ζ -Funktion gerade ist), sofern man $t = i\sqrt{z}$ setzt. — Ferner werden einige Regeln angegeben, um neue zulässige Funktionen aus bekannten zu konstruieren. So hat z. B., falls f zulässig ist, e^f die gleiche Eigenschaft und auch $f g$, falls entweder g ein Polynom oder selbst zulässig ist. Die vom Verf. gewonnenen Aussagen über zulässige Funktionen haben zumeist die Gestalt asymptotischer Relationen (wie unter c)), für $r \rightarrow R$, betreffen aber $f(r)$, sowie die $f(r)$ darstellende Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$. Methodisch interessant erscheint Ref. die Verwandlung einer derartigen Aussage in ein asymptotisches Koeffizientengesetz für zulässige Funktionen, welches sich also auf den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ bezieht. Es reduziert sich für e^z auf die Stirlingsche Formel $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ und lautet allgemein $a_n \sim f(r_n)/r_n^n \sqrt{2\pi b(r_n)}$. Hierbei ist r_n für genügend große n durch die Gleichung $a(r_n) = n$ erklärt, und zwar eindeutig, da $a(r)$ (s. o.) monoton gegen $\rightarrow \infty$ wächst für $r \rightarrow R$.

H. W. Knobloch.

Ul'janov, P. L.: Über Cauchysche A-Integrale. I. Uspechi mat. Nauk 11, Nr. 5 (71), 223—229 (1956) [Russisch].

$f(x)$ sei reell und gehöre zu $L(0, 2\pi)$. $f(x)$ sei die konjugierte Funktion, $u(r, \varphi)$ das Poissonsche Integral für $f(\varphi)$ und $v(r, \varphi)$ die konjugierte harmonische Funktion. Dann läßt sich $u + iv = F(z)$ in der Gestalt $\frac{1}{2\pi i} (A) \int_{|\zeta|=1} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ darstellen, wobei $F(e^{ix}) = f(x) + i f(x)$ den Grenzwert von $F(z)$ bei Winkelannäherung von $z \rightarrow e^{ix}$ darstellt. Zum Beweis wird der vom Verf. verallgemeinerte Satz von Riesz (dies. Zbl. 65, 298) herangezogen. Weiter: Jede analytische Funktion, welche im Einheitskreis als L-Integral nach Cauchy darstellbar ist, ist es auch als A-Integral der oben angegebenen Gestalt. L. Schmetterer.

Kac, I. S.: Über Integraldarstellungen der analytischen Funktionen, die die obere Halbebene in sich abbilden. Uspechi mat. Nauk 11, Nr. 3 (69), 139—144 (1956) [Russisch].

Eine Funktion $f(z)$ der komplexen Veränderlichen z gehört zu der Klasse (R) , wenn sie für $\text{Im } z \neq 0$ definiert und holomorph ist und folgende Eigenschaften hat:

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)} \quad \text{und} \quad \text{Im } f(z)/\text{Im } z > 0.$$

Diese Klasse spielt eine wichtige Rolle in der Spektraltheorie der linearen Operatoren. Man weiß, daß eine Funktion dann und nur dann zu dieser Klasse gehört, wenn sie eine Integraldarstellung von der Art:

$$(I) \quad f(z) = a + bz + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{t-z} \right) d\tau(t)$$

gestattet. Dabei ist $\text{Im } a = 0$, $b \geq 0$ und $\tau(t) = \int_0^t (1+s^2) d\sigma(s)$ ist die Spektralfunktion von $f(z)$, wo $\sigma(s)$ eine abnehmende Funktion von beschränkter Variation bedeutet mit $\sigma(0) = 0$ und $\sigma(s-0) = \sigma(s)$. Das Integral (I) ist für $\text{Im } z \neq 0$ absolut konvergent. Der Verf. stellt folgende Beziehung her zwischen dem Verhalten von $f(z)$ auf der Halbachse $\text{Re } z = 0$, $\text{Im } z > 0$ und der zugehörigen Spektralfunktion: Damit eine Funktion $f(z) \in (R)$ eine Darstellung (I) besitzt, wo $b = 0$ und $\tau(t)$ eine abnehmende Funktion ist, so daß für eine geeignete α ($0 < \alpha < 2$) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau(t)}{|t|^\alpha + 1} < \infty$ gilt, ist notwendig und hinreichend, daß $\int_1^\infty \frac{\text{Im } f(i\eta)}{\eta^\alpha} d\eta < \infty$.

Die Arbeit enthält auch Kriterien dafür, daß $f(z) \in (R)$ die Darstellung $f(z) = c + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau(t)}{t-z}$ besitzt, wo c eine reelle Zahl und $\tau(t)$ eine abnehmende Funktion ist. Schließlich wird der Fall $c = 0$ untersucht. C. Andreian Cazacu.

Lavrent'ev (Lavrentiev), M. M.: Numerical estimates in interior theorems of uniqueness. Doklady Akad. Nauk SSSR 110, 731—734 (1956) [Russisch].

Carleman gave a numerical precision for the classical „boundary theorem of uniqueness: an analytic function vanishes identically on the domain D when it does vanish on an arc of the boundary of D . In this note the author introduces numerical precisions for „the interior theorems of uniqueness“ concerning analytic functions as well as harmonic functions. Let $f(z)$ be regular in the unit circle D on which $|f(z)| \leq 1$. Let A be a subset of D on which $|f(z)| \leq \varepsilon$. It is proved by the author that for any interior point z of D , there exists an exponent $m = m(A, \varepsilon)$ such that

$$|f(z)| \leq \left(\frac{|z| + |a|}{1 + |a| \cdot |z|} \right)^m,$$

provided that A has a limiting point at a , where $m \rightarrow \infty$ as $\varepsilon \rightarrow 0$. The proof is based on the following lemma: Let $\{a_k\} \subset A$ be such that $|a_k| \leq |a_{k+1}|$ and that $a_k \rightarrow a$. Let $m(\varrho)$ denote the minimum of $|f(z)|$ on $|z| = \varrho$. Then for any k , if $f(z) \neq 0$

on $|a_k| \leq \varrho \leq |a_{k+1}|$, the inequality $m(\varrho) \leq \varepsilon$ holds good either for $|a_k| \leq \varrho \leq |a_{k+1}|$ or for $|a_{k+1}| \leq \varrho \leq |a_{k+2}|$. For the harmonic function $u(z)$ satisfying the conditions (1) $|u(z)| \leq 1$ ($z \in D$) and $|u(z)| \leq \varepsilon$ ($z = r e^{i\varphi}$, $|\varphi| \leq \alpha$), the author considers the function

$$w(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2) u(e^{it}) dt}{1+r^2-2r \cos(t-\omega)}$$

of $\omega = \varphi + i\psi$ which is regular in the strip $|\psi| \leq H(r) < \ln [(1+r^2)/2r]$. On the lines $\psi = \pm H/2$, the author derives from (1) that

$$(2) \quad \ln |w(\omega)| \leq (\pi^2/H^3) e^{-\pi^2/H} \ln \varepsilon \cdot \alpha + \ln [(1-r^2)H/(1+r^2-2r e^H)2]$$

by using a formula given in the author's „Methods in the theory of functions of a complex variable“ (this Zbl. 64, 66). It follows from (2) that

$$(3) \quad |w(\omega)| \leq q(r) \varepsilon^{\gamma(r) \cdot \alpha} \quad (\psi = \pm H/2),$$

$q(r)$ and $\gamma(r)$ being some positive functions of r . (3) implies

$$(4) \quad |u(e^{\ln r + i\varphi})| \leq q(r) \varepsilon^{\gamma(r) \cdot \alpha}.$$

Using (4), the author can estimate $u(z)$ at any point z of D , by the help of Hadamard's 3-circles theorem.

Kien-Kwong Chen.

Tanaka, Chuji: On the class H_p of functions analytic in the unit circle. Yokohama math. J. 4, 47—53 (1956).

Die Klasse der in $|z| < 1$ regulären Funktionen $f(z)$ mit

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r e^{i\varphi})|^p d\varphi < \infty$$

werde mit H_p bezeichnet ($p > 0$). 1. Zu jedem $f \in H_p$ und fast jedem $\theta \in (0, 2\pi)$ gibt es eine den Kreis $|z| = 1$ in $z = e^{i\theta}$ von innen berührende geschlossene Jordan-Kurve C_θ , so daß $\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} f(z) = f(e^{i\theta})$ existiert, wenn z innerhalb C_θ gegen $e^{i\theta}$ strebt. Der bekannte Satz von F. Riesz [Math. Z. 18, 87—95 (1923)] garantiert dies für radiale Annäherung an $e^{i\theta}$. 2. Ist $f \in H_p$ und $\lim_{\theta \rightarrow \varphi-0} f(e^{i\theta}) = \alpha$, $\lim_{\theta \rightarrow \varphi+0} f(e^{i\theta}) = \beta$ (θ -Nullmengen können unbeachtet bleiben), so ist $\alpha = \beta$ und $\lim_{\theta \rightarrow \varphi} f(e^{i\theta}) = \alpha$ für $z \rightarrow e^{i\varphi}$ aus dem ganzen Inneren von $|z| < 1$. — Neben bekannten Hilfsmitteln für Funktionen $f \in H_p$ wird beim Beweis von 1. der von Tsuji (dies. Zbl. 20, 130) stammende Sonderfall $p = 1$ herangezogen, auf den sich der allgemeine Fall unmittelbar reduzieren läßt. Das Ergebnis 1. folgt außerdem sofort daraus, daß es richtig ist, wenn C_θ ein beliebiger Stolz'scher Winkelraum ist; für $p = 1$ hatte dies bereits R. Nevanlinna in seinem Referat zur Arbeit von Tsuji (s. o.) bemerkt.

D. Gaier.

Sunouchi, Gen-Ichirô: Theorems on power series of the class H^p . Tôhoku math. J., II. Ser. 8, 125—146 (1956).

If the function $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ be regular for $|z| < 1$ and if for some $p > 0$,

$\left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r e^{i\theta})|^p d\theta \right]^{1/p}$ is bounded as $r \rightarrow 1$, then it is said that $f(z) \in H^p$. It is known that functions of H^p ($p > 0$) possess boundary functions, which belong to L_p , i. e. $\lim_{r \rightarrow 1} f(r e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ exists p. p. and $f(e^{i\theta}) \in L_p$ in $[0, 2\pi]$. A necessary

and sufficient condition that $f \in H^p$, $p \geq 1$ is that the series (1) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\theta}$ be the Fourier series of the boundary function $f(e^{i\theta})$. In this paper the author gives simpler proofs of some of the known results concerning the behaviour on the boundary of a power series of the class H^p . He also generalizes some of these results. Let

$$g_{\alpha}^*(\theta) = \left[\int_0^1 (1-r)^{2\alpha} dr \int_0^{2\pi} Q(r, \theta, \varphi) d\varphi \right]^{1/2},$$

where $Q(r, \theta, \varphi) = |f'(r e^{i(\theta+\varphi)})|^2 / |1 - r e^{i\varphi}|^{2\alpha}$. Let $s_n(\theta)$ be the n^{th} partial sum of (1) and $\sigma_n^\alpha(\theta)$ be its n^{th} Cesàro mean of order $\alpha > -1$. Let $\tau_n^\alpha(\theta)$ denote the n^{th} Cesàro mean of order $\alpha > 0$ of $n c_n e^{in\theta}$. The following results, among others, have been proved: If $f(z) \in H^p$ ($0 < p < 1$) and if $\alpha = 1/p$, then

$$(2) \quad \int_0^{2\pi} \{g_\alpha^*(\theta)\}^p d\theta \leq A_p \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})| \log^+ |f(e^{i\theta})| d\theta + A'_p,$$

where A_p and A'_p are constants dependant on p only. If $f(z) \in H^p$, $0 < p \leq 2$, $\alpha = 1/p$ then

$$(3) \quad \int_0^{2\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} |\tau_n^\alpha(\theta)|^2 / n \{\log(n+1)\}^{2/p} \right]^{p/2} d\theta \leq A_p \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta;$$

from (3) is deduced

$$(4) \quad \int_0^{2\pi} \left[\sup_{0 < n < \infty} \{|\sigma_n^\alpha(\theta)| / \{\log(n+2)\}^{1/p}\} \right]^p d\theta \leq B_p \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta, \quad 0 < p \leq 1, \alpha = \frac{1}{p} - 1$$

which answers a question raised by Zygmund (this Zbl. 60, 202). *U. N. Singh.*

Zygmund, A.: On the Littlewood-Paley function $g^*(\theta)$. Proc. nat. Acad. Sci. USA 42, 208—212 (1956).

Let $\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ be regular in $|z| < 1$ and of class H^λ ($\lambda > 0$), and put

$\Phi(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1} \Phi(r e^{i\theta})$ and $\mathfrak{M}_\lambda[f] = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^\lambda d\theta \right\}^{1/\lambda}$. Then the author gives

$$(1) \quad \mathfrak{M}_\lambda[g^*] \leq A_\lambda \mathfrak{M}_\lambda[\Phi], \quad \lambda > 1, \quad (2) \quad \mathfrak{M}_\mu[g^*] \leq A_\mu \mathfrak{M}_1[\Phi], \quad 0 < \mu < 1,$$

$$(3) \quad \mathfrak{M}_1[g^*] \leq A \mathfrak{M}_1[\Phi \log^+ |\Phi|] + B, \quad \text{where}$$

$$g^*(\theta) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^1 (1-\varrho)^2 d\varrho \int_0^{2\pi} \frac{|\Phi'(\varrho e^{i(\theta+\varphi)})|^2}{|1-\varrho e^{i\varphi}|^2} d\varphi \right\}^{1/2}.$$

Littlewood and Paley (this Zbl. 15, 254) introduced the function $g^*(\theta)$, and showed (1) for $\lambda = 2, 4, \dots$ and the author proved (1) completely in another paper [Trans. Amer. math. Soc. 55, 170—204 (1944)]. Inequalities (2) and (3) are new. The above results are generalized as follows. If $\Phi \in H^\lambda$, $0 < \lambda \leq 1$, then

$$(4) \quad \mathfrak{M}_{\eta\lambda}[g_{\lambda/2}^*] \leq A_{\lambda,\eta} \mathfrak{M}_\lambda[\Phi], \quad 0 < \eta < 1$$

and if $\Phi \in H^\lambda \log^+ H$ then

$$(5) \quad \mathfrak{M}_\lambda^2[g_{\lambda/2}^*] \leq A_\lambda \{\mathfrak{M}_1[|\Phi|^\lambda \log^+ |\Phi|] + 1\},$$

where

$$g_\sigma^*(\theta) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^1 (1-\varrho)^\sigma d\varrho \int_{-\pi}^\pi \frac{|\Phi'(\varrho e^{i(\theta+\varphi)})|^2}{|1-\varrho e^{i\varphi}|^\sigma} d\varphi \right\}^{1/2}.$$

(4) and (5) are deduced from (2) and (3) by a familiar argument. From these inequalities the author derives for $\alpha = 1/\lambda - 1$, $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$,

$$\mathfrak{M}_{\lambda\eta} \left[\sup_n |\sigma_n^\alpha(\theta)| \right] \leq C_{\lambda,\eta} \mathfrak{M}_\lambda[\Phi] \quad \text{and} \quad \mathfrak{M}_\lambda^2 \left[\sup_n |\sigma_n^\alpha(\theta)| \right] \leq C_\lambda \{\mathfrak{M}_1[|\Phi|^\lambda \log^+ |\Phi|] + 1\}$$

where $\sigma_n^\alpha(\theta)$ denotes the n -th (C, α) mean of the series $\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\theta}$. This settles partially his conjecture (this Zbl. 60, 202), but the case $\frac{1}{2} < \lambda < 1$ remains open. All above facts are also showed independently by the reviewer [Tohoku math. J., II. Ser. 7, 96—109 (1955); preced. review].

G. Sunouchi.

Flett, T. M.: On some theorems of Littlewood and Paley. J. London math. Soc. 31, 336—344 (1956).

Let $\Phi(z)$ be regular in $|z| < 1$, and let $g(\theta) = \left\{ \int_0^1 (1-\varrho) |\Phi'(\varrho e^{i\theta})|^2 d\varrho \right\}^{1/2}$.

$g^*(\theta) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \varrho) |\Phi'(\varrho e^{i\theta})|^2 P(\varrho, t - \theta) dt d\varrho \right\}^{1/2}$, where $P(\varrho, t)$ is the Poisson kernel. Let Ω_θ be the domain bounded by the two tangents from $z = e^{i\theta}$ to the circle $|z| = \eta$, where $0 < \eta < 1$, together with that arc of the circle which is the more distant from $z = e^{i\theta}$, and let $s(\theta) = \left\{ \int_{\Omega_\theta} |\Phi'|^2 d\omega \right\}^{1/2}$ where $d\omega$ is the element of area. It is known that if $\Phi(z) \in H^\lambda$, where $\lambda > 0$, then

$$(1) \quad \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} g^\lambda(\theta) d\theta \right\}^{1/\lambda} \leq A(\lambda) \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |\Phi(e^{i\theta})|^\lambda d\theta \right\}^{1/\lambda} \quad \text{and}$$

$$(2) \quad \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} s^\lambda(\theta) d\theta \right\}^{1/\lambda} \leq A(\lambda, \eta) \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |\Phi(e^{i\theta})|^\lambda d\theta \right\}^{1/\lambda};$$

if $\lambda > 1$, then

$$(3) \quad \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} g^{*\lambda}(\theta) d\theta \right\}^{1/\lambda} \leq A(\lambda) \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |\Phi(e^{i\theta})|^\lambda d\theta \right\}^{1/\lambda}.$$

In the usual proofs (2) and (3) are deduced from (1) by arguments of considerable complexity. In this paper the author shows that (2) and (3) can be proved much simply by almost trivial modifications of the existing arguments. *J. A. Siddiqi.*

Ricci, Giovanni: Complementi a un teorema di H. Bohr riguardante le serie di potenze. *Revista Un. mat. Argentina* **17**, 185–195 (1956).

Let \bar{F}_m denote the set of power series $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ analytic for $|z| < 1$ and satisfying $|f(z)| \leq 1$ there, and let $M(f; r) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$. For each α , $0 \leq \alpha \leq 1$,

let $F_m(\alpha)$ denote the set of power series $g(z) = \alpha e^{i\varphi} z^m + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n z^n$ which are analytic for $|z| < 1$ and satisfy $|g(z)| \leq 1$ there. Bohr proved that $M(f; \frac{1}{3}) \leq 1$ for each $f(z) \in \bar{F}_0$, and that $\frac{1}{3}$ is the „best“ constant. The author now considers the problem of determining the constants

$$B_m \equiv \text{l. u. b. } [\gamma | M(f; \gamma) \leq 1; f \in \bar{F}_m],$$

$$B_m(\alpha) \equiv \text{l. u. b. } [\gamma | M(g; \gamma) \leq 1; g \in F_m(\gamma)].$$

His main result may be stated as follows. For each α , $0 \leq \alpha \leq 1$, define the polynomials

$$\varphi_m(\xi, \alpha) \equiv (1 - \alpha - \alpha^2) \xi^{m+1} + \alpha \xi^m + \xi - 1,$$

$$\psi_m(\xi, \alpha) \equiv (1 - 2\alpha^2) \xi^{m+1} + \alpha \xi^m + \alpha \xi - 1,$$

and let $\beta_m(\alpha)$ and $\bar{\beta}_m(\alpha)$ denote their respective smallest root in the interval $0 < \xi < 1$. Then $\beta_m(\alpha) < B_m(\alpha) < \bar{\beta}_m(\alpha)$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Several special cases of his theorem are considered in detail by the author. *M. O. Reade.*

Crum, M. M.: A property of schlicht functions. *J. London math. Soc.* **31**, 493–494 (1956).

The author proves: If $\sigma(z) = z + O(z^2)$ is regular and schlicht in $|z| < 1$, then either $\sigma(z) \equiv z$ or $\sigma(z_1)\sigma(z_2) = 1$ for some z_1 and z_2 in $|z| < 1$.

K. Noshiro.

Alenicyyn (Alenitsyn), Ju. (Ju.) E.: A contribution to the theory of schlicht functions and Bieberbach-Eilenberg functions. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **109**, 247–249 (1956) [Russisch].

Let $f(z)$, $f(0) = 0$, be regular in $|z| < 1$ and satisfy Bieberbach's condition $f(z)f(z') \neq 1$ for $|z| = r < 1$, $|z'| = r' < 1$. The author proves that

$$(1) \quad |\log(1 - f^2(z))| \leq -\log(1 - r^2)$$

so that $1 - r^2 \leq |1 - f^2(z)| \leq (1 - r^2)^{-1}$. The latter inequality can however be deduced from $|f(z)|^2 \leq r^2 (1 - r^2)^{-1}$ which was given independently by Shah (this Zbl. 64, 324) and Jenkins (this Zbl. 55, 308). Let $F(z)$ be meromorphic in $|z| < 1$ such that $F(0) = \infty$. The author shows that if $f(z)$ and $F(z)$ are schlicht on $|z| < 1$ and map $|z| < 1$ into non-overlapping images, then

$$(2) \quad |\log(1 - f(z)/F(z'))| \leq -\frac{1}{2} \log((1 - r^2)(1 - r'^2)).$$

The proof of (1) is based on (2), but (2) does not imply (1) wherein $f(z)$ may not be schlicht. Under the conditions of the theorem (2), the author by utilising Nehari's

inequality $\int_{C_1} S(w) \frac{\partial p_1}{\partial n} ds + \int_{C_2} S(w) \frac{\partial p_2}{\partial n} ds \geq 0$ concerning harmonic functions (this Zbl. 51, 312), demonstrates that

$$(3) \quad \operatorname{Re} \left\{ \alpha_1^2 \log \frac{z^2 f'(z) f'(0)}{f^2(z)} + 2 \alpha_1 \alpha_2 \log \left(1 - \frac{f(z)}{G(\zeta)} \right) + \alpha_2^2 \log \frac{G'(\zeta)}{G'(\infty)} \right\} \\ \leq |\alpha_1|^2 \log \frac{1}{1 - r^2} - |\alpha_2|^2 \log \left(1 - \frac{1}{\varrho^2} \right)$$

and that

$$(4) \quad \left| \frac{f^2(z) f'(z) f'(0) F'(\zeta)}{(f(z) - F(\zeta))^2 F^2(\zeta) F'(\infty)} \right| \leq \frac{r^2}{\varrho^2(1 - r^2)(\varrho^2 - 1)},$$

where $G(\zeta) = F(1/\bar{\zeta})$, $\varrho = |\zeta| > 1$. By a suitable combination of the two cases $\alpha_1 = \alpha_2$ and $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ of (3), the author establishes (2). For the derivative of $f(z)$, the author gives $|f'(z) f'(0)| \leq (1 - r^2)^{-1}$. This is obtained from

$$(5) \quad |f^2(z) f'(z) f'(0)/(1 - f^2(z))| \leq r^2/(1 - r^2)$$

by the help of (2). (5) is contained in (4) when $f(z)$ is schlicht. The proof of (5) is completed by the theory of subordination. The author also shows that if $f(z)$ is schlicht, then

$$|\log(z f'(z) f'(0) f^{-2}(z)) \pm \log(1 - f^2(z))| \leq (1 - r^2)^{-1}.$$

All the above estimates are precise.

Kien-Kwong Chen.

Erdős, P. and T. Kövári: On the maximum modulus of entire functions. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 7, 305—316, russ. Zusammenfassg. 317 (1956).

Durch mühsame und geschickte aber im Grunde elementare Rechnungen gelangen die Verff. zu folgendem Ergebnis. Der Maximalmodul $M(r)$ einer beliebigen ganzen Funktion $f(z)$ läßt sich durch eine Potenzreihe $N(r)$ mit nichtnegativen Koeffizienten so weit approximieren, daß $1/6 < M(r)/N(r) < 3$. Andererseits können die numerischen Schranken nicht durch beliebig nahe an 1 liegende Zahlen ersetzt werden. In der Tat wird ein $f(z)$ angegeben, für welches kein $N(r)$ mit $|\ln(M/N)| < 1/200$ existiert.

G. af Hällström.

Singh, S. K.: Exceptional values of entire functions. Duke math. J. 23, 527—531 (1956).

Es sei $f(z)$ ganz von endlicher Ordnung $\varrho > 0$, $L(r)$ eine stetige Funktion mit $L(cr) \sim L(r)$ für jedes $c > 0$. Verf. gibt einen expliziten Wert $k(\varrho)$ an, so daß

$$\limsup n(r, x) r^{-\varrho}/L(r) \geq k(\varrho) \limsup \ln M(r, f) r^{-\varrho}/L(r)$$

für alle x mit höchstens einer Ausnahme gilt. Ist $\lim T(r, f) r^{-\varrho}/L(r) = 1$ und $\lim n(r, x_1) r^{-\varrho}/L(r) = 0$, folgert Verf. für jedes endliche $x \neq x_1$ den Grenzwert $\lim n(r, x) r^{-\varrho}/L(r) = \varrho$.

G. af Hällström.

Boas jr., R. P.: Interference phenomena for entire functions. Michigan math. J. 3, 123—132 (1956).

Let $f(z)$ be an integral function of exponential type τ , bounded at $z = \pm n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Cartwright (this Zbl. 12, 171) has shown that if $\tau < \pi$ then (i) $|f(x)| \leq C \sup |f(n)|$. The example $z \sin \pi z$ shows that (i) is false when $\tau = \pi$, but if (ii) $f(x) = o(|x|)$ then (iii) $|f(x + \frac{1}{2}) + f(x - \frac{1}{2})| \leq C \sup |f(n)|$ (Bernstein, this Zbl. 34, 194). The left-hand side of (iii) may be regarded as the result of using an operator L on f . Boas here takes for L a more general operator $\lambda(D)$, where $D = d/dx$

and $\lambda(t)$ is regular for $-\pi \leq v \leq \pi$, $t = u + iv$, with (iv) $\lambda(\pm i\pi) = 0$. He proves (v) $|L f(x)| \leq C \sup |f(n)|$ with an explicit best possible value for C , shows that (iv) is essential, and that, if (ii) is replaced by $f(x) = o(|x|^q)$ ($q > 1$), and the order of the zeros in (iv) is at least p , then (v) holds if $p \geq q$, $L f(x) = O(1)$ if $p \geq q - 1$, $L f(x) = O(|x|^k)$ if $p \geq q - k - 1$ ($k = 1, 2, \dots, [q] - 1$). These results include Bernstein's theorem (loc. cit.) and a theorem due to A. J. Macintyre (this Zbl. 20, 377). N. A. Bowen.

Thron, W. J.: Entire solutions of the functional equation $f[f(z)] = g(z)$. Canadian J. Math. 8, 47—48 (1956).

P. C. Rosenbloom hat unter Anwendung der Nevanlinnaschen Theorie (dies. Zbl. 30, 251 und 47, 316) einen Problemkreis angestoßen, zu dem auch das vorliegende Ergebnis gehört: Falls $g(z)$ eine ganze transzendente Funktion endlicher Ordnung ist und dazu ein Wert a angegeben werden kann, der von $g(z)$ höchstens endlich oft angenommen wird, so gibt es keine ganze Funktion $f(z)$, die der Funktionalgleichung $f[f(z)] = g(z)$ genügt. Der Beweis wird mit verhältnismäßig einfachen funktionentheoretischen Mitteln geführt. H. Töpfer.

Meier, Kurt E.: Über Mengen von Randwerten meromorpher Funktionen. Commentarii math. Helvet. 30, 224—233 (1956).

Let $f(z)$ be meromorphic in a domain G of the upper half-plane whose boundary contains an interval I of the real axis. Let α and β be two positive numbers, such that $0 < \alpha < \beta < \pi$, and x be a point of I . Denote by $w_x(\alpha, \beta)$ the angular domain, with vertex at x , bounded by two rays $s_x(\alpha): \arg(z - x) = \alpha$ and $s_x(\beta): \arg(z - x) = \beta$. Denote by $S_x(\alpha)$, $S_x(\beta)$ the cluster set of $f(z)$ at x on $s_x(\alpha)$, $s_x(\beta)$ respectively. Define a set Γ_x as follows: A value a belongs to Γ_x , if there exist two different numbers α and β such that neither $S_x(\alpha)$ nor $S_x(\beta)$ contains the value a . The author proves the following (main) theorem: Let $f(z)$ be meromorphic in G . Then, there exists a subset Z of I of measure zero such that for every point $x \in I - Z$, either $f(z)$ has an angular limit at x or $f(z)$ assumes every value of Γ_x infinitely often in any angular domain w_x . To apply the main theorem, let M be an arbitrary subset of I of positive measure. The author obtains: Let $f(z)$ be meromorphic in G . Suppose that for every point x of M , there exist two rays, starting at x , on which $f(z)$ is bounded. Then, for almost every x of M , either $f(z)$ has a finite angular limit at x or $f(z)$ has poles in any angular domain w_x . Furthermore, the author states: Let $f(z)$ be meromorphic in G . Suppose that for every point x of M , there are two rays on which $f(z)$ converges to 0 as $z \rightarrow x$. Then, either $f(z) = 0$ in G or $f(z)$ takes every value, with a possible exception of the value 0, in any angular domain w_x for almost every point x of M . K. Noshiro.

Hiong, King-Lai: Sur un théorème fondamental de M. Milloux et ses extensions. I. II. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 59, 386—396, 397—402 (1956).

I. In a domain D containing the origin, let $f(x)$ be meromorphic, $\alpha_i(x)$, ($i = 0, 1, \dots, l$), ($\alpha_l \not\equiv 0$), be holomorphic; let $f_l = \sum_{i=0}^l \alpha_i f^{(i)}$, and a and b ($\neq 0$) be finite with the spherical distances $|a, \infty|$, $|b, \infty| \geq \delta > 0$. The inequality

$$T(r) < N(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + N\left(r, \frac{1}{f_l-b}\right) - N_1(r, f) + S(r, f)$$

where $N_1(r, f) = 2N(r, f) - N(r, f')$, is obtained, sharpening an inequality proved by Milloux (this Zbl. 26, 316) in the case $\alpha_0 \equiv 0$. — II. Two main results are obtained: (i) a, b in the inequality obtained above are replaced by functions $\Phi(x), \psi(x)$ ($\neq 0$), holomorphic in D ; (ii) a result analogous to (i) is given when $f(x)$, the $\alpha_i(x)$, $\Phi(x), \psi(x)$ are meromorphic in the whole plane, with $f(x)$ dominant. N. A. Bowen.

Hiong, King-Lai: Sur la limitation de $T(r, f)$ sans intervention des pôles. Bull. Sci. math., II. Sér. 80, 175—190 (1956).

Let $a (\neq \infty)$, nonzero b and c ($b \neq c$) be constants, where the spherical distances $|\infty, a|$, $|0, b|$, $|0, c|$, $|b, c|$ are all $\geq \delta > 0$, and let $f(x)$ be meromorphic in $|x| < R \leq \infty$. Then (Theorem I), for $0 < r < R$,

$$T(r, f) < N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-b}\right) + N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-c}\right) \\ - \left[N_1(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f^{(k+1)}}\right) \right] + S_k(r, f)$$

where $N_1(r, f) = 2N(r, f) - N(r, f')$. An analogous result when $f^{(k)}$ is replaced by $f_i \equiv \sum_{i=0}^l \alpha_i(x) f^{(i)}(x)$, the $\alpha_i(x)$ being holomorphic in $|x| < R$, $\alpha_0 = \text{constant}$, is given (Theorem II). A corollary of Theorem I is Theorem III: If $f(x)$ is a non-constant function meromorphic in the whole plane, then finite a and nonzero b and c ($b \neq c$) do not exist such that $\delta(a) + (k+1) [\delta^{(k)}(b) + \delta^{(k)}(c)] > 2(k+1)$, where δ denotes the defect. An extension of a theorem of Landau is given:

Theorem VI. Let $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ ($c_0, c_1, c_k, c_{k+1} \neq 0$) be holomorphic in $|x| < R$, let $a, b (\neq 0)$ be finite and such that $\delta(a, f) + (k+1) \delta(b, f^{(k)}) > (k+1)$. Then $|c_1| R < K e^{H\omega}$, where $H = H(k)$, $K = K(k)$ are numerical constants, and $\omega \equiv \omega(\delta, c_0, c_k, c_{k+1})$ is given explicitly. N. A. Bowen.

● Markušević (Markuschewitsch), A. I.: **Komplexe Zahlen und konforme Abbildungen.** (Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik. Bd. 16.) Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1956. 56 S. mit 45 Abb. Br. DM 4,10.

Vgl. die Besprechung des russ. Originals in diesem Zbl. 56, 300.

Mori, Akira: **On an absolute constant in the theory of quasi-conformal mappings.** J. math. Soc. Japan 8, 156—166 (1956).

Let $w = T(z)$ be an arbitrary quasi-conformal mapping of $|z| < 1$ onto $|w| < 1$ with distortion coefficient $\leq K$. (For definitions see L. V. Ahlfors, this Zbl. 57, 65.) Assume $T(0) = 0$. Then

$$\sup_{K, T, z_1 \neq z_2, |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1} \frac{|T(z_1) - T(z_2)|}{|z_1 - z_2|^{1/K}} = 16.$$

There is no mapping T which attains this value 16. Remark. This is a posthumous paper, edited by Z. Yûjôbô. I. Berstein.

Collingwood, E. F.: **A theorem on prime ends.** J. London math. Soc. 31, 344—349 (1956).

Ist D ein einfach-zusammenhängendes Gebiet der komplexen Ebene und f die Funktion, die den Einheitskreis konform auf D abbildet, so ist (nach Lindelöf, 1915) das dem Punkte $e^{i\theta}$ zugeordnete Primende von D mit dem „cluster set“ $C(f, e^{i\theta})$ identisch (wegen der Bezeichnungen C und C_γ vgl. z. B. dies. Zbl. 64, 72), während die Menge $\Pi(f, e^{i\theta})$ seiner Hauptpunkte von der Form $\bigcap_{\gamma} C_\gamma(f, e^{i\theta})$ ist, wobei der Durchschnitt über alle nach $e^{i\theta}$ strebenden Wege γ erstreckt wird. Diese Relationen gestatten die Zurückführung der Primendentheorie auf die Theorie der cluster sets. Aus einem anderen Satz von Lindelöf und einem kürzlich vom Verf. gefundenen Satz über cluster sets (dies. Zbl. 64, 72) wird gefolgert, daß die Punkte $e^{i\theta}$, denen Primenden mit Nebenpunkten entsprechen (für die also $C(f, e^{i\theta}) - \Pi(f, e^{i\theta}) \neq \emptyset$ ist), eine Menge der ersten Kategorie bilden. Dieses Ergebnis bestätigt von neuem, daß die von Carathéodory aufgeworfene Frage, ob sämtliche Primenden eines Gebietes von zweiter Art (d. h. aus einem Hauptpunkt und unendlich vielen Nebenpunkten bestehend) sein können, zu verneinen ist. P. Seibert.

● Stoilow, S.: **Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques.** (Collection de Monographies sur la Théorie des fonctions.) 2^{ième} éd. Paris: Gauthier-Villars 1956. XVI, 194 p.

Die zweite Auflage des Werkes stellt eine unveränderte Wiedergabe der 1. Auflage aus dem Jahre 1938 dar (vgl. dies. Zbl. 17, 378). Neu hinzugekommen sind am Schluß des Textteiles der 2. Auflage noch die drei bereits früher veröffentlichten Noten, nämlich 1. Sur les singularités des fonctions analytiques multiformes dont la surface de Riemann a sa frontière de mesure harmonique nulle (dies. Zbl. 60, 232), 2. Remarques sur la définition des points singuliers des fonctions analytiques multiformes [Bull. Sect. Sci. Acad. Roumaine 26, 671—672 (1946)], 3. Note sur les fonctions analytiques multiformes (dies. Zbl. 49, 63). In diesen drei zugefügten Noten werden vorwiegend Betrachtungen über die Randstellen gewisser Funktionen im Sinne Iversens vorgenommen, unter Heranziehung der vom Verf. geprägten Begriffe der „Transformation Intérieure“.

H. P. Künzi.

Andreian Cazacu, Cabiria: Über die normal ausschöpfbaren Riemannschen Flächen. Math. Nachr. 15, 77—86 (1956).

Let R be a Riemann surface in the sense of Stoilow which is defined as a covering surface of the Riemann sphere. A domain D contained in the projection of R is called completely ramified if the number of sheets of every island of R above D is ≥ 2 . The author proves: Let R be normally exhaustible in the sense of Stoilow (this Zbl. 22, 366). Denote by h the maximum number of disjoint, simply-connected, completely ramified domains, by n the number of sheets of R , by g the genus of R and by c the order of connectivity of R . Then, if $g = 0$, $h \leq 3$; if g and n are finite, $h \leq 4 + 4(g - 1)/n$; if c and n are finite, $h \leq 2 + 2(c - 2)/n$; if n is infinite, $h \leq 4$ or $h \leq 2$ according as g or c is finite. Furthermore, the author studies interrelations among normal exhaustible Riemann surfaces, Riemann surfaces of the class A_∞ introduced by Volkovyskij [Trudy mat. Inst. Steklov 34, 171 p. (1950)] and Riemann surfaces of the class (I) introduced by Stoilow (this Zbl. 49, 63). K. Noshiro.

Oikawa, Kotaro: Notes on conformal mappings of a Riemann surface onto itself. Kodai math. Sem. Reports 8, 23—30 (1956).

It is well known that if W is a closed Riemann surface of genus $g \geq 2$ the group \mathcal{G} of conformal mappings of W onto itself is finite. In fact, A. Hurwitz has shown that the order of \mathcal{G} does not exceed $84(g - 1)$. On the other hand, the case of a plane region ($g = 0$) of finite connectivity (≥ 3), has been solved completely by M. Heins. In this paper the case of a finite Riemann surface W with k boundary components and of a closed Riemann surface W' with k distinguished points on it is treated. The author proves that, if $2g + k - 1 \geq 2$ ($g \geq 0$, $k \geq 1$), then $N'(g, k) \leq N(g, k) \leq 12(g - 1) + 6k$, where N (N') is the maximum order of \mathcal{G} (\mathcal{G}') as W (W') runs through all finite (closed) Riemann surfaces with a given g and k . Exact estimation of N' has been obtained in the particular case of $g = 1$.

C. Uluçay.

Bers, Lipman: An outline of the theory of pseudoanalytic functions. Bull. Amer. math. Soc. 62, 291—331 (1956).

Expository paper on the theory of pseudoanalytic functions as developed especially by the author and his school and also by the Russian school (G. N. Polozhij, I. N. Vekua). The pseudoanalytic functions are here solutions of linear partial equations which are generalizations of the Cauchy-Riemann system. There is also another treatment of pseudoanalytic functions (s. R. Cacciopoli, this Zbl. 48, 60; 53, 242) defined as interior transformations which possess certain geometrical distortion properties. The author prefers to call such functions quasi-conformal. The quasi-conformal functions are essentially the same as the author's pseudoanalytic functions of the second kind. The author outlines a theory of pseudoanalytic functions which parallels closely the theory of analytic functions. He considers differentiation and integrations of such functions, behaviour at a point, unique continuation, univalent functions, formal powers, pseudoanalytic functions and differentials on Riemann surfaces, expansion and approximation theorems. No proofs are

given; the reader is referred to the original papers. There are classes of pseudo-analytic functions, defined each by a pair of generators F, G (for analytic functions $F \equiv 1, G \equiv i$). The so called F, G -derivative of a pseudoanalytic function is also pseudoanalytic, but belongs to another class. The principal advantage of the treatment by the author is that it allows to develop a computational apparatus, similar in many respects to that of the classical theory of functions, which can be applied to certain problems concerning linear elliptic equations. Also, if the generators are sufficiently smooth there holds a so-called similarity principle which allows to transfer to the pseudoanalytic functions a great number of classical results from the theory of functions. There is a large bibliography. *I. Berstein.*

Seleznov, A.: On the functions monogenic on closed sets and sets of type F_σ . Doklady Akad. Nauk SSSR **108**, 591—594 (1956) [Russisch].

A connected closed set F of the plane is said to be of class C , if its complement consists of a sequence of domains G_k , with simple closed curves γ_k as boundaries, such that

$$\sum_{k=0}^{\infty} \text{length } \gamma_k < \infty \quad \text{and} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\tau_{\delta, z}}{\delta} = \tau_z < \infty$$

where $\tau_{\delta, z}$ is the total length of the arcs of γ_k contained in a circle of radius δ with z as center. For $f(z)$ monogeneous on $F \in C$ the Cauchy integral theorem is valid, if we set

$$\int_F f(\xi) d\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\gamma_k} f(\xi) d\xi$$

($\Gamma = \bigcup_k \gamma_k$). A countable union E of sets of class C is by definition a set of class C_σ .

If $f(z)$ is monogeneous on $E \in C_\sigma$ and $F \in C$, $F \subset E$, then $\int_F f(\xi) d\xi = 0$. From these theorems, the author obtains an analogon of the Cauchy integral formula for functions defined on $F \in C$ and also a generalization of A. I. Ostrowski's theorem on ultraconvergence. *I. Berstein.*

Morev, I. A.: Monogene hyperkomplexe Funktionen. Ukrain. mat. Žurn. **8**, 423—434 (1956) [Russisch].

Es sei e_1, e_2, \dots, e_m die Basis einer assoziativen und kommutativen Algebra mit Einselement über dem Körper der komplexen Zahlen. Bedeuten a^k, b^k, c^k ($k = 1, 2, \dots, m$) eindeutige komplexwertige Funktionen in einem Gebiet D des euklidischen $R_n(x^1, x^2, \dots, x^n)$, so wird $f = \sum b^k e_k$ eine monogene hyperkomplexe Funktion nach der Funktion $\zeta = \sum a^k e_k$ in D genannt, $f = f\{\zeta; D\}$, wenn es eine dritte Funktion $\psi = \sum c^k e_k$ mit folgender Eigenschaft gibt: Setzt man $\Delta f = f(M') - f(M)$, $\Delta \zeta = \zeta(M') - \zeta(M)$, $\varrho = |\overline{M} \overline{M}'|$, wo M' ein variabler Nachbarpunkt des festen Punktes M in D ist, so gibt es für M und jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta(M) > 0$ so, daß der absolute Betrag jeder Komponente der Differenz $\Delta f - \psi(M) \Delta \zeta < \varepsilon \varrho$ ist für alle $\overline{M} \overline{M}'$ mit $\varrho < \delta(M)$. ψ ist die erste Ableitung von f nach ζ . Analog läßt sich die Monogenität von f nach mehreren Funktionen ζ^i ($i = 1, 2, \dots, p$) in D definieren. Verf. untersucht, welche Bedingungen die ζ^i erfüllen müssen, damit die Komponenten b^k einer monogenen Funktion f harmonische Funktionen der Komponenten x^i in D werden und f außerdem Ableitungen aller Ordnungen nach den ζ^i hat. Es sei \mathfrak{M} die Menge aller f , die nach gegebenen ζ^i in D monogen sind, wobei noch die Bedingungen: (1) $p < n$ und

$$(2) \quad \zeta^j = \sum_{k=1}^p a^{kj} x^k + \vartheta^j(x_1^{p+1}, \dots, x^n) \quad (j = 1, 2, \dots, p)$$

erfüllt sind. Dabei sind die a^{kj} hyperkomplexe Konstante und die ϑ^j hyperkomplexe Funktionen mit in D zweimal stetig nach den x^i differenzierbaren Komponenten.

Folgende Bedingungen sind notwendig und hinreichend dafür, daß jedes f aus \mathfrak{M} in D in den x^i harmonisch ist:

$$\nabla^2 \zeta^i = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, p). \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial \zeta^j}{\partial x_i} \frac{\partial \zeta^h}{\partial x_i} = 0, \quad (j, h = 1, 2, \dots, p),$$

Verlangt man statt (1) und (2) nur $p \leq n$ und setzt voraus, daß die ζ^i in D stetige partielle Ableitungen aller Ordnungen nach den x^i haben sollen, so besitzt f in D Ableitungen aller Ordnungen nach den ζ^i . E. Trost.

Rauch, H. E.: Harmonic and analytic functions of several variables and the maximal theorem of Hardy and Littlewood. Canadian J. Math. 8, 171—183 (1956).

Veröffentlichung eines Teiles der 1947 geschriebenen Dissertation des Verf.; die Resultate sind im wesentlichen enthalten in der (unabhängig aber später verfaßten) Arbeit von K. T. Smith (dies. Zbl. 71, 55). H. Tietz.

Sapogov, N. A.: Über die beste Annäherung analytischer Funktionen von mehreren Veränderlichen und über Reihen von Polynomen. Mat. Sbornik, n. Ser. 38 (80), 331—336 (1956) [Russisch].

In Verallgemeinerung eines Satzes von Bernstein über Funktionen einer komplexen Variablen wird bewiesen: Theorem 1: Die Funktion $f(z_1, z_2, \dots, z_k)$ ist dann und nur dann regulär im Innern des elliptischen Polyzylinders C_R : $|z_i + \sqrt{z_i^2 - 1}| \leq R$, $i = 1, 2, \dots, k$, und besitzt eine Singularität in einem Randpunkt von C_R , in dem in allen diesen Ungleichungen das Gleichheitszeichen gilt, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} (E_n[f])^{1/n} = \frac{1}{R}$ ist. Hier ist $E_n[f]$ die untere Grenze des Maximums von $|f - P_n|$ im Würfel $-1 \leq x_i \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, k$, berechnet für alle Polynome P_n des Grades n . Theorem 2: Es sei $P_{n_1 n_2 \dots n_k}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ ein Polynom von x_1, x_2, \dots, x_k , das bez. der Variablen x_i ($i = 1, \dots, k$) vom Grade n_i ist. Wenn für beliebige n_1, n_2, \dots, n_k und alle reellen x_i mit $-1 \leq x_i \leq 1$ die Polynome $P_{n_1 n_2 \dots n_k}$ beschränkt sind, d. h. $|P_{n_1 n_2 \dots n_k}| \leq L$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n_1, n_2, \dots, n_k} P_{n_1 n_2 \dots n_k}(z_1, \dots, z_n) \alpha_1^{n_1} \dots \alpha_k^{n_k}$ absolut und gleichmäßig im elliptischen Polyzylinder

$$|z_i + \sqrt{z_i^2 - 1}| \leq R_i, \quad R_i < 1/|\alpha_i| \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

und kann divergieren für alle Punkte (z_1, \dots, z_k) mit $|z_i + \sqrt{z_i^2 - 1}| = 1/|\alpha_i|$ $i = 1, 2, \dots, k$. W. Thimm.

Ronkin, L. I.: Über die Typen einer ganzen Funktion von zwei komplexen Veränderlichen. Mat. Sbornik, n. Ser. 39 (81), 253—266 (1956) [Russisch].

Zur Untersuchung des Wachstums der ganzen Funktion $f(z, u)$ werden folgende Begriffe eingeführt: 1. Die Konstante σ_f heiße Typ von f bezüglich des Paares der Veränderlichen, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Konstante A_ε gibt, so daß für alle (z, u) gilt: $|f(z, u)| \leq A_\varepsilon e^{(\sigma_f + \varepsilon)(|z| + |u|)}$ und außerdem eine Folge $\{z_n, u_n\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (|z_n| + |u_n|) = \infty$ existiert, für die $|f(z_n, u_n)| \geq e^{(\sigma_f - \varepsilon)(|z_n| + |u_n|)}$ ist. 2. Die Zahlen (σ_1, σ_2) heißen assoziierte Typen von f , wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Konstante $A_\varepsilon > 0$ gibt, so daß für alle (z, u) gilt

$$|f(z, u)| \leq A_\varepsilon e^{(\sigma_1 + \varepsilon)|z| + (\sigma_2 + \varepsilon)|u|}$$

und wenn für beliebige σ'_1, σ'_2 mit $\sigma'_1 \leq \sigma_1, \sigma'_2 \leq \sigma_2$ oder $\sigma'_1 < \sigma_1, \sigma'_2 \leq \sigma_2$ eine Folge $\{z_n, u_n\}$ existiert, derart daß $\lim_{n \rightarrow \infty} (|z_n| + |u_n|) = \infty$ ist und $|f(z_n, u_n)| \geq e^{\sigma'_1 |z| + \sigma'_2 |u|}$ gilt. 3. f heiße ganze Funktion von beschränktem regulärem Exponentialtypus bezüglich z , wenn für beliebiges $r > 0$ eine Konstante A_r und eine von r unabhängige Konstante a existieren, so daß für beliebiges u mit $|u| < r$ und alle z die Ungleichung $|f(z, u)| \leq A_r e^{a|z|}$ gilt. Wenn f diese Eigenschaft hat, sei $\sigma_z(u)$ der Typ von f als Funktion allein von z , also bei festem u . Die wichtigsten

Sätze des Verf. sind: (I) $f = \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{a_{nk}}{n!k!} z^n u^k$ habe endliches σ_f . Die assoziierten

Typen von f fallen mit den assoziierten Konvergenzradien der Reihe: $\sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{a_{nk}}{z^{n+1} u^{k+1}}$

zusammen. Daher können die bekannten Sätze über assoziierte Konvergenzradien auf die assoziierten Typen von f übertragen werden, vgl. Behnke-Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher (dies. Zbl. 8, 365), S. 37—38.

(II) f habe beschränkten regulären Exponentialtypus bezüglich z . Dann ist

$\sigma_z(u) = \sup_u \sigma_z(u)$ überall, mit Ausnahme einer Menge $M_f = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$, wobei

$E_n \subset E_{n+1}$ gilt und E_n eine beschränkte Menge vom absoluten harmonischen Maß 0 ist. Ist umgekehrt eine Mengenfolge $\{E_n\}$ mit diesen Eigenschaften gegeben, so existiert eine ganze Funktion Φ von beschränktem regulärem Exponentialtypus bez. z , so daß M_Φ die Vereinigungsmenge der E_n enthält und in ihrer abgeschlossenen Hülle enthalten ist. (III) f habe beschränkten regulären Exponentialtypus bez. z . Es sei:

$$h(\theta, u) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(re^{i\theta}, u)|}{r} \quad \text{und} \quad h(\theta) = \sup_u h(\theta, u).$$

Dann ist die Menge der Punkte u , in denen $h(\theta, u) < h(\theta)$ ist, Vereinigungsmenge von Mengen E_n der obigen Beschaffenheit. W. Thimm.

Remmert, Reinhold: Meromorphe Funktionen in kompakten komplexen Räumen. Math. Ann. **132**, 277—288 (1956).

Dans sa thèse (ce Zbl. **70**, 77), R. Remmert a établi un résultat d'où découle: si $\tau: X \rightarrow Y$ est une image holomorphe d'un espace analytique compact X dans un espace analytique quelconque Y , l'image $\tau(X)$ est un ensemble analytique dans Y . Les résultats obtenus dans l'étude de la projection des ensembles analytiques montrent dans le présent travail leur sens profond: ils permettent à l'auteur [cf. aussi: Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume, Math. Ann. **133**, 328—370 (1957)] de démontrer par une méthode qui semble appropriée, les résultats importants de W. Thimm (1939) et (1954): dans un espace analytique complexe compact, des fonctions méromorphes analytiquement dépendantes sont toujours algébriquement dépendantes. La même méthode permet d'établir un énoncé annoncé par W. L. Chow: si X est un espace analytique compact et connexe, à n dimensions, le corps $K(X)$ des fonctions méromorphes sur X est isomorphe à une extension algébrique d'un corps dont le degré de transcendance ne dépasse pas n sur le corps C des complexes. En utilisant des résultats récents de K. Stein [Math. Ann. **132**, 63—93 (1956)], on précise: le degré de transcendance $[K(X):C(f_1, \dots, f_k)]$ est majoré par le nombre maximum de composantes connexes de $\tau^{-1}[\tau(x)]$, $\tau = [X \rightarrow \bar{C}^k]$ étant la représentation de X dans le produit \bar{C}^k des plans complets donnée par $(f_1 \cdots f_k)$ qui forment une base de transcendance de $K(X)$.

P. Lelong.

Stein, Karl: Überlagerungen holomorph-vollständiger komplexer Räume. Arch. der Math. **7**, 354—361 (1956).

Die holomorph-vollständigen Räume haben in den letzten Jahren immer größere Bedeutung für die komplexe Analysis und die algebraische Geometrie bekommen. Es ist daher wichtig, einfache Bedingungen zu kennen, unter denen ein komplexer Raum holomorph-vollständig ist. Bekanntlich ist jedes holomorphkonvexe Riemannsche Gebiet über dem komplexen Zahlenraum C^n ein holomorph-vollständiger Raum. Das gilt auch für jedes unverzweigte pseudokonvexe Gebiet G über dem C^n , da nach K. Oka (dies. Zbl. **53**, 243) ein solches Gebiet immer holomorph-konvex (und sogar ein Holomorphiegebiet) ist. Der Verf. zeigt nun, daß sich unter Verwendung des Okaschen Resultates ein weiteres Kriterium angeben läßt: Jede unverzweigte,

unbegrenzte Überlagerung eines holomorph-vollständigen Raumes ist wieder ein holomorph-vollständiger Raum. Der Beweis dieses Satzes stützt sich außer auf den Okaschen Satz auf topologische Resultate von B. O. Koopman und A. B. Brown (dies. Zbl. 4, 132) und auf die Theorie der Rungeschen Paare, die in der vorliegenden Arbeit entwickelt wird. Ein Rungesches Paar ist ein Paar komplexer Räume X, X^* , das folgende Eigenschaften hat: 1. X ist ein Teilbereich von X^* , 2. jede in X holomorphe Funktion läßt sich im Innern von X durch in X^* holomorphe Funktionen gleichmäßig approximieren. Sind X, X^* holomorph-vollständige Räume, so lassen sich notwendige und hinreichende Kriterien dafür angeben, daß X, X^* ein solches Rungesches Paar ist. U. a. ist dieses genau dann der Fall, wenn X in bezug auf X^* holomorphkonvex ist. Ein für den Beweis des Hauptsatzes der Arbeit wichtiger Satz ist: Es sei X_r eine Folge von zusammenhängenden holomorph-vollständigen Räumen, alle (X_r, X_{r+1}) seien Rungesche Paare, Dann ist auch $X = \bigcup_r X_r$ ein holomorph-vollständiger Raum.

H. Grauert.

Kaizuka, Tetsu and Yoshimasa Michiwaki: On some property of bounded analytic transformations. Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A 5, 137—143 (1956).

S. Takahashi hat als Verallgemeinerung eines Satzes von Landau und Dieudonné folgende Aussage hergeleitet: Es sei $W = W(Z)$ (mit $W = (w_1, \dots, w_n)$, $Z = (z_1, \dots, z_n)$) eine holomorphe Abbildung der Einheitshyperkugel H des komplexen Zahlenraumes C^n in den C^n . Wenn $W(0) = 0$, $dW(0)/dZ = ((dw_\nu(0)/dz_\mu)) = E$, $|W(Z)| = (|w_1(Z)|^2 + \dots + |w_n(Z)|^2)^{1/2} < M$ ist, dann gibt es Zahlen $r > 0$, $R > 0$, so daß gilt: 1. $W(Z)$ ist in $|Z| = (|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2)^{1/2} < r$ eineindeutig, 2. es gibt einen Teilbereich von H , der durch $W = W(Z)$ umkehrbar holomorph auf die Hyperkugel $|W| < R$ abgebildet wird. Die Konstanten r und R hängen dabei nur von n und M ab. S. Takahashi hat Zahlen r und R explizit angegeben. Sie wurden 1956 von I. Onô verbessert. In der vorliegenden Arbeit wird nun gezeigt, daß man unabhängig von n stets $r = 2\sqrt{3}/9M$, $R = \sqrt{3}/9M$ setzen darf. Dieses Resultat wird mit Hilfe eines verallgemeinerten Schwarzschen Lemmas bewiesen.

H. Grauert.

Ozaki, Shigeo, Sadao Kashiwagi and Teruo Tsuboi: Note on bounded analytic transformations. Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A 5, 144—148 (1956).

Wie in der vorigen Arbeit wird auch hier der Satz von Takahashi betrachtet. U. a. wird gezeigt, daß man $R = (1/3M)(3 + (M^2 - 1)^{-1})^{-1/2}$ setzen darf. Die Herleitung dieses Resultates macht ebenfalls von einem verallgemeinerten Schwarzschen Lemma Gebrauch, ist aber sonst von dem Kaizuka-Michiwakischen Beweis verschieden.

H. Grauert.

Segre, Beniamino: Sui punti fissi delle trasformazioni analitiche. I—III. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 19, 200—204 (1955); 19, 357—361 (1956); 20, 1—7 (1956).

La première de ces trois notes pose le problème suivant: soient V_n, W_n deux variétés analytiques complexes de dimension n ; sur V_n opère une transformation analytique T possédant un point fixe au voisinage duquel elle est définie, pour un choix convenable des coordonnées locales x, y, \dots, z , par les formules

$$(1) \quad \begin{aligned} x' &= a x + \sum a_{ij\dots l} x^i y^j \dots z^l, & y' &= b y + \sum b_{ij\dots l} x^i y^j \dots z^l, \\ & & \dots, & z' = c z + \sum c_{ij\dots l} x^i y^j \dots z^l; \end{aligned}$$

de même, sur W_n opère une transformation analytique θ possédant un point fixe au voisinage duquel elle est définie, pour un choix convenable des coordonnées locales X, Y, \dots, Z , par les formules

$$(2) \quad \begin{aligned} X' &= a X + \sum A_{ij\dots l} X^i \dots Z^l, & Y' &= b Y + \sum B_{ij\dots l} X^i \dots Z^l, \\ & & \dots, & Z' = c Z + \sum C_{ij\dots l} X^i \dots Z^l; \end{aligned}$$

en supposant $ab \cdots c \neq 0$, peut-on transmuier T en θ , au voisinage des deux points fixes, par une transformation analytique définie, avec les coordonnées locales choisies ci-dessus, par des formules du type

$$(3) \quad \begin{aligned} X &= x + \sum \alpha_{ij \dots l} x^i y^j \cdots z^l, & Y &= y + \sum \beta_{ij \dots l} x^i y^j \cdots z^l, \\ & \dots, & Z &= z + \sum \gamma_{ij \dots l} x^i y^j \cdots z^l, \end{aligned}$$

en particulier, peut-on, par une transformation du type (3), ramener une T donnée à la forme canonique (4) $X' = aX$, $Y' = bY$, \dots , $Z' = cZ$? Formellement, c'est-à-dire abstraction faite des questions de convergence, la réponse est affirmative, avec une solution unique, pourvu que, pour tout choix des entiers $i, j, \dots, l \geq 0$ tels que $i + j + \dots + l \geq 2$, on ait $a^i b^j \cdots c^l \neq a, b, \dots, c$, condition que l'A. exprime en disant que T est arithmétiquement générale. La convergence, au voisinage de l'origine, des séries formelles (3) ainsi obtenues, est établie dans la seconde note en supposant, ou bien $|a|, |b|, \dots, |c|$ tous < 1 , ou bien $|a|, |b|, \dots, |c|$ tous > 1 : le procédé employé consiste naturellement à majorer, terme à terme, les séries (3) par la solution, connue, du problème dans un cas particulier. T est toujours supposée arithmétiquement générale. La troisième note construit un exemple de transformation T arithmétiquement générale telle que, si on cherche à la ramener à la forme canonique (4) par une transformation du type (3), les séries formelles obtenues, de façon unique, ne convergent dans aucun voisinage de l'origine. Dans cet exemple, $n = 2$, T est définie par (1) $x' = ax + \sum a_{ij} x^i y^j$, $y' = by$, où a, b et les a_{ij} sont réels, $0 < b < 1 < a$; alors T est arithmétiquement générale si et seulement si $c = -(\log a)/\log b$ est irrationnel, et l'exemple répond à la question moyennant des conditions simples imposées, d'une part au développement de c en fraction continue, dont les réduites sont notées p_r/q_r , d'autre part aux a_{ij} pour les seuls couples $i = q_r + 1$, $j = p_r$.

M. Hervé.

Modulfunktionen. Fastperiodische Funktionen:

Selberg, A.: Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series. J. Indian math. Soc., n. Ser. 20, 47—87 (1956).

Die Arbeit ist eine Skizze einer geschlossenen Theorie, die der Verf. in den letzten fünf Jahren entwickelte, und über die er bisher nur in Vorlesungen berichtete. Sie zerfällt in zwei Teile, deren erster eine leicht verständliche Einführung in die Grundzüge darstellt, unter Ausführung oder wenigstens ausführlicher Andeutung der Beweise. Der zweite Teil berichtet über charakteristische Anwendungen, verzichtet aber fast durchweg auf Beweise. — (I) S sei ein Riemannscher Raum mit der positiv definiten Metrik $ds^2 = \sum g_{ik} dx^i dx^k$, die g_{ik} seien analytisch in den Koordinaten x^i . Es gebe eine transitive Gruppe G von Isometrien von S . (1) Es werden Integraloperatoren studiert, deren Kerne $k(x, y)$ die Invarianzgleichung $k(mx, my) = k(x, y)$ für alle $m \in G$ erfüllen. Der Raum heißt schwach symmetrisch, wenn es eine Isometrie μ mit den Eigenschaften gibt: $\mu^{-1}G\mu = G$, zu je zwei Punkten $x, y \in S$ gibt es ein $m \in G$ mit $\mu x = my$, $\mu y = mx$. In schwach symmetrischen Räumen sind alle Integraloperatoren vertauschbar. Der Ring der invarianten Differentialoperatoren besitzt eine endliche Basis D_i , auch diese D_i sind kommutierbar. Eine Eigenfunktion aller D_i mit den zugehörigen Eigenwerten λ_i ist gleichzeitig eine Eigenfunktion jedes Integraloperators, wobei der Eigenwert eine Funktion $h(\lambda) = h(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ der Eigenwerte der D_i ist. (2) Γ sei eine diskrete Untergruppe von G , welche in S eigentlich diskontinuierlich ist, und $\chi(M)$, $M \in \Gamma$, sei eine Darstellung ν -ten Grades von Γ . Man studiert nun Funktionen $F(x)$ mit Werten in dem Darstellungsmodul von $\chi(M)$ mit der Invarianzeigenschaft $F(Mx) = \chi(M)F(x)$, welche Eigenfunktionen der D_i sind. Die Wirkung der Integraloperatoren auf diese

$F(x)$ kann so geschrieben werden:

$$\int_S k(x, y) F(y) dy = \int_D K(x, y; \chi) F(y) dy, \quad K(x, y; \chi) = \sum_{M \in \Gamma} \chi(M) k(x, My),$$

wo D ein Fundamentalbereich von Γ in S ist. Die Reihe für $K(x, y; \chi)$ konvergiert absolut und gleichmäßig unter gewissen Bedingungen für $k(x, y)$, die fortan als erfüllt vorausgesetzt werden. Es gilt nun mit der in (2) erklärten Funktion $h(\lambda)$:

$$\sum_{\lambda} h(\lambda) = \text{Spur} \left(\int_D K(x, x; \chi) dx \right);$$

links wird über sämtliche Systeme λ simultaner Eigenwerte der D_i summiert; die Summe ist, je nach den über $k(x, y)$ und D gemachten Voraussetzungen, entweder konvergent oder in einem gewissen Sinne limitierbar. Vorbedingung dieser Gleichung ist vor allem die Existenz eines diskreten Eigenwertspektrums, welches z. B. im Falle eines kompakten Fundamentalbereichs D vorliegt. Die rechte Seite kann man nun noch durch eine elementare Umformung in die Gestalt einer Summe bringen, in der M nur ein Repräsentantensystem der Klassen konjugierter Elemente durchläuft. So entsteht die fundamentale Spurformel, auf die sich alle Anwendungen der Theorie stützen. Die Beschreibung der in der Spurformel auftretenden Größen an dieser Stelle würde zu weit führen. — (II) Abgesehen von kürzeren Andeutungen werden zwei Anwendungen der allgemeinen Spurformel behandelt. (i) S sei die obere komplexe Halbebene: $z = x + iy$, $y > 0$, gedeutet als das Poincarésche Modell der hyperbolischen Ebene, G die hyperbolische Bewegungsgruppe, Γ eine Untergruppe von G mit kompaktem Fundamentalbereich. Der einzige invariante Differentialoperator ist der Beltramische $\Delta = y^{-2} (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)$, alle Eigenfunktionen sind Linearkombinationen von y^s für verschiedene s . Die explizite Ausführung der Spurformel führt insbesondere zu einer der Gruppe Γ zugeordneten Zetafunktion, deren Definition das Folgende vorausgeschickt werden muß: Ein $M \in \Gamma$ läßt sich mittels eines $m \in G$ in die Normalform $m^{-1} M m(z) = \rho z$ mit reellem ρ , $|\rho| > 1$, transformieren. Man schreibt $|\rho| = N(M)$. Ein $P \in \Gamma$ heißt primitiv, wenn es sich nicht mittels eines $Q \in \Gamma$ in der Form $P = Q^h$, $h > 1$, darstellen läßt. Die Zetafunktion ist nun

$$\zeta_{\Gamma}(s, \chi) = \prod_P \prod_{k=0}^{\infty} |1_{\nu} - N(P)^{-k-s}|,$$

wo P ein Repräsentantensystem aller Klassen primitiver Elemente von Γ durchläuft und 1_{ν} die ν -reihige Einheitsmatrix bedeutet. $\zeta_{\Gamma}(s, \chi)$ ist eine ganze Funktion der Ordnung 2, ausgenommen, wenn der Fundamentalbereich das Geschlecht 0 hat; dann tritt in $s = 0$ ein Pol höchstens ν -ter Ordnung auf. $\zeta_{\Gamma}(s, \chi)$ hat „triviale“ Nullstellen in $s = 0, -1, -2, \dots$. Die „nicht-trivialen“ Nullstellen liegen in $s = \frac{1}{2} + i\tau$, wobei $\lambda = -(\frac{1}{4} + \tau^2)$ die Eigenwerte des Beltrami-Operators Δ durchläuft. $\zeta_{\Gamma}(s, \chi)$ und $\zeta_{\Gamma}(1-s, \chi)$ sind durch eine einfache Funktionalgleichung verbunden. Ist der Fundamentalbereich von Γ nicht mehr kompakt, aber noch von endlichem Flächeninhalt, so hat das Eigenwertspektrum von Δ einen kontinuierlichen Anteil. Man kann jetzt aber einen Integraloperator angeben, der nur noch den diskreten Anteil des Spektrums besitzt. Im Falle einer einzigen parabolischen Spitze wird dieser Schritt explizit durchgeführt. Die entsprechend gebildete Zetafunktion hat etwas andere Eigenschaften. (2) Die Heckschen Operatoren T_n (d. h. die Darstellungen der klassischen Modularkorrespondenzen) im Modul der elliptischen ganzen Modulformen der Dimension $-k$, $k \geq 2$, lassen sich durch einen Kunstgriff als Integraloperatoren schreiben. Die Auswertung der allgemeinen Spurformel liefert die folgende Spurformel für die T_n :

$$\text{Spur}(T_n) = -\frac{1}{2} \sum_{s^2 < 4n} h(s^2 - 4n) \frac{\eta_s^{k-1} - \bar{\eta}_s^{k-1}}{\eta_s - \bar{\eta}_s} - \sum'_{d|n, d \leq \sqrt{n}} d^{k-1} + \delta(\sqrt{n}) \frac{k-1}{12} n^{k/2-1};$$

hier ist $\eta_s = \frac{1}{2}(s + \sqrt{s^2 - 4n})$, $\eta_s = \frac{1}{2}(s - \sqrt{s^2 - 4n})$; $h(u)$ ist die Klassenanzahl der binären quadratischen Formen der Diskriminante u mit der Modifikation $h(-3) = \frac{1}{3}$, $h(-4) = \frac{1}{2}$; Σ' bedeutet, daß der Summand $d = \sqrt{n}$ $\frac{1}{2}$ -mal zu zählen ist. Endlich ist $\delta(\sqrt{n}) = 1$, wenn $\sqrt{n} \equiv 0 \pmod{1}$, sonst $\delta(\sqrt{n}) = 0$. Die Formel gilt für $k > 2$; im Falle $k = 2$ ist noch das Zusatzglied $\sum_{d|n} d$ anzubringen. [Für einen anderen

Beweis dieser Formel im Rahmen der klassischen Funktionentheorie vgl. die Arbeit des Ref. in Math. Z. **67**, 267—298 (1957)]. M. Eichler.

Maass, Hans: Spherical functions and quadratic forms. J. Indian math. Soc., n. Ser. **20**, 117—162 (1956).

Die Bestimmung der Anzahl der Darstellungen einer definiten quadratischen Form T in n Variablen durch eine definite Form S in $m > n$ Variablen führt auf die Dirichletreihe $\varphi(s, S) = \sum_X |X' S X|^{-s}$, wobei X alle ganzzahligen Matrizen vom Format $m \times n$ aus einem „Homogenitätsbereich“ \mathfrak{B} durchläuft und $T = X' S X$ reduziert im Minkowskischen Sinne ist; wir haben hier die Formen S, T mit ihren Koeffizientenmatrizen gleichgesetzt. Unter einem Homogenitätsbereich wird ein Modul von Matrizen vom Format $m \times n$ verstanden, welcher mit X auch XV mit einer nicht-singulären n -reihigen Matrix V enthält. Setzt man

$$f(X) = 1 \text{ für } X \in \mathfrak{B}, = 0 \text{ sonst,}$$

$g(T) = 1$, falls T im Minkowskischen reduzierten Kegelliegt, $g(T) = 0$ sonst, so schreibt sich diese Dirichletreihe $\varphi(s, S) = \sum_X f(X) g(X' T X) |X' S X|^{-s}$, wobei jetzt die Summe über ein Repräsentantensystem der Klassen rechtsseitig assoziierter Matrizen X erstreckt werden muß. Verf. schlägt vor, $f(X)$ durch „verallgemeinerte Kugelfunktionen“ $u(X)$ und $g(T)$ durch „verallgemeinerte Winkelcharaktere“ $v(T)$ zu approximieren und dann die funktionentheoretischen Eigenschaften der Reihen $\varphi(s, S; u, v) = \sum_X u(X) v(X' S X) |X' S X|^{-s}$ zu studieren. Die Arbeit zerfällt dementsprechend in drei Teilabschnitte. (I) Sei $\partial/\partial X = (\frac{1}{2}(1 + \delta_{\mu\nu}) \partial/\partial x_{\mu\nu})$, $\Lambda = X \partial/\partial X' - (X \partial/\partial X')'$, dann nennt man eine verallgemeinerte Kugelfunktion ein Polynom $u(X)$ in den Koeffizienten von X mit den drei Eigenschaften: 1. $u(XV) = |V|^{2k} u(X)$ mit einer natürlichen Zahl k (der Grad von $u(X)$ ist dann $2kn$), 2. $[\partial/\partial X' \cdot \partial/\partial X] u(X) = 0$, 3. $u(X)$ ist Eigenfunktion von jedem Operator $\text{Spur}(\Lambda^{2h})$, $h = 1, 2, \dots$. Eine willkürliche, in $X' X > 0$ erklärte und hier stetige Funktion $U(X)$ läßt sich durch eine Reihe von verallgemeinerten Kugelfunktionen im Mittel approximieren. (II) Ein verallgemeinerter Winkelcharakter $v(T)$ ist eine Funktion der symmetrischen Matrixvariablen T mit den vier Eigenschaften: 1. $v(T)$ ist holomorph in $T > 0$ und homogen vom Grade 0, 2. $v(T) = v(U' T U)$ für unimodulare Matrizen U , 3. sei \mathfrak{B} der Durchschnitt von $|T| = 1$ mit dem Minkowskischen reduzierten Kegel, dann ist $v(T)$ in \mathfrak{B} quadratisch integrierbar, 4. $v(T)$ ist Eigenfunktion jedes Differentialoperators $\text{Spur}((T \partial/\partial T)^h)$, $h = 1, 2, \dots$. Es wird der (von A. Selberg zuerst ohne Beweis mitgeteilte) Satz bewiesen, daß die Operatoren $\text{Spur}((T \partial/\partial T)^h)$, $h = 1, 2, \dots$, eine Basis des Ringes aller bei $T \rightarrow U' T U$, $U \neq 0$, invarianten Differentialoperatoren bilden. Bez. Erörterungen über die Approximierbarkeit willkürlicher Funktionen s. H. Maass, *ibid.* **19**, 1—23 (1955). (III) Die oben definierte Dirichletreihe genügt der Funktionalgleichung

$$\xi(\tfrac{1}{2}m + 2k - s, S; u, v) = (-1)^{kn} |S|^{-n/2} \xi(s, S^{-1}; u, v^*),$$

wo

$$\xi(s, S; u, v) = \varphi(s, S; u, v) \cdot \pi^{-ns} \Gamma(s - \beta_1) \cdots \Gamma(s - \beta_n),$$

β_1, \dots, β_n sind Konstanten, welche lediglich von den Eigenwerten des Winkelcharakters $v(T)$ abhängen, $v^*(T)$ ist der durch $v^*(T) = v(T^{-1})$ definierte Winkelcharakter, $2kn$ ist der Grad der Kugelfunktion $u(X)$ (vgl. (II)). Die Funktion $\varphi(s, S; u, v)$ ist in der ganzen s -Ebene holomorph. M. Eichler.

Pjateckij-Šapiro (Piatetsky-Shapiro), I. I.: On the theory of modular Abel functions. Doklady Akad. Nauk SSSR 106, 973—976 (1956) [Russisch].

Verf. hat seine Untersuchungen über singuläre Modulfunktionen (dies. Zbl. 70, 78) in einem allgemeineren Rahmen weitergeführt und legt in dieser Note seine Ergebnisse vor. Ausgangspunkt ist jetzt eine Algebra \mathfrak{A} von quadratischen Matrizen des Ranges $2p$ (p natürliche Zahl) über dem rationalen Zahlkörper, die als Multiplikatorenalgebra dienen soll. R_0 sei eine schiefsymmetrische nichtsinguläre $2p$ -reihige Matrix mit rationalen Elementen. $\Omega_{\mathfrak{A}, R_0}$ sei die Menge der Riemannschen Matrizen mit R_0 als Hauptmatrix, die die Elemente von \mathfrak{A} als Multiplikatoren zulassen. Über \mathfrak{A} wird jetzt nur vorausgesetzt, daß jede rationale Matrix, die für alle Elemente von $\Omega_{\mathfrak{A}, R_0}$ Multiplikator ist, bereits in \mathfrak{A} enthalten ist und natürlich, daß $\Omega_{\mathfrak{A}, R_0}$ nicht leer ist (Verf. hatte bisher nur den Fall untersucht, in dem \mathfrak{A} isomorph einem total-reellen algebraischen Zahlkörper ist). Bei gegebenen \mathfrak{A} und R_0 werden wieder die zugehörige Modulgruppe und die entsprechenden Modulfunktionen untersucht. Das Operationsgebiet der Modulgruppe erweist sich jetzt als ein Produkt von irreduziblen symmetrischen Gebieten der drei ersten Cartanschen Typen. Es zeigt sich, daß die drei Hauptsätze über Modulfunktionen aus der früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 70, 78) auch für die Modulfunktionen zu den hier betrachteten allgemeineren Modulgruppen richtig sind. Verf. skizziert kurz, welches die wesentlichen Schritte bei den Beweisen sind und macht einige Andeutungen darüber, welche Komplikationen gegenüber den bisher behandelten Fällen auftreten. Bemerkenswert ist insbesondere, daß in dieser allgemeinen Klasse von Modulfunktionen auch die Hermiteschen Modulfunktionen enthalten sind, so daß die hier behandelten Modulfunktionen alle bisher bekannten Klassen derartiger Funktionen umfassen.

K.-B. Gundlach.

Rosati, Mario: Qualche aspetto della teoria delle funzioni ellittiche modulari ed abeliane modulari. Archimede 8, 145—153 (1956).

Es wird geschildert, was die Modulfunktion ist, was sie mit der birationalen Invariante „Modul“ der Kurven vom Geschlechte 1 und mit den elliptischen Funktionenkörpern zu tun hat, sowie in welchem Sinne die abelschen Modulfunktionen ihre Verallgemeinerung sind.

G. Lochs.

Petersson, Hans: Über Eisensteinsche Reihen und automorphe Formen von der Dimension — 1. Commentarii math. Helvet. 31, 111—144 (1956).

Es sei Γ eine Grenzkreisgruppe 1. Art, $r > 0$, v ein Multiplikatorsystem von Γ und $-r$ vom Betrage 1, ferner $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(\Gamma, -r, v)$ die Schar der ganzen automorphen Formen von Γ zur Dimension $-r$ und v , $\mathfrak{C}^+ = \mathfrak{C}^+(\Gamma, -r, v)$ die Teilschar der ganzen Spitzenformen und $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(\Gamma, -r, v)$ die Schar der f aus $\mathfrak{C}(\Gamma, -r, v)$ die im Sinne der Metrisierung der automorphen Formen auf allen Formen von $\mathfrak{C}^+(\Gamma, -r, v)$ senkrecht stehen. Es ist dann $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^+ \oplus \mathfrak{N}$. Die Schar \mathfrak{N} kann bekanntlich als Analogon der für Hauptkongruenzgruppen durch die Eisensteinreihen erzeugten Schar aufgefaßt werden. Während in Fällen absoluter Konvergenz die Auszeichnung von Erzeugenden dieser Schar durch arithmetische Kennzeichen leicht möglich ist (vgl. H. Petersson, dies. Zbl. 34, 349), kann dies merkwürdigerweise auch bei $r = 1$ und $v^2 = 1$ durchgeführt werden. Verf. beweist: Ist $a(f; \zeta)$ das konstante Glied der Form f aus $\mathfrak{N}(\Gamma, -1, v)$ in der Entwicklung nach der zur Spitze ζ gehörenden Ortsuniformisierenden, dann gibt es zu jeder Spitze ζ_ν eines Fundamentalbereichs von Γ eine Form f_ν aus $\mathfrak{N}(\Gamma, -1, v)$ mit $\text{Im } a(f_\nu; \zeta_\mu) = \delta_{\nu\mu}$. Der Beweis dieses Satzes wird unter Heranziehung einer Klassifikation und Parameterdarstellung der isotropen Vektorgebilde der Dimension $2m$ geführt. Es ergibt sich dabei eine eindeutige Beziehung zwischen diesen isotropen Gebilden und den reellen orthogonalen schiefsymmetrischen $2m$ -reihigen Matrizen. Dieses Ergebnis wird auf die bei Partitionenproblemen auftretenden und vom Verf. an anderer Stelle (vgl. H. Petersson, dies. Zbl. 57, 68) untersuchten speziellen Kongruenzgruppen $\Gamma^0[l, q]$ von Primzahlstufe q angewendet, die mit l -ten Potenzresten mod q gebildet

werden. Für ein arithmetisch definiertes Multiplikatorsystem v_1 kann dabei der Rang von $\mathfrak{N}(I_0[l, q], -1, v_1)$ zu l bestimmt werden. Für diese Gruppen werden sodann Eisensteinreihen der Dimension -1 im klassischen Sinne erklärt, die \mathfrak{N} aufspannen. Es zeigt sich dabei, daß \mathfrak{N} als Ganzes bei einer Erweiterung $\Phi^0[l, q]$ von $I^0[l, q]$ vom Grade 2 noch in sich abgebildet wird. Eine Rangbestimmung von $\mathfrak{N}(\Phi^0[l, q], -1, v_1^\pm)$ schließt sich an, wobei v_1^\pm je ein durch v_1 auf $\Phi^0[l, q]$ induziertes Multiplikatorsystem bezeichnet. Dies ist von besonderem Interesse, da $\Phi^0[l, q]$ keine Kongruenzgruppen mehr sind. Wird für $l=1$ der Ring von $\mathfrak{C}^+(\Phi^0[1, q], -1, v_1^\pm)$ mit μ^\pm bezeichnet, dann zeigt Verf.

$$\mu^- - \mu^+ = \frac{1}{2}(h-1), \quad \mu^- + \mu^+ = \text{Rang } \mathfrak{C}^+(I^0[q], -1, v_1).$$

h bedeutet dabei die Klassenzahl in $\mathbf{P}(\sqrt{-q})$.

M. Koecher.

Rankin, R. A.: The construction of automorphic forms from the derivatives of a given form. J. Indian math. Soc., n. Ser. 20, 103—116 (1956).

Die Ableitung einer automorphen Form ist im allgemeinen keine automorphe Form mehr. Es gibt jedoch Polynome in automorphen Formen und ihren Ableitungen, die wieder automorphe Formen sind. Verf. bestimmt alle Polynome $P(f, f', \dots, f^{(n)})$ in einer Funktion $f(\tau)$ und ihren Ableitungen nach τ , die so beschaffen sind, daß sich bei Ersetzung von f durch eine beliebige (meromorphe) automorphe Form komplexer Dimension mit Multiplikatorsystem zu einer Grenzkreisgruppe eine automorphe Form zur gleichen Gruppe ergibt. Auf elementare Weise, vornehmlich durch Koeffizientenvergleich zwischen formalen Potenzreihen, zeigt der Verf., daß es sich dabei im wesentlichen um Polynome in gewissen Determinanten handelt, die mit Hilfe der Funktion f und ihren Ableitungen gebildet sind. Nimmt man speziell als Gruppe die Modulgruppe und für f die Diskriminante $\Delta(\tau)$, so erhält man die Darstellbarkeit der gewöhnlichen meromorphen Modulformen als rationale Funktionen von $\Delta, \Delta', \Delta'', \Delta'''$, sowie einige merkwürdige Differentialgleichungen in Δ und in den Eisensteinreihen $G_4, G_6, G_8, G_{10}, G_{12}, G_{14}$.

K.-B. Gundlach.

Myrberg, P. J.: Über automorphe Thetafunktionen. S.-Ber. Berliner math. Ges. 1954/55, 1955/56, 30—31 (1956).

Die automorphen Thetafunktionen zu einer Fuchsschen Gruppe werden definiert, ihre Gewinnung und Verwendung zur Darstellung der automorphen Funktionen wird skizziert.

G. Lochs.

Kovaňko, A. S.: Über eine Eigenschaft und eine neue Definition der verallgemeinerten fastperiodischen Funktionen von A. S. Besicovitch. Ukrain. mat. Žurn. 8, 273—288 (1956) [Russisch].

Die Charakterisierung der B_p -fastperiodischen Funktionen, die kürzlich von R. Doss (dies. Zbl. 55, 313) gegeben wurde, wird hier wieder aufgenommen. Die Identität der Klasse B_p mit einer von der Dosschen Klasse D_p formal ein wenig abweichend definierten Klasse A_p wird basiert auf Resultate früherer Arbeiten des Verf. [dies. Zbl. 1, 334 und J. Inst. math. Acad. Sci. Ukraine 1935/36_I, 75—96 (1935)], welche, wie er feststellt, Doss unbekannt gewesen sein müssen. — Für eine Menge E von reellen Zahlen sei $\bar{\delta}E = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E(-T, T)}{2T}$, wobei $E(-T, T)$ das Maß von $E \cap (-T, T)$ darstellt. Die Funktion $f(x)$ heißt B_p -gleichmäßig summierbar, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ existiert, derart daß

$$\bar{M}^E \{ |f(x)|^p \} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(E \cap (-T, T) \int |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \varepsilon,$$

falls $\bar{\delta}E < \eta$. Es werde $\varphi_n(x) \xrightarrow{B} f(x)$ geschrieben, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die Folge der Punktmengen $E_{n,\varepsilon}$ für die $|f(x) - \varphi_n(x)| > \varepsilon$ gilt, der Bedingung $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\delta}E_{n,\varepsilon} = 0$

genügt. Schließlich werde $\sigma_{n,a}[f(x)] = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x + ka)$ gesetzt. Sodann werden

für die Funktionen $f(x)$ der Klasse B_p die folgenden beiden Sätze bewiesen: I. Für jedes reelle a gibt es eine periodische Funktion $f^{(a)}(x)$ mit der Periode a , so daß $\sigma_{n,a} [f(x)] \xrightarrow{E} f^{(a)}(x)$; (Druckfehler im Text). — II. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ und eine relativ dichte Menge von ε -Verschiebungszahlen τ für $f(x)$ in dem Sinne, daß $|f(x+t) - f(x)| < \varepsilon$, wenn $\tau - \eta \leq t \leq \tau + \eta$, für alle x außer denen einer Menge E_t für die $\delta E_t < \varepsilon$. — Sodann wird unabhängig hiervon die Menge A_p der B_p -gleichmäßig summierbaren Funktionen $f(x)$ eingeführt, die die Eigenschaften I. und II. haben. Dann ist offenbar $B_p \subset A_p$. Genauere Untersuchung der Klasse A_p zeigt, daß auch $A_p \subset B_p$.
H. Schwerdtfeger.

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

Consiglio, Alfonso: Sulla canonicità di un sistema di equazioni differenziali di tipo normale. Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur. **90**, 153—160 (1956).

L'A. dà la condizione necessaria e sufficiente perchè assegnato il sistema

(*) $\dot{p}_h = \varphi_\delta(p_1, p_2, \dots, p_{2n}, t)$, ($h = 1, 2, \dots, 2n$; $\delta = h - (-1)^h$, $\dot{p} = dp/dt$) sotto opportune ipotesi per le φ , esista una funzione H tale che $\dot{p}_h = (-1)^h \partial H / \partial p_\sigma$ o come dicesi il sistema (*) sia di tipo canonico. Nel caso lineare

$$\varphi_h = \sum_{\sigma=1}^{2n} a_{\delta\sigma} p_\sigma(t), \quad (\sigma = h - (-1)^h)$$

l'A. ritrova la condizione necessaria e sufficiente stabilita da E. Olivieri [questo Zbl. **57**, 73].
G. Sansone.

Burton, L. P.: Conditions which preclude the existence of critical solutions of an ordinary differential system. Proc. Amer. math. Soc. **7**, 791—795 (1956).

Ricordata la definizione di soluzioni critiche di un sistema differenziale del tipo $y'_2 = f_2(x, y_1)$, $y'_3 = f_3(x, y_2)$, \dots , $y'_n = f_n(x, y_{n-1})$, $y'_1 = f_1(x, y_n)$, l'Autore indica, per l'assenza di tali soluzioni a destra di un certo punto iniziale, un criterio basato sull'ipotesi che delle f un numero dispari sia decrescente in senso stretto rispetto alla propria variabile y , le rimanenti essendo in senso stretto crescenti. L'Autore ne deduce, per le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = f(x, y)$ e a destra del punto iniziale, un teorema di unicità, il quale presenta molti punti di contatto con una osservazione dovuta a Tonelli [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VI. Ser. **1**, 272—277 (1925)].
G. Scorza Dragoni.

Wintner, Aurel: On the process of successive approximation in initial value problems. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **41**, 343—357 (1956).

Sia $f(z, w)$ olomorfa nel dominio $|z| < a$, $|w| < b$ e si consideri il sistema

$$(*) \quad dw/dz = f(z, w), \quad w(0) = 0.$$

È noto che la successione $\{w_n(z)\}$ costruita col classico metodo delle approssimazioni successive

$$w_0(z) \equiv 0, \quad w_{n+1}(z) = \int_0^z f(\zeta, w_n(\zeta)) d\zeta, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

converge uniformemente verso la soluzione $w(z)$ del sistema (*) se $|z| < \alpha$, essendo α un numero positivo, determinato col metodo delle funzioni maggioranti di Cauchy, non superiore ad a . L'A. collega la questione al campo reale con la seguente ingegnosa considerazione. Si consideri la funzione reale $M(r, s)$ definita per ogni coppia r, s , $0 \leq r < a$, $0 \leq s < b$ con la seguente legge

$$M(r, s) = \max_{|z| \leq r, |w| \leq s} |f(z, w)|$$

e sia $s = s(r)$ la soluzione del sistema $ds/dr = M(r, s)$, $s(0) = 0$, e risulti essa determinata per $0 \leq r < R$, essendo $R \leq a$. Fissato allora un numero ε , $0 < \varepsilon < R$ l'A. dimostra il seguente „criterio di subordinazione“: La successione $\{w_n(z)\}$ con-

system zweiter Art

$$(5) \quad a_i(x) y^{(m_{ii}+1)}(x) + \sum_{j=m+1}^n \int_a^x \mathfrak{R}_{ij}'(x, t) y_i^{(m_{jj}+1)}(t) dt = f_i^*(x) \quad (i = m+1, \dots, n),$$

in dem sich die Elemente $\mathfrak{R}_{ij}'(x, t)$ der Kernmatrix und die Funktionen $f_i^*(x)$ aus den Vorgaben des Systems (1) und den Funktionen $u_{j\lambda}^y(x)$ von (3) berechnen lassen. Die übrigen Lösungsfunktionen $y_j(x)$ ($j = 1, \dots, m$) ergeben sich dann aus den Vorgaben des Systems (1), den Funktionen $u_{j\lambda}^y(x)$ sowie den bereits berechneten Lösungsfunktionen $y_i(x)$ ($i = m+1, \dots, n$) mit Hilfe gewisser Differential- und Integraloperationen. Besonders einfach wird dieses Ergebnis bei Anwendung auf ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung. Wie am Beispiel des Differentialgleichungssystems erster Ordnung gezeigt wird, kann man das Integralgleichungssystem (5) auch durch ein solches ersetzen, das sich aus dem vorgelegten Differentialgleichungssystem durch gewisse Integrationen ergibt. Schließlich wird ein Satz von E. G. C. Poole über die Reduzierbarkeit eines Differentialgleichungssystems der Form (1) auf n einzelne Differentialgleichungen für je eine unbekannte Funktion neu bewiesen.

Hans Schubert.

Rojas Lagarde, Alfredo: Über die Irreduzibilität der Systeme linearer Differentialgleichungen, die aus den Maschengleichungen elektrischer Ströme hervorgehen. *Revista Un. mat. Argentina* **17**, 197—204 (1956) [Spanisch].

L'A. collegandosi ad un precedente lavoro di Eugenio Fubini Ghiron (questo *Zbl.* **18**, 362) dimostra che un sistema di equazioni differenziali lineari che deriva dalle equazioni della maglia di un circuito elettrico, può sempre presentarsi sotto forma irriducibile, ossia avente diverso da zero il determinante del sistema, circostanza questa che permette di risolvere il problema con i metodi operazionali.

G. Sansone.

Borůvka, O.: Sur la transformation des intégrales des équations différentielles linéaires ordinaires du second ordre. *Ann. Mat. pura appl.*, IV. Ser. **41**, 325—342 (1956).

Given a function $X(t)$ with a non-vanishing derivative X' , define $\{X, t\} = \frac{1}{2} X''' X'^{-1} - \frac{3}{4} X''^2 X'^{-2}$; similarly for functions of T , the derivatives being indicated by dots. Let q, Q be two continuous functions and consider equations (b): $-\{X, t\} + Q(X) X'^2 = q(t)$, (B): $-\{x, T\} + q(x) \dot{x}^2 = Q(T)$, (\bar{b}): $-\{X, t\} + q(X) X'^2 = q(t)$, (\bar{B}): $-\{x, T\} + Q(x) \dot{x}^2 = Q(T)$. The following results are typical: 1. If X is an integral of (b) its inverse function is an integral of (B); 2. If X, y, \bar{X}, \bar{y} are integrals of (b), (B), (\bar{b}), (\bar{B}), respectively, the composite functions $X\bar{X}, \bar{y}X, y\bar{y}, \bar{X}y, yX, Xy$ are solutions of (b), (b), (B), (B), (\bar{b}), (\bar{B}), respectively; 3. Let X be an integral of (b) and U an integral of (A): $Y'' = Q(T) Y$; then (13): $u = U(X) \cdot X'^{-1/2}$ is an integral of (a): $\ddot{y} = q(t) y$ and conversely (with certain restrictions which we do not reproduce explicitly) if u, U are integrals of (a), (A), there is an integral X of (b) such that (13) holds.

J. L. Massera.

Lax, P. D. and R. D. Richtmyer: Survey of the stability of linear finite difference equations. *Commun. pure appl. Math.* **9**, 267—293 (1956).

This paper consists of two parts. Part one is concerned with the numerical solution of initial value problems by finite difference methods. Let A denote a linear operator that transforms the element u , in a function Banach space B , into the element Au and (1) $du(t)/dt = Au(t)$, $0 \leq t \leq T$, (2) $u(0) = u_0$. The finite difference equations are $u^{n+1} = B(\Delta t, \Delta x, \Delta y, \dots) u^n$, where u^n is an approximation to $u(t^n)$ and B denotes a linear finite difference operator which depends on the space increments $\Delta x, \Delta y, \dots$. Let also $E(t) u_0$ be interpreted as a generalized solution of the initial value problem (1), (2), $\Delta x = g_1(\Delta t)$, $\Delta y = g_2(\Delta t), \dots$ and write $B(\Delta t, g_1(\Delta t), g_2(\Delta t), \dots) = C(\Delta t)$ so that $u^{n+1} = C(\Delta t) u^n$. Hence given a properly

posed initial value problem (1), (2) and a finite difference approximation $C(\Delta t)$ to it that satisfies the condition $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\| \left\{ \frac{C(\Delta t) - I}{\Delta t} - A \right\} u(t) \right\| = 0$ uniformly in t $0 \leq t \leq T$, then a necessary and sufficient condition that $C(\Delta t)$ be a convergent approximation is $\| \{C(\Delta_j(t))^{n_j} u_0 - E(t) u_0\| \rightarrow 0$ ($0 \leq t \leq T$) for any u_0 in B and for any sequences $\Delta_j t$, n_j such that $\Delta_j t \rightarrow 0$ and $n_j \Delta_j t \rightarrow t$. In the second part the author applies theorems to a special class of linear initial value problems — those of partial differential equations with constant coefficients and with auxiliary conditions allowing the use of Fourier series or integrals.

T. Eweida.

Verblunsky, S.: On a class of differential-difference equations. Proc. London math. Soc., III. Ser. 6, 355—365 (1956).

Consider the differential-difference equation $\sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^n k_{pq} f^{(p)}(t + h_q) = g(t)$ where $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_n$, the complex constants k_{pq} satisfy the conditions $\sum_{p=0}^m |k_{pq}|^2 > 0$, $q = 0, \dots, n$ and $\sum_{q=0}^n |k_{mq}|^2 > 0$, and $g(t)$ is continuous and

of bounded variation in every finite interval. Let $F(z) = \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^n k_{pq} z^p e^{zh_q}$ and let the zeros of $F(z)$ be all simple (as z_1, z_2, \dots with $|z_1| \leq |z_2| \leq \dots$). The author proves the following theorems: A) A solution $f(t)$ continuous and of bounded variation in every finite interval and with m continuous derivatives is represented (with specific exceptions) by a series $\sum_{j=1}^{\infty} u_j(t)$ uniformly convergent in every finite

interval where $u_j(t) = \sum_{v=n_j+1}^{n_{j+1}} c_v(t) e^{z_v t}$ and $c_v(t) = \frac{1}{F'(z_v)} \left[e^{z_v t} \int_0^t g(u) e^{-z_v u} du + \right.$

$\left. \sum \sum k_{pq} \left\{ z_v^p e^{z_v h_q} \int_0^{h_q} f(u) e^{-z_v u} du + \sum_{p=0}^{p-1} f^{(p)}(h_q) z_v^{p-1} \right\} \right]$. B) If there exists a constant $d > 0$ such that the set of distances between pairs of zeros of $F(z)$ is bounded

below d , the series $\sum_{v=1}^{\infty} c_v(t) e^{z_v t}$ converges uniformly in every finite interval. C) If $f(t)$ is continuous and of bounded variation, and has m derivatives which are of bounded variation in $(0, h_n)$, there exists a series representing $f(t)$ similar to that given in A) which converges boundedly to $f(t)$ in the open interval $(0, h_n)$.

T. Eweida.

Pinney, Edmund: Nonlinear differential equations systems. Ann. Math. Studies 36, 31—56 (1956).

Nach Anschreiben der Lösung des linearen inhomogenen Systems mit konstanten Koeffizienten

$$(1) \quad \frac{dy_i}{dt} = \sum_{\alpha=1}^m A_{i\alpha} y_{\alpha} + \mu_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

untersucht Verf. das folgende nichtlineare System

$$(2) \quad \frac{dy_i}{dt} = \sum_{\alpha=1}^m A_{i\alpha} y_{\alpha} + \varepsilon f_i(t, y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

in welchem ε einen Parameter bedeutet und die f_i solche Polynome vom Grade $\leq n$ in den y sind, deren Koeffizienten trigonometrische Ausdrücke in t sind. Auf Grund des Picardschen Existenzsatzes wird zunächst der Nachweis der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von (2) für $0 \leq t \leq T$ erbracht. Wird diese Lösung auf der rechten Seite von (2) in die $f_i(t, y_1, \dots, y_n)$ eingetragen, so entsteht ein System (1), dessen Lösung sich unmittelbar anschreiben läßt. Unter der Annahme, daß auf der rechten Seite von (2) die linearen Glieder dominieren, wird ein praktisch brauchbares Verfahren angegeben, um die Lösung von (2) angenähert zu berechnen.

Die Methode führt jedesmal zum Ziel, wenn gewisse angebbare Funktionen von t für $0 \leq t < \infty$ beschränkt sind. Da das Verfahren, wie es in der Natur der Aufgabe liegt, umfangreiche Rechenprozesse erfordert, wird am Ende der Arbeit eine Zusammenstellung der zu beachtenden Voraussetzungen und der einzelnen auszuführenden Schritte gegeben. In einem Anhang wird eine Identität gewisser charakteristischer Polynome des Systems (1) bewiesen sowie ein in der Arbeit benutzter Satz über die Verteilung der Nullstellen eines Polynoms.

W. Quade.

Gubař, N. A.: Die Charakteristik von zusammengesetzten singulären Punkten eines Systems von zwei Differentialgleichungen mit Hilfe grober singulärer Punkte benachbarter Systeme. Mat. Sbornik, n. Ser. **40** (82), 23—56 (1956) [Russisch].

Soit O un point singulier du système $dx/dt = P(x, y)$, $dy/dt = Q(x, y)$, $|P'_x| + |P'_y| + |Q'_x| + |Q'_y| \neq 0$, $\Delta = \begin{vmatrix} P'_x & P'_y \\ Q'_x & Q'_y \end{vmatrix}$, $\delta = P'_x + Q'_y$. Le point singulier est multiple si dans ce point $\Delta = 0$. Pour des petites modifications des fonctions $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ le système modifié aura dans le voisinage de O des points singuliers simples ($\Delta \neq 0$); on considère comme admissibles les modifications qui conduisent à des points singuliers grossiers. On étudie la liaison entre la structure topologique des trajectoires dans le voisinage du point singulier multiple et le caractère des points singuliers simples qui s'obtiennent après la modification des fonctions $P(x, y)$ et $Q(x, y)$. Un résultat typique est le suivant: Soit $\Delta = 0$, $\delta \neq 0$, n_1 le nombre des noeuds grossiers, n_2 le nombre des selles grossières du système modifié qui se trouvent dans le voisinage de O ; si $n_1 = n_2 + 1$ O est noeud, si $n_2 = n_1 + 1$ O est selle, si $n_1 = n_2$ O est noeud-selle.

A. Halanay.

Andronov, A. A. und E. A. Leontovič: Die Entstehung von Grenzzyklen aus einem nicht-groben Wirbel oder Strudel und von einem nicht-groben Grenzzyklus. Mat. Sbornik, n. Ser. **40** (82), 179—224 (1956) [Russisch].

Soit le système

(A) $dx/dt = P(x, y) = \nu x - \mu y + \varphi(x, y)$, $dy/dt = Q(x, y) = \mu x + \nu y + \psi(x, y)$
 $\varphi(0, 0) = \psi(0, 0) = \varphi'_x(0, 0) = \varphi'_y(0, 0) = \psi'_x(0, 0) = \psi'_y(0, 0) = 0$, $\mu \neq 0$. Si l'on pose $x = \varrho \cos \theta$, $y = \varrho \sin \theta$ on obtient l'équation $d\varrho/d\theta = F(\varrho, \theta)/[\mu + \Phi(\varrho, \theta)] = R(\varrho, \theta)$, $R(0, \theta) = 0$. Soit $\varrho = f(\theta; \varrho_0)$ la solution de cette équation qui pour $\theta = 0$ prend la valeur ϱ_0 et $\psi(\varrho_0) = f(2\pi; \varrho_0) - \varrho_0$. Le point singulier 0 du système sera dit un foyer multiple d'ordre k si $\psi'(0) = \dots = \psi^{(2k)}(0) = 0$, $\psi^{(2k+1)}(0) \neq 0$. Le système

(\tilde{A}) $dx/dt = \tilde{P}(x, y)$ $dy/dt = \tilde{Q}(x, y)$

sera dit δ -proche de (A) jusqu'au rang r dans G si l'on a dans G

$|\tilde{P}(x, y) - P(x, y)| < \delta$, $|\tilde{P}'_x(x, y) - P'_x(x, y)| < \delta, \dots |\tilde{P}^{(r)}_{x^i y^{r-i}}(x, y) - P^{(r)}_{x^i y^{r-i}}(x, y)| < \delta$

et les inégalités correspondantes pour les fonctions $\tilde{Q}(x, y)$ et $Q(x, y)$. On prouve que si le point singulier 0 de (A) est un foyer d'ordre k alors on peut trouver $\varepsilon_0 > 0$ et $\delta_0 > 0$ tels que pour tout système (\tilde{A}) δ_0 -proche de (A) jusqu'au rang $2k + 1$ dans le ε_0 -voisinage de 0 existent au plus k trajectoires fermées. Pour chaque $\varepsilon < \varepsilon_0$ et $\delta < \delta_0$ on peut trouver un système (\tilde{A}) δ -proche jusqu'au rang $2k + 1$ de (A) pour lequel dans le ε -voisinage de 0 existent k trajectoires fermées. Des résultats analogues sont établis pour le voisinage d'un centre et d'un cycle limite.

A. Halanay.

Barccio, Samuel: Singularities of analytical differential systems in the plane. Proc. nat. Acad. Sci. USA **42**, 765—766 (1956).

A system of differential equations

$\dot{x} = [x, y]_p = X_p + X_{p+1} + \dots$, $\dot{y} = [x, y]_q = Y_q + Y_{q+1} + \dots$

is dealt with, where $[x, y]_r$ designates a power series in x, y converging near the origin and beginning with terms of degree $\geq r$, and X_r, Y_r are forms of degree r . The origin is supposed to be an isolated singular point. It is assumed that $p = q$,

which may be obtained by a suitable linear transformation. The regular case, when $y X_p - x Y_p \neq 0$, is mainly considered. By an essentially geometric method a complete classification of the local „phase-portrait“ is accomplished by the author. General results are applied to the system

$$\dot{x} = a x + b y + [x, y]_2, \quad \dot{y} = c x + d y + [x, y]_2.$$

A complete exposition of the results which are only outlined without any proofs is announced to be published elsewhere. J. Szarski.

Barocio, Samuel: On certain critical points of a differential system in the plane. Ann. Math. Studies 36, 127—135 (1956).

A system of differential equations

$$(1) \quad \dot{x} = a x + b y + [x, y]_2^x, \quad \dot{y} = c x + d y + [x, y]_2^y$$

is considered where $[x, y]_2^x, [x, y]_2^y$ are power series convergent near the origin and beginning with terms of degree ≥ 2 . Under the assumption that both characteristic roots of the non null matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ are zero the local „phase-portrait“ of system (1) is investigated. By a suitable linear transformation together with a change of time variable system (1) is transformed into the following one

$$(2) \quad \dot{x} = y + C(x), \quad \dot{y} = -[y^2 - 2A(x)y + B(x)] \cdot E(x, y).$$

The method consists in comparison of the phase-portrait of system (2) with that of the Bendixson system orthogonal to (2) which has been fully discussed. Thus the following result is obtained: there may arise „modulo fans“ all the possible phase-portraits made up of zero, two or four hyperbolic sectors and in addition of one hyperbolic sector and a nested oval sector. J. Szarski.

Gol'dberg, A. A.: Über eindeutige Integrale von Differentialgleichungen erster Ordnung. Ukrain. mat. Žurn. 8, 254—261 (1956) [Russisch].

L'A. considère les équations différentielles ordinaires du premier ordre de la forme suivante:

$$P_0 w'^m + P_1 w'^{m-1} + \dots + P_i w'^{m-i} + \dots + P_m = 0,$$

$P_i = \sum_{k=0}^{k_i} a_{ik}(z) w^k$, $0 \leq i \leq m$. Il s'agit des solutions méromorphes qui sont étudiées par la méthode que K. Yosida avait appliqué à l'équation de Riccati et qui est fondée sur la théorie de distribution de R. Nevanlinna. Les résultats obtenus sont bornés par des restrictions particulières. On se demande, donc, si les résultats importants de L'A. ne pouvaient-ils pas être généralisés, en profitant d'autres méthodes d'investigation plus fécondes. N. Saltykow.

● **Erugin, N. P.:** Die Methode von Lappo-Danilevskij in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Leningrad: Verlag der Leningrader Universität 1956. 108 S. R. 3,50 [Russisch].

Un'equazione lineare omogenea del 1° ordine (') $dX/dt = X P(t)$, con t variabile reale, X matrice quadrata $n \times n$ incognita, $P(t) = B_0 + \sum_{k=1}^m B_k \cos kt + \sum_{k=1}^m A_k \sin kt$, A_k, B_k matrici quadrate $n \times n$ costanti, si muta mediante la sostituzione $z = \exp(it)$ in una equazione della forma (') $dX/dz = X \sum_{k=-m+1}^{m-1} T_k z^k$ dotata di un punto singolare irregolare in $z = 0$. Ogni soluzione fondamentale della (') è della forma $X(z) = z^W N(z)$ con W costante e con $N(z)$ serie di Laurent nell'intorno di $z = 0$. In tal modo nello studio delle equazioni a coefficienti periodici è possibile valersi dei metodi della teoria analitica delle equazioni lineari elaborati da Lappo-Danilevskij e da altri AA. Nella presente esposizione, redatta in forma di breve Monografia, l'applicazione di questi metodi viene fatta alla determinazione

del comportamento asintotico delle soluzioni dell'equazione (') nel caso $n = 2$ ed in particolare all'equazione di Mathieu $d^2y/dt^2 + (a - 2q \cos 2t)y = 0$, con a e q costanti, che corrisponde alla (') con $B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2q & 0 \end{pmatrix}$, $B_2 = B_3 = \dots = A_1 = A_2 = \dots = 0$.

R. Conti.

Turritin, Hugh L.: Rappresentazione mediante serie delle soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie lineari. Conferenze Sem. Mat. Univ. Bari 17, 16 p. (1956).

L'A. espone i principali risultati relativi alla rappresentazione mediante serie delle soluzioni della equazione ${}^th dX/dt = A(t)X$ dove $A(t)$ è una matrice quadrata di secondo ordine con i suoi elementi funzioni olomorfe di t nel cerchio $|t| < R_0$ ed h un intero positivo o nullo, rimandando il lettore per il caso generale in cui $A(t)$ sia una matrice quadrata ad una sua memoria del 1955 (questo Zbl. 64, 336). Richiamati i principali risultati per $h = 0$ ($x = 0$ punto regolare) e $h = 1$ ($x = 0$ punto singolare regolare), nel caso $h = 2$ l'A. osserva che il procedimento formale della rappresentazione di un sistema di integrali mediante serie, può condurre a serie divergenti. Si presenta allora il problema di considerare tali serie come sviluppi asintotici delle soluzioni, e l'A. ricorda che ciò può essere vero ove ci si limiti a certi settori così come egli ha dimostrato in alcuni casi particolari in una sua ricerca del 1950 (questo Zbl. 37, 65). L'A. segnala infine che il caso in cui gli elementi della matrice siano polinomi, già considerato in passato da G. D. Birkhoff e W. B. Ford (questo Zbl. 16, 124) deve essere ancora approfondito.

G. Sansone.

Šimanov (Shimanov), S. N.: On the problem of finding characteristic exponents of systems of linear differential equations with periodic coefficients. Doklady Akad. Nauk SSSR 109, 1102—1105 (1956) [Russisch].

Verf. hat in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 66, 72) Existenzbedingungen für periodische Lösungen der Matrizengleichung $\dot{z} = A z + f(t, z, \mu)$ bei einer in $t \bmod 2\pi$ periodischen Matrizenfunktion f für mehrfache Eigenwerte der konstanten Matrix A gegeben. Hier wird nun für $\dot{x} = (A + \mu F(t, \mu))x$ eine Darstellung dieser Lösung gegeben.

W. Haacke.

Pliss, V. A.: An investigation of a nonlinear differential equation of the third order. Doklady Akad. Nauk SSSR 111, 1178—1180 (1956) [Russisch].

L'A. énonce quelques théorèmes sur le comportement asymptotique des solutions de l'équation $d^3\xi/d^3t + f(d^2\xi/dt^2) + d\xi/dt + \xi = 0$ $f(0) = 0$, $\eta f(\eta) > \eta^2$ si $\eta \neq 0$. Voici quelques uns de ces théorèmes: toute trajectoire du système qui reste dans un des demi-plans $x > 0$ ou $x < 0$ (on considère le système $dx/dt = y - f(x)$, $dy/dt = z - x$, $dz/dt = -x$, équivalent à l'équation donnée), tend pour $t \rightarrow +\infty$ vers le point $x = y = z = 0$. ($x = d^2\xi/dt^2$, $z = -d\xi/dt$, $y = -\xi - d\xi/dt$); si le point initial se trouve dans le plan $x = 0$ la trajectoire correspondante revient pour $t > 0$ dans ce plan; si $df/dx > 1$ pour tous les x la solution $x = y = z = 0$ est asymptotiquement stable pour toutes perturbations initiales. On construit une fonction $f(x)$ pour laquelle le système admet une solution périodique. On ne donne pas les démonstrations.

A. Halanay.

Demidovič, B. P.: Über die beschränkten Lösungen eines gewissen nicht-linearen Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Mat. Sbornik, n. Ser. 40 (82), 73—94 (1956) [Russisch].

Es wird das Differentialgleichungssystem (1) $dx/dt = A x + \varphi(t, x, \mu)$ behandelt; darin bedeuten $x = (x_1, \dots, x_n)$ eine einspaltige Matrix, $A = ||a_{ik}||$ eine konstante Matrix, für welche die Realteile der charakteristischen Wurzeln verschieden von Null sind, μ einen kleinen Parameter und $\varphi(t, x, \mu)$ eine einspaltige Matrix, die stetig im Bereich $\Omega \{-\infty < t < +\infty, |x| < +\infty, |\mu| < \mu_0\}$ ist. Hier bedeutet $\mu_0 > 0$ und $|x|$ die Norm der Matrix x . Es wird ferner angenommen, daß: 1. $|\varphi(t, x, 0)|$ gleichmäßig beschränkt in jedem Gebiet $D_r \{-\infty < t < +\infty$

$|x| < r$ ($r > 0$) ist, worin $|\varphi(t, x, 0)| = o(|x|)$ für $x \rightarrow +\infty$ gleichmäßig in bezug auf t . 2. $\varphi(t, x, \mu)$ für $\mu = 0$ ist gleichmäßig stetig für μ im Gebiete D_r . 3. Für ein willkürliches Paar positiver Zahlen r und $\bar{\mu}$ ($\bar{\mu} < \mu_0$) gibt es eine positive Zahl $L(r, \bar{\mu})$ derart, daß bei $-\infty < t < +\infty$, $|x| \leq r$, $|x'| \leq r$, $\mu \leq \bar{\mu}$ die Bedingungen

$$|\varphi(t, x', \mu) - \varphi(t, x, \mu)| \leq L|x' - x|, \quad \lim_{\bar{\mu} \rightarrow \infty} L(r, \bar{\mu}) = 0$$

erfüllt sind. Auf Grund des topologischen Prinzips von T. Ważewski [Ann. Soc. Polon. math. **20**, 279—313 (1927)] wird bewiesen, daß für einen genügend kleinen Parameter μ wenigstens eine Lösung $\bar{x}(t, \mu)$ für (1) existiert, die gleichmäßig beschränkt in bezug auf μ im Gebiete D_r ist, wenn die Bedingungen 1. und 2. erfüllt sind. Wenn auch die Bedingung 3. erfüllt ist, dann ist die beschränkte Lösung die einzige, gleichzeitig stetig für t und μ im Gebiete $\{-\infty < t < +\infty, |\mu| < \mu^* (\mu^* > 0 \text{ und genügend klein})\}$ und gleichmäßig stetig für μ . Bei der Annahme, daß alle Realteile der charakteristischen Wurzeln negativ sind, ist nach Liapounoff die einzige Lösung gleichmäßig stabil in bezug auf den Parameter μ für $t \rightarrow \infty$. Das System (1) wird ferner behandelt, wenn die Matrix $\varphi(t, x, \mu)$ quasiperiodisch in bezug auf t ist, und es werden hinreichende Bedingungen für die Quasiperiodizität der beschränkten Lösungen von (1) festgestellt, woraus als Sonderfälle die Ergebnisse von G. I. Birjuk (dies. Zbl. **58**, 79) und von G. Stoker [Nichtlineare Schwingungen in mechanischen und elektrischen Systemen, Moskau 1952 (Russisch)] folgen. Zum Schluß wird gezeigt, daß die gewonnenen, interessanten Ergebnisse auf das allgemeinere System $dx/dt = P(t)x + \varphi(t, x, \mu)$ übertragen werden können, worin $P(t)$ eine periodische Matrix ist, derart daß das entsprechende, lineare System von Differentialgleichungen nur Lösungen hat, bei denen die Realteile der charakteristischen Exponenten von Null verschieden sind.

G. Bradistilov.

Taam, Choy-Tak: Asymptotic relations between systems of differential equations. Pacific J. Math. **6**, 373—388 (1956).

Consider the n -vector equation $y' = A(x)y + f(x, y)$ where f is everywhere lipschitzian for a function $g(x) \geq 0$ and $A(x), f(x, y)$ for fixed y , and $g(x)$ are of class $L(0, R)$ for every $R > 0$. Let $Y(x)$ be the base of solutions of $y' = A(x)y$ with $Y(0) = I$ and put $a(x) = \exp\left(-\operatorname{Re} \int_0^x \operatorname{trace} A(t) dt\right)$. The following asymptotic relations as $x \rightarrow \infty$ are proved: (i) If $\|Y(x)\| = O(h(x))$, h being measurable on $[0, \infty)$, and if both $\|f(x, 0)\| a(x) [h(x)]^{n-1}$ and $g(x) a(x) [h(x)]^n$ belong to $L(0, \infty)$, then $\|y(x)\| = O(h(x))$ and $y(x) = Y(x)(c + \varepsilon(x))$ with $\|\varepsilon(x)\| = o(1)$. (ii) If $\|Y(x)\| = O(h(x))$, h being nondecreasing on $[0, \infty)$, and if both $\|f(x, 0)\| a(x) [h(x)]^n$ and $g(x) a(x) [h(x)]^{n+1}$ belong to $L(0, \infty)$, then $y(x) = Y(x)c + \varepsilon(x)$ with $\|\varepsilon(x)\| = o(1)$. These results are extended to the complex domain by aid of Phragmén-Lindelöf theorems and applied to second order equations, for which asymptotic relations for the solutions alone, not involving first derivatives, are also obtained.

H. A. Antosiewicz.

Olech, C.: On the asymptotic behaviour of the solutions of a system of ordinary non-linear differential equations. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III **4**, 555—561 (1956).

In complex n -space E let $y' = A y$ where A has the distinct eigenvalues $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. According to some $\lambda_j = \mu$ decompose E into subspaces E_i , $i = 1, 2, 3$, made up resp. of solutions of the forms $\sum w_k(t) \exp \lambda_k t$ with $\operatorname{Re} \lambda_k < \operatorname{Re} \mu$, $w(t) \exp \mu t, \sum w_k(t) \exp \lambda_k t$ with $\operatorname{Re} \lambda_k \geq \operatorname{Re} \mu$, $\lambda_k \neq \mu$, where w_k, w are vectors whose components are polynomials in t . Let β be the least integer such that $\|y(t)\| = o(t^\beta \exp \operatorname{Re} \mu t)$ for every $y(t) \in E_2$. Choose subspaces E^1, \dots, E^β in E_2 such that every direct sum $E^1 + \dots + E^j$, $j = 1, \dots, \beta$, is the subspace of solutions $w(t) \exp \mu t$ where the components of w have degree $j-1$ at most. For $x \in E$ and $t \in L =$

$= [0, \infty)$ define $\chi_t(x) = \|x_1\| + \sum_1^{\beta} t^{i-\beta} \|x^i\| + \|x_3\|$ where $x_1 \in E_1$, $x^i \in E^i$, $x_3 \in E_3$. The author proves by use of Ważewski's theorem (this Zbl. 32, 350) the following asymptotic relation for solutions of $x' = A x + \varphi(t, x) + \psi(t, x) + F(t, x)$ where φ, ψ, F are continuous on $E \times L$: If (i) φ is on $E_1 \times L$ to E_1 and there is a positive continuous $\sigma(t)$ such that $\liminf \sigma(t) \geq \beta + 1$ and $\operatorname{Re}(x_1, A x_1 + \varphi) \leq (\operatorname{Re} \mu - \sigma(t)) \|x_1\|^2$, (ii) ψ is on $E_3 \times L$ to E_3 and there is a continuous $\varrho(t)$ such that $\int_a^b \varrho(t) dt > -c$ for $c > 0$, arbitrary $a, b > 0$, and $\operatorname{Re}(x_3, A x_3 + \psi) \geq (\operatorname{Re} \mu + \varrho(t)) \|x_3\|^2$; (iii) there is a continuous $g(t)$ with $\int_0^\infty g(t) dt < \infty$ such that $\chi_t(F(t, x)) \leq g(t) \chi_t(x)$ on $E \times L$; then corresponding to $y_0(t)$ through any ξ_0 belonging to E^i there is a family of solutions $x(t)$ such that $\chi_t(x(t) - y_0(t)) = o(t^{-\beta} \exp \operatorname{Re} \mu t)$. From this result follow generalizations of results of Z. Szymyd t (this Zbl. 64, 340) and of Hartman and Wintner (this Zbl. 66, 69).

H. A. Antosiewicz.

Mine (Mints), R. M.: On the character of the equilibrium state of three differential equations when one of the roots of the characteristic equation is zero. Doklady Akad. Nauk SSSR 111, 535—537 (1956) [Russisch].

On considère le système $dx/dt = a_1 x + b_1 y + P_2(x, y, z)$, $dy/dt = a_2 x + b_2 y + Q_2(x, y, z)$, $dz/dt = R_2(x, y, z)$, où P_2, Q_2, R_2 contiennent des termes de degré supérieur en x, y, z . On suppose que λ_1 et λ_2 sont les deux racines de l'équation caractéristique qui ne sont pas nulles; alors le système

$$a_1 x + b_1 y + P_2(x, y, z) = 0 \quad a_2 x + b_2 y + Q_2(x, y, z) = 0$$

a une solution $x = \varphi(z)$, $y = \psi(z)$. Soit $f(z) = R_2(\varphi(z), \psi(z), z) = \Delta_m z^m + \dots$. On énonce sans démonstrations les résultats suivants: soit $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$. 1. Si m est impair et $\Delta_m > 0$ il y a une seule trajectoire qui tend vers le point d'équilibre pour $t \rightarrow -\infty$ restant tangente au demi-axe $z > 0$. 2. Si m est impair et $\Delta_m < 0$ il y a une infinité de trajectoires qui tendent pour $t \rightarrow \infty$ vers le point d'équilibre restant tangentes au demi-axe $z < 0$. 3. Si m est pair et $\Delta_m < 0$ ($\Delta_m > 0$) il y a une infinité de trajectoires qui tendent pour $t \rightarrow \infty$ vers le point d'équilibre restant tangentes au demi-axe $z > 0$ ($z < 0$) et une seule trajectoire qui tend pour $t \rightarrow -\infty$ vers ce point restant tangente au demi-axe $z < 0$ ($z > 0$). Si λ_1 et λ_2 sont complexes conjugués alors selon la parité de m et le signe de Δ_m sont possibles les types suivants de points d'équilibre: selle-foyer, foyer, selle-foyer-foyer. On considère aussi la situation où λ_1 et λ_2 sont réels et $\lambda_1 \lambda_2 < 0$. Dans ce cas les deux situations possibles diffèrent par la parité de m .

A. Halanay.

Zubov, V. I.: A qualitative study of a system of ordinary differential equations. Doklady Akad. Nauk SSSR 109, 899—901 (1956) [Russisch].

Sia dato il sistema di tre equazioni differenziali ordinarie

$$dx/dt = f_1(x, y), \quad dy/dt = f_2(x, y), \quad dz/dt = f_3(x, y, z)$$

essendo le f_i funzioni reali e continue in tutto lo spazio (x, y, z) e tali da assicurare l'esistenza e l'unicità della soluzione passante per un qualunque punto $(0, x_0, y_0, z_0)$. L'A. presupponendo che la soluzione $x = y = z = 0$ sia asintoticamente stabile in piccolo dà delle condizioni (alquanto complicate per poterle riprodurre in dettaglio) sufficienti affinché la stessa soluzione sia asintoticamente stabile in grande.

R. Conti.

Zubov, V. I.: Einige Aufgaben über die Stabilität der Bewegung. Uspechi mat. Nauk 11, Nr. 6 (72), 250—252 (1956) [Russisch].

Mel'nikov (Melnikov), G. I.: Some problems concerning the Lapunov's direct method. Doklady Akad. Nauk SSSR 110, 326—329 (1956) [Russisch].

Mitteilung einiger Stabilitätskriterien ohne Beweise. Von den Differential-

gleichungen wird nur die Existenz der Lösung, nicht die Eindeutigkeit vorausgesetzt, und die Anforderungen an die Zeichenkonstanz der „Ljapunovschen Funktion“ sind schwächer als bei den üblichen Sätzen. *W. Hahn.*

Persidskij, S. K.: Zur zweiten Ljapunovschen Methode. *Izvestija Akad. Nauk Kazach. SSR, Ser. Mat. Mech.* **4** (8), 43—47 (1956) [Russisch].

Es sei die Vektordifferentialgleichung $\dot{x} = f(t, x)$ vorgelegt; die rechte Seite nach den Komponenten von x stetig differenzierbar. Notwendig und hinreichend für „vollständige Instabilität“ der Ruhelage ist die Existenz einer in einem gewissen x -Bereich positiven Funktion $v(t, x)$, die in dem Bereich gleichmäßig bez. x mit $t \rightarrow \infty$ gegen Null geht und dort eine nichtnegative Ableitung \dot{v} hat. Die Hinlänglichkeit ergibt sich nach der klassischen Ljapunovschen Schlußweise, die Notwendigkeit durch die recht einfache direkte Konstruktion einer passenden Funktion v . *W. Hahn.*

Krasovskij (Krasovsky), N. N.: On the theory of Lapunov's second method in studying the steadiness of motion. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **109**, 460—463 (1956) [Russisch].

Consider $\dot{x} = f(t, x)$ where x is an n -vector, f is of class C^1 with $(\partial f / \partial x)$ bounded on R : $\|x\| \leq \rho$, $t \geq 0$, and $f(t, 0) = 0$. Let $V(t, x)$ be a scalar function, of class C^1 , positive definite and satisfying $V'(t, x) \equiv \partial V / \partial t + \text{grad } V \cdot f \leq 0$ on R . The author states without proof: Theorem 1. A necessary and sufficient condition for $x = 0$ to be both uniformly stable and equi-asymptotically stable is the existence

of a V such that $V \rightarrow 0$ with $\|x\|$ uniformly in t and $\int_0^\infty \Phi(t, \varepsilon) dt = -\infty$ for every sufficiently small $\varepsilon > 0$ where $\Phi(t, \varepsilon) = \sup V'(t, x)$ on $\varepsilon \leq \|x\| \leq \delta_0$. Theorem 2. A necessary and sufficient condition for $x = 0$ to be asymptotically

stable is the existence of a V such that $\int_0^\infty \psi(t, \varepsilon) dt = -\infty$ for every sufficiently small $\varepsilon > 0$ where $\psi(t, \varepsilon)$ is a continuous function of t satisfying $\psi(t, \varepsilon) \geq \sup V'(t, x)$ on $\varepsilon \leq V$, $\|x\| \leq \delta_0$. A theorem on stability in the first approximation for equations with time delays and two theorems on stability in abstract spaces are also given. *H. A. Antosiewicz.*

Bedel'baev, A. K.: Über die Konstruktion der Ljapunovschen Funktion in Gestalt einer quadratischen Form. *Izvestija Akad. Nauk. Kazach. SSR, Ser. Mat. Mech.* **4** (8), 24—37 (1956) [Russisch].

Die im Titel genannte Aufgabe erfordert bei einem linearen Gleichungssystem mit konstanten Koeffizienten die Auflösung eines gewissen linearen Gleichungssystems (vgl. z. B. W. Hahn, dies. Zbl. **71**, 307). Verf. konstruiert die Ljapunovsche Funktion mit Hilfe eines Ansatzes von Malkin (dies. Zbl. **46**, 317) und führt die Berechnung auf andere lineare Gleichungen zurück. Ob die Rechenarbeit dabei, wie beabsichtigt, verringert wird, läßt das mitgeteilte Beispiel mit $n = 3$ zweifelhaft erscheinen. — § 2 gibt Abschätzungen für die Eigenwerte der quadratischen Form. *W. Hahn.*

Antosiewicz, H. A.: Stable systems of differential equations with integrable perturbation term. *J. London math. Soc.* **31**, 208—212 (1956).

Theorem 1: Let (1): $\dot{x} = p(x, t) + q(x, t)$, x, p, q being n -vectors, $p(0, t) = 0$; assume that functions $h(t) \geq 0$, $V(x, t)$ exist, $H = \int_0^\infty h dt < \infty$, $\|q(x, t)\| \leq h(t) \|x\|$ for $\|x\| \leq \xi$, $t \geq 0$, V quadratic form in x with continuously differentiable coefficients such that $A \|x\|^2 \leq V \leq B \|x\|^2$, $V_t + \text{grad } V \cdot p \leq -C \|x\|^2$ with A, B, C positive constants; then $x = 0$ is a uniformly asymptotically stable solution of (1). Theorem 2: Let (11): $\dot{x} = p(x, t) + q(x, t, z)$, z being a vector

parameter, $q(x, t, 0) = 0$; assume that h exists as before and that $\Phi(z) \geq 0$ is a continuous function of z , $\Phi(0) = 0$, such that $\|q(x, t, z)\| \leq \Phi(z) h(t)$ for $\|x\| \leq \xi$, $t \geq 0$, $\|z\| \leq Z$; then, if the solution $x = 0$ of $\dot{x} = p(x, t)$ is uniformly asymptotically stable, given $\varepsilon > 0$ there exist positive $\delta(\varepsilon, H)$, $\zeta(\varepsilon, H)$ such that $\|z\| \leq \zeta$, $\|x_0\| \leq \delta$ imply $\|x(t, x_0, t_0, z)\| \leq \varepsilon$ for $t \geq t_0 \geq 0$, $x(t, x_0, t_0, z)$ being the general solution of (11). The assertion (added in proof) that it is enough to assume in Theorem 2 that $x = 0$ is uniformly stable is incorrect.

J. L. Massera.

Zadiraka, K. V.: On a system of non-linear differential equations, containing a small parameter in certain derivatives. Doklady Akad. Nauk SSSR 109, 256—259 (1956) [Russisch].

The author proves that the solution of the system $\dot{x} = f(x, z, t, t/\mu)$, $\mu \dot{z} = F(x, z, t)$; $x(t_0) = x_0$, $z(t_0) = z_0$, where x is an n -vector, z an m -vector and μ a (scalar) parameter, tends under certain conditions to the solution of the degenerate system $\dot{u} = f_0(u, v, t)$; $v = \varphi(u, t)$; $u(t_0) = x_0$, where

$$f_0(x, z, t) = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \int_0^T f(x, z, t, s) ds$$

and $F(x, \varphi(x, t), t) \equiv 0$.

H. A. Antosiewicz.

Krasnosel'skij (Krasnoselsky), M. A.: On the use of non-linear functional analysis in certain problems involving periodical solutions of equations of non-linear mechanics. Doklady Akad. Nauk SSSR 111, 283—286 (1956) [Russisch].

Verf. fragt nach der Existenz periodischer Lösungen des Systems (1) $\ddot{x}_i + g_i(t, x, \dot{x}) = 0$, $g_i(t + 2\pi, x, y) = g_i(t, x, y)$ ($i = 1, \dots, n$). Dieses System wird in ein Integrodifferentialgleichungssystem und darauf durch eine Substitution in ein Integralgleichungssystem bei periodischer Randbedingung transformiert. Es sei (2) $\sum x_i g_i(t, x, y) \leq a \sum x_i^2 + b \sum |y_i|^{2-\gamma} + c$ bei $0 < \gamma < 2$ für gewisse Konstanten a, b, c erfüllt. — Satz 1. Gilt (2) bei $a < 0$, dann hat (1) mindestens eine periodische Lösung. Satz 2. Gilt $g_i(-t, -x, y) = -g_i(t, x, y)$ oder $g_i(t + \pi, -x, -y) = -g_i(t, x, y)$, dann ist für die Existenz mindestens einer periodischen Lösung (2) bei $a < 1$ hinreichend. — Ein weiterer Satz behandelt den Fall $n = 1$; hier werden zusätzlich Voraussetzungen über $\partial g / \partial x$ und $\partial g / \partial y$ gemacht. Weitere Sätze beziehen sich auf die charakteristischen Exponenten und die Periode. Beweise fehlen.

W. Haacke.

Straus, A. V.: Über die Entwicklung nach Eigenfunktionen einer Randwertaufgabe zweiter Ordnung auf der Halbachse. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 20, 783—792 (1956) [Russisch].

L'A. applique sa résolvante généralisée (ce Zbl. 55, 109, 65, 354) au problème suivant: $-(p y')' + q y - \lambda y = 0$, $y(0) = \vartheta(\lambda) p(x) y'(x)|_{x=0} = 0$. Il obtient pour les fonctions $f \in L^2(0, +\infty)$ une représentation de la forme $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x; \sigma) F(f, \sigma) d\rho(\sigma)$. Il obtient aussi une condition pour que la fonction propre $u(x; \sigma)$ appartienne à $L^2(0, \infty)$: il faut et il suffit que la fonction spectrale E_λ définie par $\vartheta(\lambda)$ soit discontinue au point σ .

G. Marinescu.

Kac, I. S.: Über die Existenz der Spektralfunktionen gewisser singulärer Differentialssysteme zweiter Ordnung. Doklady Akad. Nauk SSSR 106, 15—18 (1956) [Russisch].

On $a \leq x < b$ or $a < x < b$ let $M(x)$ be non-decreasing and finite, $Q(x)$ real and of bounded variation in every $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$. Define the differential operator

$$l[f] = -\frac{d}{dM} \left[f^-(x) - \int_0^{x-0} f(s) dQ(s) \right],$$

where f^- is the left-derivative of f , and let $u(x, \lambda)$ be the solution of $l[y] - \lambda y = 0$, $y(a) = m$, $y^-(a) = n$. The author discusses spectral functions $\tau(\lambda)$ associated with

the mapping $F(\lambda) = \int_a^b f(x) u(x, \lambda) dM(x)$ as in the work of M. G. Kreĭn [ibid. 87, 881—884 (1952)]; each $\tau(\lambda)$ is „generated“ by a self-adjoint extension of l . The first result asserts the existence of such a $\tau(\lambda)$, the conditions being more general than Kreĭn's, but still restricted to „regularity“ at $a > -\infty$. The author's two results deal with singular cases, with less general initial conditions, one case having $a = 0$, $Q = -(\nu^2 - \frac{1}{4})x^{-1} + Q_1$, $\nu > 0$, and

$$\int_0^k x |dQ_1(x)| < \infty, \quad \int_0^k x dM(x) < \infty, \quad (0 < k < b \leq \infty),$$

the other case having $a = -\infty$, $\int_{-\infty}^k |s| dM(s) < \infty$, $\int_{-\infty}^k |s| |dQ(s)| < \infty$, $(-\infty < k < b \leq \infty)$. There are no proofs. F. V. Atkinson.

Kac, I. S.: Über das Verhalten der Spektralfunktionen von Differentialsystemen zweiter Ordnung. Doklady Akad. Nauk SSSR 106, 183—186 (1945) [Russisch].

The author improves results of M. G. Kreĭn (loc. cit. sup. and this Zbl. 53, 246) on the rate of growth of $\tau(\lambda)$ (see preceding review). Taking $a = 0$, $m = 1$, $n = h$, the lower bound of α for which $\int_{-\infty}^{\infty} d\tau(\lambda)/(1 + |\lambda|^\alpha) < \infty$ is the same as the lower bound given by various conditions on $M(x)$, such as $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha M^{\alpha-1}(x) = 0$. Taking $m = 0$, $n = 1$, the latter has to be replaced by $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-2} M^{\alpha-1}(x) = 0$. Under further conditions, including the continuity of M in a right neighbourhood of $x = 0$, an asymptotic formula for $\tau(\lambda)$ is asserted, also for the case of a singularity at $x = 0$ considered in the previous paper. F. V. Atkinson.

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Oleĭnik, O. A.: Das Cauchysche Problem für nicht-lineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit unstetigen Anfangsbedingungen. Trudy Moskovsk. mat. Obšč. 5, 433—454 (1956) [Russisch].

In un precedente lavoro [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 95, 451—454 (1954)] l'A. ha considerato il problema (*) $\partial u / \partial t + \partial \varphi(t, x, u) / \partial x = 0$, $u(x, 0) = u_0(x)$, $-\infty \leq a \leq x \leq b \leq \infty$, $0 \leq t$, definendo una soluzione generalizzata per il caso che $u_0(x)$ sia una funzione priva di discontinuità di 2° specie e limitata. Nel presente lavoro viene studiato il caso più generale di una $u_0(x)$ misurabile e limitata e la definizione di soluzione viene generalizzata ulteriormente. Una tale soluzione viene costruita sotto ipotesi alquanto restrittive circa il comportamento delle linee caratteristiche, vale a dire delle soluzioni del sistema di equazioni differenziali ordinarie $dx/dt = \varphi'_u(t, x, u)$, $du/dt = -\varphi'_x(t, x, u)$. Della soluzione trovata l'A. prova l'unicità, studia la dipendenza dalla data $u_0(x)$ iniziale, studia in dettaglio le proprietà di continuità e di derivabilità e dimostra che essa è una soluzione „debole“ nel senso di P. Lax (questo Zbl. 55, 194). R. Conti.

Oleĭnik (Oleinik), O. A.: On the discontinuous solutions of non-linear differential equations. Doklady Akad. Nauk SSSR 109, 1098—1101 (1956) [Russisch].

Per il problema (*) considerato nella precedente recensione, con $u_0(x)$ misurabile e limitata l'A. dà una nuova definizione di soluzione generalizzata. Precisamente, se $-\infty = a$, $b = \infty$, l'A. chiama soluzione generalizzata del problema (*) nel semipiano $G: t \geq 0$, ogni $u(t, x)$, definita per $t \geq 0$, x reale, misurabile e limitata, tale che 1. sia

$$\int_G \left[u(t, x) \frac{\partial f}{\partial t} + \varphi(t, x, u) \frac{\partial f}{\partial x} \right] dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} f(0, x) u_0(x) dx = 0$$

per ogni $f(t, x)$ con derivate prime continue, nulla in una regione limitata G_1 di G ; 2. ad ogni tale regione G_1 si possa associare una funzione $K(t)$ monotona per $0 < t \leq t$ tale che per ogni coppia $(t, x_1) \in G_1$, $(t, x_2) \in G_1$, sia $[u(t, x_1) - u(t, x_2)]/(x_1 - x_2) \leq K(t)$. L'A. prova l'unicità di tale soluzione quando $\varphi(t, x, u)$ è definita per $t \geq 0$ e per x, u reali, dotata di derivate prime continue con φ'_u limitata per x reale, $t \geq 0$ ed u variabile in un intervallo limitato, e con $\varphi''_{uu} \geq 0$. L'A. mostra poi che nelle ipotesi poste nel lavoro recensito sopra la soluzione ivi definita coincide con quella attuale.

R. Conti.

Vvedenskaja (Vvedenskaya), N. D.: The difference method's solution of Cauchy's problem for a non-linear equation with discontinuous initial values. Doklady Akad. Nauk SSSR 111, 517—520 (1956) [Russisch].

L'A. mostra come la soluzione generalizzata definita nel lavoro recensito sopra (con qualche variante: $f(t, x)$ dotata di derivata seconde continue, $K(t)$ continua) si può costruire sotto ipotesi opportune sulla $\varphi(t, x, u)$ usando un procedimento delle differenze finite e stabilendo una relazione tra il problema (') ed il problema $\varepsilon \partial^2 u_\varepsilon / \partial x^2 = \partial u_\varepsilon / \partial t + \partial \varphi(t, x, u_\varepsilon) / \partial x$, $u_\varepsilon(0, x) = u_0(x)$ dove ε è un parametro reale infinitesimo.

R. Conti.

Plíš, A.: On the estimation of the existence domain for solutions of a non-linear partial differential equation of the first order. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 4, 125—129 (1956).

Von der partiellen Differentialgleichung

$$(1) \quad \partial z / \partial x = f(x, y_1, \dots, y_n, z, \partial z / \partial y_1, \dots, \partial z / \partial y_n)$$

kann mit Hilfe der Charakteristikenmethode diejenige Lösung $z = u(x, y_1, \dots, y_n)$ bestimmt werden, welche der Anfangsbedingung

$$(2) \quad u(a, y_1, \dots, y_n) = \omega(y_1, \dots, y_n)$$

genügt. Wird von der Funktion f vorausgesetzt, daß sie in einem $(2n + 2)$ -dimensionalen Gebiet von der Klasse C^p ($p \geq 2$) ist, von der Funktion ω , daß sie in einem n -dimensionalen Gebiet von der gleichen Klasse ist, so kann ein Intervall $a_1 < x < a_2$ angegeben werden, in welchem die Lösung $z = u(x, y_1, \dots, y_n)$ existiert. Zur Konstruktion der Lösung wird das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen benutzt, welches die Charakteristiken zweiter Ordnung von (1) beschreibt. Ist Δ das größte Intervall, in welchem die (geeigneten Anfangsbedingungen genügende) Lösung des erwähnten Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen existiert, dann wird für $p \geq 3$ gezeigt, daß eine gewisse Funktionaldeterminante in Δ von Null verschieden ist, woraus für dieses Intervall die Existenz der Lösung der eingangs formulierten Cauchyschen Anfangswertaufgabe folgt. Der Fall $p = 2$ kann auf den soeben erwähnten zurückgeführt werden. — Ein zweiter Satz bezieht sich auf Differentialgleichungen vom Typus (1), bei denen auf der rechten Seite die abhängige Veränderliche z nicht als Argument auftritt. Hier kann das Existenzgebiet schon unter geringeren Voraussetzungen (Lipschitzbedingung für f und ω) angegeben werden. Die mitgeteilten Sätze stellen ein grundlegendes Ergebnis der Theorie der partiellen Differentialgleichungen dar.

W. Quade.

Ważewski, T.: Sur la méthode de A. Plíš de déterminer le domaine d'existence de la solution du problème de Cauchy pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 4, 131—135 (1956).

Verf. bemerkt, daß der in der vorstehenden Note mitgeteilte Beweis des Plíšschen Satzes kein direkter ist. Er gibt einen direkten Beweis, wobei er einen schon von Cauchy angegebenen klassischen Kunstgriff benutzt und zur Konstruktion der Lösung nur das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung verwendet, welches die Charakteristiken zweiter Ordnung beschreibt. Auf diesem Wege gelingt es dem Verf., in eleganter Weise die Existenz der Lösung der Cauchyschen Anfangswertaufgabe nachzuweisen und dabei gleichzeitig ihr Existenzgebiet zu bestimmen.

W. Quade.

Bouligand, Georges: Types d'intégrales généralisées pour une classe d'équations aux dérivées partielles du premier ordre. C. r. Acad. Sci., Paris **242**, 2423—2426 (1956).

Die Lösungen $z = \varphi(x, y)$ der Differentialgleichung $p^2 + q^2 = 1$, für welche φ von der Klasse 2 ist, sind abwickelbare Flächen mit der Eigenschaft, daß das über einem Gebiet G der (x, y) -Ebene gelegene Flächenstück einer solchen Fläche einen $\sqrt{2}$ mal so großen Flächeninhalt wie das Gebiet selbst besitzt. Hierauf gründet sich ein Prinzip der verallgemeinerten Integration, welches eine umfangreichere Klasse von Funktionen als Lösungen zuläßt. Durch Benutzung einer geeigneten Metrik wird Verf. auf eine Klasse von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung geführt, für welche sich die Möglichkeit der Verallgemeinerung des Begriffs der Lösung ergibt. Als Metrik wird

$$ds = f(x, y, z, dx, dy, dz) \quad \text{mit} \quad f(x, y, z, t dx, t dy, t dz) = t ds \quad \text{für} \quad t > 0$$

genommen, und es werden Flächen $z = \varphi(x, y)$ gesucht, deren Flächeninhalt $\int g(x, y, z) d\sigma$ ist, wobei g eine gegebene stetige Funktion ist und $d\sigma$ die Projektion des Flächenelementes $g d\sigma$ auf die z -Ebene bedeutet. Als Bedingung ergibt sich eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, für welche sich zwei Arten von Integralen definieren lassen: intégrales contingents, intégrales aréolaires. Diese beiden Arten von allgemeineren Integralfächen entsprechen Funktionen, die einer Lipschitzbedingung genügen. Am Beispiel der Differentialgleichung $p^2 + q^2 = 1$ wird gezeigt, wie sich die beiden erwähnten Arten von verallgemeinerten Lösungen konstruieren lassen, und es werden die Eigenschaften dieser Lösungen untersucht.

W. Quade.

Pliš, A.: Generalisation of the Cauchy problem for a system of partial differential equations. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III **4**, 741—744 (1956).

Es wird die Eindeutigkeit und Existenz der Lösung $u^1(x, Y), \dots, u^m(x, Y)$, wo $Y = (y_1, \dots, y_n)$ ist, des Systems von partiellen Differentialgleichungen

$$u_x^i = f^i(x, Y, u^1, \dots, u^m, u_{y_1}^i, \dots, u_{y_n}^i), \quad i = 1, \dots, m,$$

nachgewiesen, welche den Cauchyschen Anfangsbedingungen

$$u^i(a_i, Y) = \omega^i(Y), \quad i = 1, \dots, m,$$

genügt, worin die a_i gegebene Konstanten sind. Bei dem Nachweis der Eindeutigkeit der als existierend angenommenen Lösung wird vorausgesetzt, daß die $f^i(x, Y, p_1, \dots, p_{m+n})$ einer Lipschitzbedingung in bezug auf die p genügen und die a_i hinreichend klein sind. Es sei $|a_i| \leq \beta$, $B = \sup L_j$, wo L_j die Lipschitzkonstante in bezug auf p_j ($j = 1, \dots, m$) ist. Ist dann $2mB\beta < 1$, dann gibt es höchstens eine Lösung. Bei dem Nachweis der Existenz werden über die Funktionen $f^i(x, r_1, \dots, r_{m+2n})$ die Voraussetzungen gemacht, daß sie in dem Gebiet $|x| \leq \alpha$ beschränkt und dort ebenso wie ihre ersten Ableitungen nach den r stetig sind, daß ferner die ersten Ableitungen nach den r einer Lipschitzbedingung genügen. Ähnliche Voraussetzungen werden für ein Gebiet E^n über die ω gemacht. Unter diesen Annahmen gibt es zu jedem System von Zahlen a_1, \dots, a_m mit $|a_i| \leq \beta$ für hinreichend kleines β genau eine Lösung. Der Beweis stützt sich auf die Methode der schrittweisen Näherungen und einen funktionalanalytischen Satz über die durch die Anfangswertaufgabe definierte Transformation $U = Z(U)$. Am Schluß eine Bemerkung über eine Verallgemeinerung der behandelten Cauchyschen Anfangswertaufgabe. W. Quade.

Weinberger, H. F.: A maximum property of Cauchy's problem. Ann. of Math., II. Ser. **64**, 505—513 (1956).

Consideriamo l'equazione alle derivate parziali di tipo iperbolico $(a u_x)_x - (b u_y)_y + (c u)_x + (d u) = 0$, con a, b, c, d funzioni di x, y dotate di derivate prime continue in una regione (aperta) R limitata da due caratteristiche AP, BP e da un arco AB che non interseca più d'una volta ciascuna caratteristica. Sia R orientata

in modo che su AB la normale esterna sia diretta secondo le y negative e sia $\partial u / \partial \nu = a u_x \partial x / \partial n - b u_y \partial y / \partial n$ la derivata conormale. L'A. prova il teorema: Se è $c \partial x / \partial n + d \partial y / \partial n \geq 0$ su AB , $c_x + d_y = 0$ in R , $b^{1/2} (\partial (a b)^{1/2} / \partial y + c) + (a^{1/2} (-\partial (a b)^{1/2} / \partial x + d) \geq 0$, $b^{1/2} (\partial (a b)^{1/2} / \partial y - c) + a^{1/2} (\partial (a b)^{1/2} / \partial x + d) \geq 0$ in R e se $\partial u / \partial \nu \leq 0$ su AB allora il massimo di u in R viene assunto su AB . Di questo teorema che estende precedenti risultati di P. Germain ed R. Bader (questo Zbl. 52, 97) e di S. Agmon, L. Nirenberg, M. H. Protter [Commun. pure appl. Math. 6, 455—470 (1953)] l'A. fa una applicazione alle equazioni differenziali ordinarie $(p \varphi)' + \lambda q \varphi = 0$ ottenendo un risultato che generalizza una proprietà dei polinomi ultrasferici trovata da S. Bochner [Proc. nat. Acad. Sci. USA 40, 1141—1147 (1954)].

R. Conti.

Prodi, Giovanni: Soluzioni periodiche di equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico non lineari. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 42, 25—49 (1956).

The problem solved in this paper is that of finding, for certain non linear partial differential equations of the hyperbolic type, periodic solutions. More precisely let Δ stand for the laplacian in R^n , G be a bounded domain of R^n and U the space $G \times T$ where T is the space of the reals modulo 2π . The author considers an equation of the form:

$$(1) \quad u_{tt} - \Delta u + g(x, t, u_t) = f(x, t, u)$$

defined in U ; $f(x, t, u)$, $x \in G$, $t \in T$, is continuous in u whatever be (x, t) and measurable with regard to x and t ; it is further periodic in t and of period 2π ; $g(x, t, p)$ satisfies two conditions: (1) $g(x, t, 0) = 0$,

$$(2) \quad 0 < m \leq [g(x, t, p') - g(x, t, p'')]/(p' - p'') \leq M < \infty.$$

It is required to find a solution of (1) differentiable in U and periodic in t , of period 2π . This problem is solved under the following conditions (in addition to those about the damping term g): First the differential operator defined by (1) is extended to one not requiring the existence of the second partial derivatives of u . Then $f(x, t, u)$ must satisfy a number of rather restrictive conditions in order to enable one to obtain a priori estimates for the solutions of (1). These conditions being of a very complicated nature will be omitted in this review. The method of the author is as follows: he first considers the auxiliary equation

$$(2) \quad E(u) = u_{tt} - \Delta u + M u_t = f(x, t), \quad M \text{ a constant.}$$

In the Hilbert space $L^2(U)$ he considers the subspace of the functions vanishing on the boundary of U and differentiable with respect to all their arguments in U . This subspace may be renormed so as to obtain a pre-Hilbert space. The new norm is

$$\|u\| = \int_U \left[\Delta_1 u + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] dx dt, \quad \Delta_1 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2;$$

completing this space yields a Hilbert space H_1 . A generalized solution of (2) is defined as an element $u \in H_1$ such that there exists a sequence $\{v_n\}$, $v_n \in H_1$, the v_n 's being twice differentiable, and subject to the conditions $v_n \rightarrow u$, $E(v_n) \rightarrow f(x, t)$, the first convergence being the strong convergence in H_1 and the second the strong convergence in $L^2(U)$. Such a generalized solution of (2) is constructed by defining an orthonormal basis in H_1 , by a method due to Courant and Hilbert, and expanding u in a series of eigenfunctions. It is not difficult to show that this solution is unique. Now considering an equation of the form

$$(3) \quad E(u) = u_{tt} - \Delta u + M u_t = f(x, t) + [M u_t - g(x, t, u_t)]$$

and making use of the operator S , inverse to E , such that $u = S(f)$ is the generalized solution of (2), (3) may be written equivalently in the form

$$(4) \quad u = S(f) + S(M u_t - g).$$

A solution of (4) is readily constructed by successive approximations and shown to be unique. Now to solve (1), under certain conditions imposed on $f(x, t, u)$, the author

defines an operator Z analogous to S which allows to write this equation in the equivalent form $u = Z[f(x, t, u)]$. Introducing a parameter ξ , $0 \leq \xi \leq 1$ and considering the mapping $u \rightarrow u - Z[\xi f(x, t, u)]$, it is possible to show, under the assumptions made about the data: (1) that $Z(\xi f)$ is completely continuous for every value of ξ and continuous in ξ , this continuity being uniform with respect to $u \in L^2(U)$; (2) that there exists a sphere in $L^2(U)$ whose boundary contains no solution of the equation $u - Z(\xi f) = 0$. It is then an easy task to apply the well known method of the topological degree of a mapping developed by Leray and Schauder (this Zbl. 9, 73). The topological degree of the mapping mentioned above is $+1$ for $\xi = 0$. It is still $+1$ for $0 \leq \xi \leq 1$. This yields an existence theorem. In an appendix the author constructs an example of generalized solution of (2) which actually is not twice differentiable everywhere in U . *C. Racine.*

Szmydt, Z.: Sur une généralisation des problèmes classiques concernant un système d'équations différentielles hyperboliques du second ordre à deux variables indépendantes. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 4, 579–584 (1956).

This note contains a few complements to a paper by the same author (this Zbl. 70, 92) concerning systems of n differential equations of the second order and of the hyperbolic type in two independent variables. Let, in the rectangle $-a \leq x \leq a < \infty$, $-b \leq y \leq b < \infty$, $2n$ curves, namely

$$(\Gamma_i) \quad y = \gamma_i(x), \quad (\Lambda_i) \quad x = \lambda_i(y), \quad i = 1, \dots, n,$$

be determined. The author defines problems of type T^* . They are those for which the solution u^1, u^2, \dots, u^n satisfies certain conditions on the given curves. For instance, the conditions: $u_x^i = g^{(i)}(x, u, u_y)$ on Γ_i , $u_y^i = h^{(i)}(y, u, u_x)$ on Λ_i , $i = 1, \dots, n$. Or, a second kind of problem of type T^* : the same condition on Γ_i and

$$u^i[\lambda_i(y), y] = u^i[\lambda(y_i^0), y_i^0] + \int_{y_i^0}^y h^{(i)}[t, u(\lambda_i(t), t), u_x(\lambda_i(t), t)] dt$$

on Λ_i , where the y_i^0 's are given points in $(-b, b)$. The solutions are shown to exist by forming a system of integral equations whose solutions are identical with the problem under consideration and applying Schauder's fixed point theorem.

C. Racine.

● **Faculté des Sciences de Paris, Séminaire Schwartz: Problèmes mixtes pour l'équation des ondes.** 3e année 1955/1956. Paris: Secrétariat Mathématique 1956. 7 no.

In diesen „exposés“ befaßt sich der Verf. mit folgendem: Im § 1 werden Ergebnisse der letzten Kapitel des Seminars von L. Schwartz vom Jahre 1954/55 (vgl. dies. Zbl. 65, 79) wiedergegeben über das Dirichletsche Problem und die Greensche Transformation G_1 , die bekanntlich definiert wird durch die folgende Identität: $\langle u, v \rangle = (G_1 u, \bar{v})_1$, $u \in D'$, $v \in D_1$, wobei $(u, v)_1 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_n} \left(u \bar{v} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} \right) dx$; D_1 ist die Abschließung von $C_0^\infty(\Omega_n)$ (der Menge der beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompakten Trägern) in der Norm $\|u\|_1^2 = (u, u)_1$. D'_1 ist der zu D_1 duale Raum (Distributionen erster Ordnung); \langle, \rangle bedeutet Dualität der Räume D_1 und D'_1 . Im § 5 wird ein Beweis des Rellichschen Auswahlatzes für beliebige beschränkte Ω_n gegeben, woraus im § 6 die Vollstetigkeit der Greenschen Transformation $G_1: D_1 \rightarrow D'_1$ folgt. Es wird das gemischte Problem für die Wellengleichung mit der Methode der Eigenfunktionen gelöst. Die Lösung wird betrachtet als Abbildung $u: [0, \infty[\rightarrow D'_k$ (D'_k ist der Hilbertsche Raum der Distributionen k -ter Ordnung). Im § 2 werden einige frühere Ergebnisse des Verf. über vektorielle Distributionen zusammengestellt. In §§ 3, 4, 5 wird die vom Verf. früher entwickelte Theorie der Laplacetransformationen der Distributionen (vgl. dies. Zbl. 47, 349) zur Lösung des Cauchy-Problems für die Gleichung $\square u = g$ (in verallgemeinertem

Sinne) herangezogen. Es wird der Einfluß der rechten Seite g auf die Regularität der Lösung u untersucht. [Bemerkung des Ref.: Der Verf. zitiert bloß seine eigenen Untersuchungen, obwohl von anderen Autoren — in gewisser Hinsicht — allgemeinere Resultate erzielt wurden]. K. Maurin.

Pogorzelski, W.: Étude de la solution fondamentale de l'équation parabolique. *Ricerche Mat.* 5, 25—57 (1956).

Pogorzelski, W.: Problème aux limites pour l'équation parabolique dont les coefficients dépendent de la fonction inconnue. *Ricerche Mat.* 5, 258—272 (1956).

Per l'equazione lineare alle derivate parziali di tipo parabolico

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^n a_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^n b_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + c u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

dove i coefficienti sono funzioni hölderiane delle x_1, x_2, \dots, x_n, t , con $\sum_{\alpha, \beta=1}^n a_{\alpha\beta} X_\alpha X_\beta$ forma quadratica definita positiva, viene determinata la soluzione fondamentale, attraverso uno studio preliminare dei quasi-potenziali e la risoluzione di una equazione integrale singolare di tipo Volterra. Mediante la soluzione fondamentale l'A. definisce poi i potenziali generalizzati, di cui studia le proprietà fondamentali. Supposto, in secondo luogo, che i coefficienti dell'equazione alle derivate parziali siano funzioni anche della u e che il secondo membro, anziché 0, sia del tipo $\lambda F(x_1, x_2, \dots, x_n, t, u)$, l'A. tratta, sotto opportune ipotesi di regolarità, il problema ai limiti consistente nella ricerca di una soluzione u definita per $0 \leq t \leq T$ e x_1, x_2, \dots, x_n contenuto in un dominio Ω , nulla per $t = 0$ e verificante sulla frontiera di Ω , per ogni t compreso fra 0 e T , una condizione del tipo $\partial u / \partial T = v G(x_1, x_2, \dots, x_n, t, u)$, dove $\partial u / \partial T$ indica una derivata trasversale. Il problema viene ricondotto a una equazione integrale, e l'esistenza della soluzione risulta dall'applicazione del teorema del punto fisso sulle trasformazioni continue degli spazi di Banach, che mutano un insieme chiuso convesso in un sottoinsieme compatto. G. Cimmino.

Venteel', T. D.: Über eine Anwendung der Differenzenmethode zur Lösung der ersten Randwertaufgabe für Gleichungen vom parabolischen Typus. *Mat. Sbornik*, n. Ser. 40 (82), 101—122 (1956) [Russisch].

Verf. geht auf Untersuchungen von M. Gevrey und E. Rothe zurück. Gevrey hat sich in mehreren Comptes rendus-Noten und anschließend in einer ausführlichen zusammenfassenden Darstellung [*J. Math. pur. appl.* 9, 305—471 (1913)] mit partiellen Differentialgleichungen vom parabolischen Typ befaßt, hierbei das Verhalten der partiellen ersten Ableitungen auf dem Rande des betrachteten Gebietes G untersucht und eine Reihe hinreichender Bedingungen dafür angegeben, daß eine Lösung der ersten Randwertaufgabe existiert, die im Innern und auf dem Rande von G und deren in der Gleichung vorkommende Ableitungen in jedem inneren Punkt von G stetig sind. Rothe [*Math. Ann.* 102, 650—670 (1930)] führte eine solche Randwertaufgabe auf eine Folge gewöhnlicher Randwertaufgaben zurück. Verf. beweist nun mit dem Differenzenverfahren die Existenz von Lösungen der ersten Randwertaufgabe für die Gleichungen

$$\partial^2 u / \partial x^2 = A(x, t) \partial u / \partial t + B(x, t) \partial u / \partial x + C(x, t) u + F(x, t)$$

$$\text{und} \quad \partial^2 u / \partial x^2 = A(x, t, u) \partial u / \partial t + B(x, t, u) \partial u / \partial x + F(x, t, u),$$

wobei die Ableitungen der Lösungen, die in den Gleichungen auftreten, auf dem Rande des betrachteten Gebietes stetig sind. Die Lösungen werden für ein Rechteck bei stetigen Randbedingungen $u(x, 0) = u_0(x)$, $u(0, t) = u_1(t)$, $u(X, t) = u_2(t)$ gesucht. Bei der ersten Gleichung existiert eine Lösung unter gewissen Voraussetzungen für die Koeffizienten, bei der zweiten Gleichung, wenn t genügend klein ist.

W. Schulz.

Tingley, Arnold J.: On a generalization of the Poisson formula for the solution of the heat flow equation. *Proc. Amer. math. Soc.* 7, 846—851 (1956).

This note extends to the boundary value problem

$$\Delta G - a \partial G / \partial t = \theta(t, \xi), \quad \lim_{t \rightarrow +0} G(t, \xi) = \sigma(\xi)$$

for almost all ξ , where $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2}$ and ξ stands for a vector of coordinates $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, results which have been proved by Cameron in the case of $n = 1$ (this Zbl. 55, 327). Introducing an n -fold Wiener integral, he finds it easy to obtain an existence theorem which, in the case of $n = 1$, holds under conditions which are weaker than Cameron's. However in the case of $n > 1$, it is still impossible to get any uniqueness theorem. The methods of proof are only summarily sketched.

C. Racine.

Boigelot, A. M. et H. G. Garnir: Sur les solutions de l'équation de la diffusion. Bull. Soc. roy. Sci. Liège 25, 50—61 (1956).

Les AA. définissent la solution faible de l'équation $(-\Delta + \partial/\partial t) u(x, t) = m(x, t)$, avec la valeur initiale $u_0(x)$ donnée. Les fonctions $u_0(x)$ et $m(x, t)$ étant continues, la solution faible devient une solution ordinaire, si elle admet les dérivées secondes continues et si l'on a $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = u_0(x)$. Inversement, une solution ordinaire est solution faible. Les AA. établissent une formule de représentation des solutions faibles. Sous les hypothèses convenables concernant les fonctions $u_0(x)$ et $m(x, t)$ les AA. en déduisent les théorèmes concernant la dérivabilité, le comportement initial et l'analyticité de la solution faible.

M. Krzyżański.

Ciliberto, Carlo: Sulle equazioni quasi-lineari di tipo parabolico in due variabili. Ricerche Mat. 5, 97—125 (1956).

In the paper reviewed this Zbl. 58, 86 the author proved the following: under certain conditions, a non linear parabolic equation defined in the rectangle $T (0 \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y)$ has a solution vanishing on the three sides $y = 0, x = 0$ and $x = X$ provided (1) the equation is obtained by setting $\alpha = 1$ in a more general equation depending on the parameter α ; (2) there exists a unique solution, with the same vanishing boundary values, to the general equation for $\alpha = 0$; (3) there are a priori estimates for the solutions of this general equation for $0 \leq \alpha \leq 1$, and a priori estimates also for their first derivatives in x ; (4) these eventual solutions as well as their first derivatives in x are equicontinuous with respect to α for the same values of this parameter. In the paper under review the author shows that under some assumptions of a rather general character the condition (4) may be deduced from the condition (3). His main argument is based on an estimate on the integral $(\partial p / \partial y)^2 + (\partial^2 p / \partial x^2)^2$ extended to the domain T . His upper bound depends, in general, on the integrals

$$\iint_T \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^4 dx dy \quad \text{and} \quad \int_0^Y [p_y^2(0, y) + p_y^2(X, y)] dy.$$

These last integrals are shown to be bounded by absolute constants under given conditions. These conditions are stated in the case of a quasi linear equation of the form

$$(1) \quad \partial^2 v / \partial x^2 + a(x, y, v, p, \alpha) \partial v / \partial y = f(x, y, v, p).$$

They are unfortunately too complicated to be even summarily mentioned in a review. Two particular cases of the equation (1) are specially considered namely the case when $\partial a / \partial v = 0$ and that when $\partial a / \partial p \neq 0$.

C. Racine

Ciliberto, Carlo: Nuovi contributi alla teoria dei problemi al contorno per le equazioni paraboliche non lineari in due variabili. Ricerche Mat. 5, 206—225 (1956).

In the paper reviewed above the author extends some of his results. He does no longer restrict himself to the quasi-linear types but studies two non linear equations. One is of the form

$$(1) \quad \partial^2 v / \partial x^2 = f(x, y, v, p, q)$$

and is to be considered as a particular case of an equation

$$(2) \quad \partial^2 v / \partial x^2 + (\alpha - 1) m \partial v / \partial y = \alpha f$$

for $\alpha = 1$. The other is of the form

$$(3) \quad \partial v / \partial y = g(x, y, v, p, r)$$

and is to be considered as a particular case of the equation

$$(4) \quad m(\alpha - 1) \partial^2 v / \partial x^2 + \partial v / \partial y = \alpha g$$

for $\alpha = 1$. Obviously (3) and (4) reduce to the classical linear type when $\alpha = 0$. The boundary values are the same as in the previous paper. The domain T is also the same. Making use of his results of 1954 and of an unpublished of E. Gagliardo, the author deduces the equicontinuity, with respect to α ($0 \leq \alpha \leq 1$), of v_y and of v_{xx} from their uniform boundedness. The method is essentially the same as in the other paper but the fact that (1) and (3) are not quasi-linear requires more elaborate a priori estimates. Two „integral“ estimates are now necessary, one relative to the integral of $(\partial q / \partial y)^2 + (\partial^2 q / \partial x^2)^2$, the other to the integral of $(\partial r / \partial y)^2 + (\partial^2 r / \partial x^2)^2$ extended to the same domain T as previously. Under certain conditions which again cannot be mentioned on account of their considerable degree of complication, these two integrals are shown to be bounded by absolute constants. The author observes that some of his conditions may be slightly relaxed. *C. Racine.*

Ladyženskaja, O. A.: Über die Lösung instationärer Operatorgleichungen. Mat. Sbornik, n. Ser. **39 (81)**, 491—524 (1956) [Russisch].

Über die Ergebnisse dieser Abhandlung wurde eingehend in dies. Zbl. **64**, 96 berichtet. *K. Maurin.*

Germain, Paul: An expression for Green's function for a particular Tricomi problem. Quart. appl. Math. **14**, 113—124 (1956).

Der Verf. setzt mit dieser Arbeit seine Untersuchungen (s. z. B. dies. Zbl. **55**, 85) über Existenz, Eindeutigkeit und Konstruktion der Lösungen des Tricomi-Problems fort. Da beim Tricomi-Problem der Wert der gesuchten Funktion bekanntlich [F. Tricomi, Mem. Accad. Lincei, Cl. Sci. fis. math. nat., V. Ser. **14**, 133—247 (1923)] nicht auf dem ganzen Rand des betrachteten Bereiches vorgeschrieben werden darf, impliziert die Definition der Greenschen Funktion entsprechende Modifikationen. Nachdem früher (dies. Zbl. **55**, 85) die Konstruktion der Greenschen Funktion für einen teils im hyperbolischen und teils im elliptischen Gebiet liegenden Streifen durchgeführt wurde, wird jetzt eine Transformation angegeben, die hieraus die Greensche Funktion des Tricomi-Problems liefert. *C. Heinz.*

• **Vekua, I. N.:** Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung vom elliptischen Typus und Randwertaufgaben mit einer Anwendung in der Theorie der Schalen. (Mathematische Forschungsberichte. Bd. 2.) Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1956. 107 S. Br. DM 10,40.

Vgl. die Besprechung des russ. Originals in diesem Zbl. **48**, 337.

Kliot-Dašinskij, M. I.: Eine Operatorenmethode zur Lösung der ersten Randwertaufgabe für elliptische Differentialgleichungen zweiter und vierter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Uspechi mat. Nauk **11**, Nr. 6 (72), 247—249 (1956) [Russisch].

Koševlev (Koshelev), A. I.: On the boundedness in L_p of the derivatives of solutions of elliptical equations and elliptical systems. Doklady Akad. Nauk SSSR **110**, 323—325 (1956) [Russisch].

Die vorstehende Abhandlung ist die Weiterführung von Untersuchungen des Verf. (dies. Zbl. **66**, 83). Es sei

$$(1) \quad L u \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{|\alpha| \leq 2m} a^\alpha(x) D^\alpha u = f \in L^{p,N}(\Omega_n),$$

(wobei $f = (f^1, \dots, f^N)$, $u = (u^1, \dots, u^N)$; a^α sind $N \times N$ -Matrizen mit stetigen Elementen in Ω_n), ein in Sinne von Petrowski elliptisches Gleichungssystem

$2m$ -ter Ordnung. D^α bedeuten Ableitungen im Sinne von Sobolev-Friedrichs. Es gelten folgende zwei Sätze: 1. Wenn u eine dem Raume $W_{p,N}^{(2m)}(\Omega_n)$ angehörende Lösung von (1) ist, dann gilt die folgende Ungleichung

$$\|u\|_{W_{p,N}^{(2m)}(\Omega')} \leq c_1 \|f\|_{L^{p,N}(\Omega_n^d)} + c_2 b^{-\beta(m,n,p)} \sup_{\Omega_{n-1}^d} \|u\|_{W_{1,N}^{(m-1)}(\Omega_{n-1}^d)},$$

wobei $p > 1$, c_i, β positiv sind. Ω_n ist ein beschränktes Gebiet des n -dimensionalen Raumes. $\Omega_n^d \subset \Omega_n$ und Ω_n^d ist nicht weniger als $d > 0$ vom Rande des Gebietes Ω_n entfernt. $\Omega' \subset \Omega_n^d$. Ω_{n-1}^d sind ebene $(n-1)$ -dimensionale Schnitte von Ω_n^d . 2. Wenn außerdem die Koeffizienten α^α hinreichend regulär sind, das System (1) stark elliptisch ist und die Lösung u von (1) der Ungleichung $|(L u, u)| > c_3 \|u\|_{2,N}^{(m)}(\Omega_n)$ genügt, dann gilt die folgende Ungleichung

$$\|u\|_{W_{2,N}^{(2m)}(\Omega')} \leq c_4 \|f\|_{L^{p,N}(\Omega_n)},$$

wobei $p > 1$ falls $m \leq 2n$, $p > 2n/(n+2m)$ falls $m > 2n$.

$$\left(\|u\|_{W_{p,N}^{(K)}(\Omega)} \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{i=1}^N \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{|\alpha| \leq K} (D^\alpha u)^2 \right)^{p/2} \right)^{1/p} < \infty \right)$$

[Bemerkung des Ref.: etwas schärfere Resultate wurden auf anderem Wege gleichzeitig von F. E. Browder (vgl. dies. Zbl. 70, 96) erzielt.] K. Maurin.

Pini, Bruno: Sul problema di Dirichlet per le equazioni a derivate parziali lineari ellittiche in due variabili. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 26, 177–200 (1956).

Sei D ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet der (x, y) -Ebene, berandet von einer Kurve C ($x = \bar{x}(s)$, $y = \bar{y}(s)$; $0 \leq s \leq l$, s = Bogenlänge). Ferner sei eine Gleichung

$$L[u] \equiv \sum_{0 \leq i+j \leq 2m} a_{ij}(x, y) \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} = f(x, y)$$

gegeben, wobei $\sum_{i+j=2m} a_{ij} \lambda^i = 0$ keine reellen Wurzeln besitze, sowie m Funktionen $f_0(s)$, $f_1(s), \dots, f_{m-1}(s)$. Verf. setzt voraus, daß das gewöhnliche Dirichletsche Problem (DP) ($L[u] = 0$ in D ; $\partial^k u / \partial \nu^k = f_k(s)$ auf C ; $k = 0, 1, \dots, m-1$, ν = innere Normale) stets höchstens eine Lösung besitze. [Für (I) und (II) wird zusätzlich angenommen, daß $m = 2$ ist und daß $\sum_{i+j=4} a_{ij} \lambda^i = 0$ zwei Doppelwurzeln hat.]

Resultate: (I) Aus $\bar{x}(s), \bar{y}(s) \in C^5$, $f_0(s) \in C^1$, $f_1(s) \in C^0$, $a_{ij} \in C^{i+j+1}$ in D , $f \in C^1$ in D , $f \in C^0$ auf $D + C$ folgt die Existenz einer Lösung $u \in C^1$ auf $D + C$ des gewöhnlichen DP. (II) Ähnlich wie in einer seiner früheren Arbeiten (dies. Zbl. 70, 327) definiert Verf. ein verallgemeinertes DP und zeigt, daß dieses genau eine Lösung besitzt. (III) Im Anschluß an Untersuchungen von F. E. Browder (dies. Zbl. 50, 97) wird bewiesen: Aus $f \equiv 0$, $a_{ij} \in C^{2m+i+j+4}$ in einem $D + C$ enthaltenden Gebiet, $\bar{x}(s), \bar{y}(s) \in C^{2m+2}$, $f_k(s) \in C^{m-k-1, \lambda}$ [womit Hölderstetigkeit bezüglich einer Konstanten λ ($0 < \lambda \leq 1$) bezeichnet werde], $k = 0, 1, \dots, m-1$, folgt die Existenz einer Lösung des gewöhnlichen DP. A. Huber.

Bergman, Stefan: Some methods for solutions of boundary-value problems of linear partial differential equations. Proc. Sympos. appl. Math. 6, 11–29 (1956).

Randwertprobleme bei elliptischen partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung in 2 unabhängigen Veränderlichen lassen sich mit Hilfe der Bergmanschen Kernfunktion und Bergmanscher Operatoren behandeln. Die vorliegende Arbeit bringt einen Überblick über die bei dieser Methode auftretenden grundsätzlichen Fragen und kann zugleich als eine Einführung in die von Bergman entwickelte Theorie angesehen werden. Unter Hinweis auf verschiedene neuere Arbeiten Bergmans werden hauptsächlich die folgenden Teilfragen erörtert: Benutzung der Methode der Kernfunktion im Zusammenhang mit der Schwarz-Christoffelschen Abbildungsformel, Anwendung auf Randwertprobleme bei kompressiblen Flüssigkeiten, Kon-

struzione von Mengen von Partikulärlösungen, aus denen sich für die Lösung von Randwertproblemen geeignete Linearkombinationen bilden lassen, Fortsetzungsprobleme bei Integraloperatoren, Verallgemeinerung der Integraloperatoren für partielle Differentialgleichungen in 3 unabhängigen Veränderlichen. *E. Kreyszig.*

Amerio, Luigi: Teoremi di esistenza per i problemi di Dirichlet e di Neumann per l'equazione $\Delta_2 u - k u = 0$. *Ricerche Mat.* 5, 58—96 (1956).

Sia τ un campo limitato del piano (x, y) , σ la sua frontiera, $A(M)$ e $B(M)$ due funzioni sommabili su σ , tali che per ogni punto Q esterno a τ risulti

$$(1) \quad \int_{\sigma} \left[A(M) \frac{\partial v(Q, M)}{\partial v_M} - B(M) v(Q, M) \right] d\sigma_M = 0,$$

dove $v(Q, M)$ è la soluzione fondamentale dell'equazione (2) $\Delta_2 u - k u = 0$ e v_M la normale (interna) a σ nel punto M . Considerata, per $P \in \tau$, la funzione

$$(3) \quad u(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \left[A(M) \frac{\partial v(P, M)}{\partial v_M} - B(M) v(P, M) \right] d\sigma_M,$$

essa risulta in τ soluzione di (2) e verifica le condizioni

$$(4) \quad \lim_{P \rightarrow M} u(P) = A(M), \quad (5) \quad \lim_{P \rightarrow M} \frac{\partial u(P)}{\partial v_M} = B(M)$$

per quasi tutti i punti M di σ , essendo inteso che, nei due passaggi al limite indicati, sia $P \in v_M$. Al variare della coppia di funzioni $A(M)$, $B(M)$ si ottiene una classe di soluzioni $u(P)$ della (2), che viene indicata come classe E . L'A. studia per la (2) i problemi di Dirichlet e di Neumann nella classe E ; nel problema di Dirichlet è data la $A(M)$ e si tratta di determinare la $B(M)$; nel problema di Neumann è data la $B(M)$ ed occorre trovare la $A(M)$. Supposto che σ sia una curva di classe 2 sono dimostrati i seguenti teoremi di esistenza: (I) Se k non è autovalore, condizione necessaria e sufficiente affinché il problema di Dirichlet abbia una (ed una sola) soluzione nella

classe E è che il potenziale di doppio strato $\int_{\sigma} A(M) \frac{\partial v(P, M)}{\partial v_M} d\sigma_M$ appartenga alla classe E ; se k è autovalore, per l'esistenza di soluzioni, si richiede in più che $A(M)$ sia ortogonale su σ alle derivate normali delle autosoluzioni; (II) Se k non è autovalore, il problema di Neumann ammette sempre una (ed una sola) soluzione; se k è autovalore, per l'esistenza di soluzioni si richiede che $B(M)$ sia ortogonale su σ alle autosoluzioni. Analoghi teoremi sono dati per i problemi esterni, posti nel campo τ' complementare di $\tau + \sigma$ e nella classe E' definita da formule analoghe alle (1), (3) con $Q \in \tau'$, $P \in \tau'$. Le dimostrazioni si fondano su uno studio approfondito di certe equazioni integrali su σ [nell'incognita $B(M)$ oppure $A(M)$] che derivano dalla (1) e su un notevole ampliamento delle condizioni di validità della formula di Green.

A. Ghizzetti.

Hong, Imsik: On positively infinite singularities of a solution of the equation $\Delta u + k^2 u = 0$. *Kodai math. Sem. Reports* 8, 9—12 (1956).

Verf. beweist für die Differentialgleichung (*) $\Delta u + k^2 u = 0$, bei der k eine positive Konstante bedeutet, den folgenden Satz, welcher ein Analogon zu einem Resultat von G. C. Evans (dies. Zbl. 14, 113) über harmonische Funktionen darstellt: Es sei F eine in einem beschränkten Gebiet D liegende abgeschlossene Menge, S ihr äußerer Rand und D' das Teilgebiet von D außerhalb S . Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine in D' reguläre Lösung von (*) existiert, welche bei Annäherung aus D' heraus an jeden Punkt von S positiv unendlich wird, ist, daß S die Kapazität Null habe. F und S sind dann identisch.

Johannes Nitsche.

Brousse, Pierre: Quelques propriétés de la solution d'un problème singulier à un paramètre. *C. r. Acad. Sci., Paris* 242, 2093—2094 (1956).

L'A. risolve un problema di Dirichlet singolare per l'equazione [1] $\Delta \Phi(x, y) - (\lambda/y^2) \Phi(x, y) = 0$, con $\lambda > \lambda_0 \geq -\frac{1}{4}$, considerata in un dominio D contiguo

all'asse x , limitato, connesso e situato nel semipiano $y \geq 0$. La parte I' della frontiera situata nel semipiano $y \geq 0$ ha dei punti A_i in comune con l'asse x , onde la parte di frontiera situata sull'asse è formata di segmenti avente per estremi i punti A_i . I valori al contorno sono dati esclusivamente su I' e possono avere un numero finito di punti S_j di discontinuità di 1^a specie. I teoremi di esistenza e di unicità richiedono opportune condizioni di comportamento nell'intorno della linea singolare $y = 0$, nei punti A_i e nei punti S_j . Si studia la soluzione ed in particolare la sua dipendenza dal parametro λ . Mancano le dimostrazioni. *A. Ghizzetti.*

Duff, G. F. D.: Modified boundary value problems for a quasi-linear elliptic equation. Canadian J. Math. 8, 203—219 (1956).

Showing on an example that the Dirichlet problem relative to a certain quasi linear elliptic partial differential equation may not have any solution, the author defines modified Dirichlet problems. These are suggested, in a few cases, by problems of theoretical Physics and cannot therefore be objected to as artificial. The first and, to a certain extent, the most typical of such modified problems is that of determining in a compact domain D , of boundary B , a function u satisfying an equation of the form:

$$\Delta u = -F(P, u), \quad P \in D.$$

Its maximum in $D + B$ must be a number M and its boundary values $t \cdot f(P)$, $P \in B$. Δ stands for the Beltrami operator of a Riemannian metric defined on D , F is a positive, increasing, function of u and f a function continuously differentiable on B . The parameter t , this is characteristic of that type of problems, cannot be chosen arbitrarily. A solution of such a problem is obtained as follows: let v be such that $\Delta v = 0$ in D , its boundary values on B being $f(P)$. One introduces the non linear functional operator

$$T_k[u]_P = \int_D G(P, Q) F[Q, k u(Q)] dQ + t_k[u] v(P),$$

where u belongs to a bounded domain Ω in the Banach space of continuous functions on $D + B$ with the usual norm, $G(P, Q)$ denotes the Green functions of D relative to Δ , dQ stands for the Riemannian element of volume and $t_k[u]$ is a functional determined by the condition that

$$\max_{P \in D+B} T_k[u] = M.$$

The author proves that: (1) $T_k[u]$ is jointly uniformly continuous in $k \in [0, 1]$ and $u \in \Omega$; (2) $T_k[u]$ is completely continuous and the equation $u = T_k[u]$, $k \in [0, 1]$, has no solution on the boundary of Ω ; (3) $U = u - T_0[u]$ is a homeomorphism of Ω . Under such conditions a well known result of Leray and Schauder (this Zbl. 9, 73) shows that the equation $u - T_1[u] = 0$ has a solution. It is not difficult to prove that it is also a solution of the modified Dirichlet problem under consideration. Another type of quasi linear equation studied by the author is the form

$$\Delta u = -t \cdot F(P, u);$$

u must have in $D + B$ a maximum M ; the boundary values are exhibited by a given function $f(P)$ continuously differentiable on B and satisfying the inequality $f(P) \leq M$. Then: $F(P, u) \geq \delta > 0$. An existence theorem is again obtained by application of the same theory but a new operator has to be introduced, namely

$$T'_k[u]_P = t'_k[u] \int_D G(P, Q) F[Q, k u(Q)] dQ + v(P);$$

G and v are the same functions as above; $t'_k[u]$ is a functional determined in such a manner that $\max_{P \in D+B} T'_k[u] = M$. A slightly different version of the same problem

is relative to an equation of the form $\Delta u = -F(P, t u)$ the other conditions

remaining the same, except that $F(P, 0) = 0$ and $F_u(P, u) \geq \delta > 0$. Lastly the author considers an equation of the form

$$\Delta u = -F(P, u) - t \varrho(P)$$

where $\varrho(P) \geq \varrho_0 > 0$, $F(P, u) \geq -F_0$, $F_u(P, u) \geq 0$, the other conditions being the same as in the second problem. The solution is once more obtained by the same argument, a suitable functional operator $T_k^3[u]$ being substituted for $T_k^1[u]$. In a last paragraph the author sets a modified Neumann problem relative to an equation of the form

$$\Delta u - \delta u = -F(P, u)$$

where $F(P, u) \geq -F_0$, $F_0(P, u) \geq 0$. The boundary condition is $du/dn = g_0(P) + t g_1(P)$, where g_0 and g_1 are continuously differentiable functions on B , t , a parameter whose value has to be determined in order that the maximum of u in $D + B$ be a given constant M . Calling into play the Neumann function (of the classical Neumann problem relative to Δ) it is shown that a new functional operator $\bar{T}_k[u]$ may be introduced so that a solution of the problem be a solution of the equation $u - \bar{T}_1[u] = 0$, the existence of such a solution following from a similar application of the Leray-Schauder theory.

C. Racine.

Plessis, N. du: Spherical Fejér-Riesz theorems. J. London math. Soc. **31**, 386—391 (1956).

In Verallgemeinerung einer Ungleichung von Fejér und Riesz [Math. Z. **11**, 305—314 (1921)] für den R^n beweist Verf.

$$\int_D (1 - \varrho)^{m-2} |f(P)|^r dV \leq A_{r,n} M_r^r(f),$$

wo $f(P)$ im Innern der Einheitshyperkugel E des R^{n+1} harmonisch ist. D ist der Durchschnitt einer $(n - m + 2)$ -dimensionalen diametralen Hyperebene mit E , ϱ der Radiusvektor des Integrationspunktes, $M_r^r(f) = \int_E |f(Q)|^r dS < \infty$, $r > 1$,

$2 \leq m \leq n + 1$. Für $r = 1$ gilt

$$\int_D (1 - \varrho)^{m-2} |f(P)| dV < A_n J + B_n, \quad \text{wo } J = \int_S |F(Q)| \lg^+ |F(Q)| dS < \infty.$$

$F(Q)$ ist die Funktion, welche aus $f(P)$ entsteht, wenn man den Raum einer Spiegelung an einer Kugel vom Radius 2 um den Punkt $(0, \dots, 0, -1)$ unterwirft.

G. L. Tautz.

Naïm, Linda: Sur l'allure à la frontière des fonctions harmoniques positives. C. r. Acad. Sci., Paris **243**, 1266—1268 (1956).

Soit Ω un espace de Green de frontière de Martin Δ et $h > 0$ une fonction harmonique fixée. L'A. considère le quotient d'une fonction harmonique u par h , en particulier le quotient de la solution d'un problème de Dirichlet généralisé par h . Ce quotient est comparé avec le quotient de la fonction de Green par h . Les résultats présentent une extension d'un résultat obtenu par M. Brelot pour un point frontière irrégulière d'un domaine euclidien et $h = 1$.

J. Gorski.

Brelot, M.: Nouvelle démonstration du théorème fondamental sur la convergence des potentiels. Ann. Inst. Fourier **6** (1955/56), 361—368 (1956).

Verf. gibt einen neuen, besonders einfachen Beweis des Satzes von H. Cartan [Bull. Soc. math. France **73**, 74—106 (1945)]: Die obere Hülle einer in einem Gebiete des R_n ($n \geq 2$) definierten Menge von gleichmäßig nach oben beschränkten, subharmonischen Funktionen ist quasisubharmonisch, d. h. stimmt bis auf höchstens eine Punktmenge der äußeren Kapazität null mit einer subharmonischen Funktion überein.

A. Huber.

Arsove, Maynard G.: Some criteria for normality of families of continuous functions. Commun. pure appl. Math. **9**, 299—305 (1956).

En vue d'applications aux fonctions sousharmoniques, l'A. fait d'abord quelques

remarques sur les familles normales de fonctions réelles ou complexes dans un domaine plan Ω (dans le sens que toute suite contient une sous-suite convergeant uniformément localement vers une fonction finie). On utilise pour cela la moyenne $\alpha_r w(z)$ de w dans un disque A_z^r de centre z et rayon r et, pour un compact $K \subset \Omega$, $\sup_{z \in K} |w(z) - \alpha_r w(z)|$

et sa borne supérieure $A_F^K(r)$ quand w décrit une famille F . Ainsi un critère de normalité de F est que pour tout K elle y soit bornée et que $A_F^K(r) \rightarrow 0$ ($r \rightarrow 0$). Puis l'A. fait des applications aux fonctions δ -sousharmoniques (différences de fonctions sousharmoniques) en résumant un article (ce Zbl. 70, 101). Si m est la mesure correspondant à une telle fonction w , soit $\Phi_w^z(t)$ la variation totale de m dans le disque A_z^t . On introduit pour K , $\psi_w^K(r) = \sup_{z \in K} \int_0^r \Phi_w^z(t) d \log t$, et sa

borne supérieure $\psi_F^K(r)$ pour les $w \in F$. Les conditions: $\psi_F^K(r) \rightarrow 0$ ($r \rightarrow 0$) et F bornée, quel que soit K , entraînent bien des propriétés, et d'abord la normalité de F . Examen particulier du cas où la mesure m dérive d'une densité. *M. Brelot.*

Epstein, Bernhard: Determination of coefficients of capacitance of regions bounded by collinear slits and of related regions. Quart. appl. Math. 14, 125—132 (1956).

Si considera il dominio (aperto) D ottenuto dal piano (x, y) togliendogli i punti dell'asse x appartenenti agli m tratti $s_m \equiv (-\infty, a_1)$, $s_1 \equiv (b_1, a_2)$, \dots , $s_{m-1} \equiv (b_{m-1}, a_m)$, $s_m \equiv (b_m, +\infty)$ (ove $a_1 < b_1 < \dots < a_m < b_m$ ed i due tratti estremi sono pensati come uno solo). Si vogliono calcolare i coefficienti di capacità

$$(1) \quad p_{jk} = - \oint_{C_k} \frac{\partial u_j}{\partial n} ds \quad (j, k = 1, \dots, m)$$

ove u_j è la funzione armonica in D che vale 1 sul tratto s_j e 0 sugli altri, C_k una curva chiusa circondante soltanto s_k , n la normale esterna. Basta calcolare i p_{jk} con $j < m$, $k < m$ e perciò le u_j da considerarsi sono nulle sul tratto infinito s_m . Servendosi di opportune trasformazioni della (1), l'A. ricava tre diverse formule che esprimono i coefficienti p_{jk} soltanto per mezzo della funzione $f_j(x) = u_j(x, 0)$, per la quale aveva già dato (questo Zbl. 33, 63) un metodo di calcolo approssimato. Una quarta espressione dei p_{jk} è data invece per mezzo della derivata $w_j'(z)$ della funzione analitica $w_j(z) = u_j + i v_j$, la cui espressione è nota. Se m non è molto grande quest'ultima formula è la migliore per il calcolo numerico. Dal problema considerato per il dominio D si può trarre la risoluzione di molti altri, per mezzo di trasformazioni conformi. L'A. sviluppa un esempio studiando il caso del cavo bipolare schermato, per il quale arriva a risultati numerici.

A. Ghizzetti.

Pfluger, Albert: Ein Approximationssatz für harmonische Funktionen auf Riemannschen Flächen. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I 216, 8 S. (1956).

H. Behnke und K. Stein (dies. Zbl. 38, 235) bewiesen 1948 folgenden grundlegenden Satz: Es sei R eine nicht-kompakte (zusammenhängende) Riemannsche Fläche, F ein relativ-kompakter Teilbereich von R , so daß $R - F$ keine kompakten, zusammenhängenden Komponenten enthält; dann ist im Innern von F jede in F holomorphe Funktion durch in R holomorphe Funktionen beliebig stark gleichmäßig approximierbar. Der Verf. der vorliegenden Arbeit zeigt nun, daß dieser Satz auch für harmonische Funktionen richtig ist. Sein Beweis schließt sich, obgleich er eine völlig andere Technik verlangt, dem Beweisgedanken von H. Behnke und K. Stein an (im Gegensatz zu Malgrange [C. r. Acad. Sci. Paris 240, 1958—1960 (1955)], der den Satz mit Hilfe schwierigerer Methoden für harmonische Funktionen auf beliebigen nicht-kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit analytischer Metrik herleitet). Weitere interessante Resultate der Arbeit sind: die Konstruktion von harmonischen Funktionen zu vorgegebenen Hauptteilen, ein Zerlegungs-

satz für Pfaffsche Formen vom Typ des bekannten Hodgeschen Zerlegungssatzes und eine Aussage über die Existenz von harmonischen Pfaffschen Formen zu vorgegebenen Perioden.

H. Grauert.

Tsuiji, Masatsugu: A simple proof of a theorem of Erdős and Gillis on the transfinite diameter. *Commentarii math. Univ. Sancti Pauli* **5**, 115—121 (1956).

Sei E eine beschränkte, abgeschlossene Menge in der z -Ebene. Wir bedecken E durch eine endliche Anzahl von offenen Kreisscheiben K_i ($i = 1, 2, \dots, n$), vom Durchmesser $d_i < \varrho$ und setzen $h(\varrho) = \inf_{i=1}^n \frac{1}{\log 1/d_i}$. $\lambda(E) = \lim_{\varrho \rightarrow 0} h(\varrho)$, $0 \leq \lambda(E) \leq \infty$, wird als das logarithmische Maß von E bezeichnet. Sei $\gamma(E)$ die logarithmische Kapazität von E . Wenn $\lambda(E) < \infty$, so ist $\gamma(E) = 0$. Für diesen Satz von P. Erdős und J. Gillis (*dies. Zbl.* **17**, 115) wird vom Verf. ein neuer, einfacher Beweis gegeben.

V. Paatero.

Szybiak, A.: Some properties of plane sets with positive transfinite diameter. *Ann. Polon. math.* **3**, 19—28 (1956).

In this note, the author proves that the Green's function, for a plane domain with positive transfinite diameter, obtained by Leja by his „extreme-points method“ (this *Zbl.* **10**, 201) is identical with that obtained by Frostmann by his „balayage method“ (Thèse, this *Zbl.* **13**, 63). The author constructs a minimizing sequence for the familiar energy integral. Then, by using Leja's „polynomial condition“ (this *Zbl.* **33**, 62), the present author obtains a result that contains Kellogg's classic lemma as a corollary.

M. O. Reade.

Górski, J.: Sur certaines propriétés de points extrémaux liés à un domaine plan. *Ann. Polon. math.* **3**, 32—36 (1956).

Let D be a plane domain including $z = \infty$ and bounded by n continua, $f(z)$ be a continuous real-valued function defined on the boundary $F = \sum_{i=1}^m F_i$ of D and $\lambda > 0$ be a real parameter. We consider a function

$$\omega_\lambda(z, \zeta) = |z - \zeta| \exp \{-\lambda [f(z) + f(\zeta)]\}$$

on $F \times F$ and define $n+1$ extremal points $\eta_\lambda^{(n)} = \{\eta_{0\lambda}^{(n)}, \eta_{1\lambda}^{(n)}, \dots, \eta_{n\lambda}^{(n)}\}$ by the property that $\prod_{0 \leq j < k \leq n} \omega_\lambda(\eta_{j\lambda}^{(n)}, \eta_{k\lambda}^{(n)}) \geq \prod_{0 \leq j < k \leq n} \omega_\lambda(\zeta_{j\lambda}^{(n)}, \zeta_{k\lambda}^{(n)})$ whenever $\zeta_{j\lambda}^{(n)} \in F$ ($j = 0, \dots, n$). Denoting by $F_{\lambda f}$ the set to which $\eta_{0\lambda}^{(1)}, \eta_{1\lambda}^{(1)}, \eta_{0\lambda}^{(2)}, \eta_{1\lambda}^{(2)}, \eta_{2\lambda}^{(2)}, \dots$ cluster, the author proves that, in the special case that $\lambda = 1$ and $f(z) = 0$ on F_1 and $= \text{const.} = c_i > 0$ on F_i ($i = 2, \dots, m$), if c_i ($i = 2, \dots, m$) are sufficiently small then $F_f = F$. He discusses also the general case.

M. Ohtsuka.

Leja, F.: Distributions libres et restreintes des points extrémaux dans les ensembles plans. *Ann. Polon. math.* **3**, 147—156 (1956).

Let E be a compact set in the plane, and let $\zeta^{(n)} \equiv (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ be an n -tuple of points of E , $n \geq 2$. Set $V(\zeta^{(n)}) \equiv \prod_{1 \leq j < k \leq n} |\zeta_j - \zeta_k|$, and let $V_n(E) \equiv \max_{\zeta^{(n)} \in E} V(\zeta^{(n)})$. If $(\eta^{(n)})$ is an n -tuple such that $V_n(E) = V(\eta^{(n)})$, then $(\eta^{(n)})$ is called a set of extremal points of E of rank n (corresponding to a free distribution on E). It is well-known that $\lim_{n \rightarrow \infty} [V(\eta^{(n)})]^{2/n(n-1)} \equiv d(E)$ exists; it is the transfinite diameter of E . Now let $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, for compact E, E_1, E_2 . The author defines $V_{2n} \equiv V_{2n}(E_1, E_2) \equiv \text{lub } V(\zeta^{(2n)})$, where the bound is taken over all $2n$ -tuples in E such that $\zeta_k \in E_1$, $1 \leq k \leq n$ and $\zeta_k \in E_2$, $n+1 \leq k \leq 2n$. A $2n$ -tuple $(X^{(2n)})$ such that $V_{2n} = V(X^{(2n)})$, with the first n points in E_1 and the remainder in E_2 , is called an extremal set for $E_1 \cup E_2$ corresponding to the restrained distribution in the ratio 1:1. Various properties of the latter points are obtained. We quote two of them. (I) $\lim_{n \rightarrow \infty} V_{2n}^{2/n(n-1)} \equiv v(E_1, E_2)$ exists and is called the re-

strained capacity of $E_1 \cup E_2$. (II) If either $d(E)_1$ or $d(E)_2$ is zero, then $v(E_1, E_2) = 0$. The author considers various generalizations of the restrained capacity, including the case where $E = \bigcup_1^m E_k$, $E_k \cap E_p = \emptyset$, $k \neq p$, where E is still compact, but the E_k are not.

M. O. Reade.

Variationsrechnung:

Tietze, Heinrich: Bemerkungen zu Carathéodorys Einführung in Eulers Arbeiten über Variationsrechnung. S. Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1955, 1—8 (1956).

Carathéodory bemerkt in der Einführung zur Neuausgabe (Euler, Op. omnia I, 24; 1952) der Eulerschen Methodus von 1744, bei Herleitung der grundlegenden Differentialgleichung der Variationsrechnung lasse sich die Zerlegung in unendlich viele unendlich kleine Stücke durch eine in endliche viele ersetzen (wie das — Zusatz des Ref. — auch von Jak. Bernoulli durchgeführt wurde). Verf. beseitigt eine bei Carathéodory auftretende Indexschwierigkeit und ersetzt die äquidistanten Abszissen der verwendeten Teilpunkte durch andere äquidistante in der Nähe dieser Abszissen.

J. E. Hoffmann.

Picone, Mauro: Su un elementare problema di estremo. Revista Un. mat. Argentina 17, 173—184 (1956).

È ben noto che la teoria classica del Calcolo delle Variazioni è arrivata a risultati veramente conclusivi solo nel caso dei problemi d'estremo regolari, mentre ben poco si conosce ancora sui problemi semiregolari. La presente nota è un primo contributo allo studio di un tipico problema semiregolare: la ricerca del minimo o dell'estremo

inferiore del funzionale $\varphi(Y) = \int_a^b Y'(x) \cdot F(x) Y'(x) dx$ nella classe I' dei vettori $Y(x)$ dotati di derivata prima continua a tratti nell'intervallo (a, b) , verificanti le condizioni ai limiti $Y(a) = A$, $Y(b) = B$, e nella ipotesi che la matrice $F(x)$ sia continua e semidefinita positiva in tutto (a, b) . I risultati ottenuti, pur non esaurendo l'argomento, danno però un'idea del tipo di fenomeni che si possono presentare, ed invitano ad uno studio sistematico del non facile problema. In concreto, l'A. determina il valore di $\inf \{\varphi(Y) : Y \in I'\}$ in tre casi [1. se in un intervallo interno ad (a, b) si ha $F(x) \equiv 0$; 2. se in un punto x_0 di (a, b) si ha

$$F(x_0) = 0 \text{ e } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_I (B - A) \cdot F(x) (B - A) dx = 0,$$

con $I = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap (a, b)$; 3. se $F(x)$ è nulla in un insieme di misura nulla e definita positiva altrove, riuscendo sommabile in (a, b) la funzione $|F| |F^{-1}|^2$, dimostrando l'esistenza del minimo nel primo di essi ed escludendola nel terzo. Dallo schema precedente esce invece quest'ultimo risultato; detta I^* la classe dei vettori $Y(x)$ assolutamente continui su (a, b) , per i quali il prodotto $|F| |Y'|^2$ risulta sommabile in (a, b) , il funzionale $\varphi(Y)$ ammette minimo in I^* nella ipotesi che $F(x)$ sia quasi ovunque definita positiva ed $|F| |F^{-1}|^2$ sia sommabile in (a, b) .

F. Bertolini.

Volpato, Mario: Sulle condizioni sufficienti per la continuità (di ordine n) di un funzionale di ordine $n + 1$. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 26, 1—9 (1956).

L'A. arreca un nuovo contributo al problema della continuità degli integrali del Calcolo delle variazioni dipendenti dalle derivate di ordine superiore (cfr. S. Cini, questo Zbl. 14, 317), stabilendo il seguente teorema: Sia $Q(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ una funzione definita nel campo $R: a \leq x \leq b, y_1^{(i)} \leq y^{(i)} \leq y_2^{(i)}, (i = 0, 1, \dots, n; y^{(0)} = y)$, limitata, misurabile rispetto a $y^{(n)}$ e continua in $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ per quasi tutti gli $y^{(n)}$, e si supponga che esistano $n + 1$ funzioni $L(u), L_0(u), L_1(u), \dots, L_{n-1}(u)$, non negative e integrabili (secondo Lebesgue) in $(y_1^{(n)}, y_2^{(n)})$,

in modo che per quasi tutti gli u di $(y_1^{(n)}, y_2^{(n)})$ sia verificata la disuguaglianza

$$|Q(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, u) - Q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}', \dots, \bar{y}^{(n-1)}, u)| \\ \leq L(u) |x - \bar{x}| + \sum_{i=0}^{n-1} L_i(u) |y^{(i)} - \bar{y}^{(i)}|$$

dove $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, u)$, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}', \dots, \bar{y}^{(n-1)}, u)$ appartengono a R . Sotto queste ipotesi l'integrale

$$I[y(x)] = \int_a^b Q(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) y^{(n+1)}(x) dx$$

è un funzionale continuo nella classe delle funzioni $y(x)$ aventi derivata di ordine n assolutamente continua in (a, b) e tali che $y_1^{(i)} \leq y^{(i)}(x) \leq y_2^{(i)}$, $(i = 0, 1, 2, \dots, n)$. La dimostrazione utilizza alcuni notevoli recenti risultati sulla formula di Green stabiliti dall'A. [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **20**, 30—37, 161—167, 299—306 (1956)].

S. Cingini.

Beckert, Herbert: Das Dirichletsche Problem des Systems der Jacobischen Gleichungen eines zweidimensionalen Variationsproblems für n gesuchte Funktionen im linearen und quasilinearen Fall. Math. Nachr. **15**, 7—29 (1956).

Das Verschwinden der ersten Variation beim Variationsproblem

$$\iint_{D+S} \sum_{i,k=1}^n [a_{ik} p_i p_k + 2b_{ik} p_i q_k + c_{ik} q_i q_k + e_{ik} u_i u_k + \chi_i u_i] dx dy = \text{Min},$$

($p_i = \partial u_i / \partial x$, $q_i = \partial u_i / \partial y$, $u_i(s) = 0$ längs S , a_{ik} , b_{ik} , c_{ik} , e_{ik} beschränkte, meßbare Funktionen von (x, y) , χ_i meßbar und über $D+S$ quadratisch integrierbar) führt mittels des Haarschen Lemmas auf das System

$$(1) \quad \frac{\partial v_j}{\partial y} = \sum_{k=1}^n a_{jk} \frac{\partial u_k}{\partial x} + b_{jk} \frac{\partial u_k}{\partial y} - \int \left(\frac{1}{2} \chi_j + e_{jk} u_k \right) dx, \quad -\frac{\partial v_j}{\partial x} = \sum_{k=1}^n b_{kj} \frac{\partial u_k}{\partial x} + c_{jk} \frac{\partial u_k}{\partial y}.$$

Sei $\int \left(\frac{1}{2} \chi_j + \sum_{k=1}^n c_{jk} u_k \right) dx = \psi_j$ gesetzt, und die willkürliche Funktion von y so bestimmt, daß $\psi_j(x(s), y(s)) = 0$ längs S_1 , wo S_1 entweder die linke oder rechte Hälfte des Randes S von D ist. v_i sind die beim Haarschen Lemma auftretenden Hilfsfunktionen. Der Existenzbeweis wird nach dem Vorbild von Schauder (dies. Zbl. 8, 255) durch Induktion über eine Problemschar, die von einem Parameter λ abhängt, geführt. Für $\lambda = 0$ hat man das Cauchy-Riemannsche System

$$(2) \quad \frac{\partial v_j}{\partial y} - \frac{\partial u_j}{\partial x} = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{2} \chi_j dx = -\bar{\psi}_j, \quad \frac{\partial v_j}{\partial x} + \frac{\partial u_j}{\partial y} = 0.$$

Um Eindeutigkeit zu bekommen, werden zur Randbedingung $u_i(s) = 0$ auf S noch gewisse Normierungsbedingungen $(3) \quad \iint_{D+S} v_j dx dy = c_j$ hinzugefügt. Die Lösbarkeit und Eindeutigkeit von (2) wurde von Morrey (dies. Zbl. 18, 405) gegeben. Für den weiteren Induktionsbeweis ist es wichtig, daß die Lösungen einer gewissen Funktionenklasse \mathfrak{M} angehören, die hier nicht näher angegeben werde. Dies wiederum beruht auf einer Abschätzung

$$(4) \quad \iint_{D+S} \frac{1}{r^\alpha} \left\{ \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_j}{\partial y} \right)^2 \right\} \leq R \iint_{D+S} \chi_j^2 dx dy;$$

r ist der Abstand eines beliebigen Punktes P aus D vom Integrationspunkt. R ist unabhängig von P , wo R nur von den gegebenen Größen abhängt. Die Ungleichung (4) wird nach dem Muster von Nirenberg (dies. Zbl. 50, 98) gewonnen. Sie liefert die Grundlage für die Normierung der Funktionenklasse \mathfrak{M} . Diese letztere erweist sich in mancher Hinsicht als zweckmäßiger als die Klasse der H -stetigen Funktionen. Für beliebiges λ' wird die Lösung unter Voraussetzung der Lösbarkeit für λ^2 für hinreichend kleines $|\lambda - \lambda'|$ durch sukzessive Approximation gewonnen und ihre

Zugehörigkeit zur Klasse \mathfrak{M} bewiesen. Dabei wird wesentlich die Kompaktheit von \mathfrak{M} benutzt. Das System (1) ist also unter den genannten Rand- und Normierungsbedingungen bei beschränkten meßbaren Koeffizienten stets und eindeutig lösbar. Weiterhin löst es das Variationsproblem. Schließlich wird noch die Lösung des quasilinearen Problems

$$\frac{\partial v_j}{\partial y} = \sum_{k=1}^n a_{jk} \frac{\partial u_k}{\partial x} + b_{jk} \frac{\partial u_k}{\partial y} + f_j, \quad -\frac{\partial v}{\partial x} = \sum_{k=1}^n b_{kj} \frac{\partial u_k}{\partial x} + c_{kj} \frac{\partial u_k}{\partial y} + f_j,$$

$u_j(s) = 0$ (sämtliche Koeffizienten gleichmäßig beschränkte Funktionen von x, y, u_j, v_j) unter Benutzung des Schauderschen Fixpunktsatzes bewiesen.

G. L. Tautz.

Young, L. C.: Some new methods in the two-dimensional variational problem with special reference to minimal surfaces. Commun. pure appl. Math. **9**, 625—632 (1956).

The present paper first summarizes results of the author [this Zbl. **65**, 337; Rivista Mat. Univ. Parma **5**, 255—268 (1954)], of W. H. Fleming [Proc. Amer. math. Soc. **7**, 1063—1074 (1957)], and of the two authors jointly (this Zbl. **58**, 46). As an additional result a necessary and sufficient condition is given in order that a generalized surface $L_0(f)$ with a given boundary (in the sense usual with the author) be a solution to the problem of the least area, namely, that there exists some field $p(x)$, with $|p(x)| \leq 1$, for which $L_0(f)$ is the center of gravity of elementary surfaces, according to the terminology of the author and the homology principle already proved in the second of the mentioned papers.

L. Cesari.

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

Hatcher, J. R.: A singular integral equation containing a parameter. Amer. math. Monthly **63**, Nr. 9, part 1, 651—652 (1956).

This note concerns the inversion of the singular equation

$$(1) \quad \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\cos \lambda(t - t_0)}{t - t_0} g(t) dt = f(t_0), \quad t_0 \in L,$$

where L (consisting of a finite number of smooth non-intersecting contours of finite length L_0, L_1, \dots, L_n with L_0 containing all the rest) is the boundary of a plane connected region, the functions $f(t)$ and $g(t)$ are subject in the Hölder condition on L , and λ is a parameter.

Gachov, F. D. und Ju. I. Čerskij: Singuläre Integralgleichungen vom Faltungstypus. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **20**, 33—52 (1956) [Russisch].

Untersucht werden die beiden folgenden Typen von Integralgleichungen:

$$(A) \quad f(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty k_1(x-t) f(t) dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 k_2(x-t) f(t) dt = g(x) \quad (-\infty < x < \infty)$$

und

$$(B) \quad f(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty k_1(x-t) f(t) dt = g(x), \quad 0 < x < \infty,$$

$$f(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty k_2(x-t) f(t) dt = g(x), \quad -\infty < x < 0.$$

Dabei gelte für $j = 1, 2$ $k_j(x) e^{-yx} \in L(-\infty, \infty)$ wenn $a_j \leq y \leq b_j$ ist. Die Fouriertransformierte $K_j(z)$ von k_j ist sodann im Streifen $a_j < \operatorname{Im} z < b_j$ holomorph. Die Lösungen werden unter den folgenden Funktionen gesucht: Wir zerlegen $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$, wobei $f_+(x) = 0$ für $x < 0$ und $f_-(x) = 0$ für $x > 0$. Nun gelte: $f_+(x) e^{-yx} \in L^2(-\infty, \infty)$ bei $y \geq \beta$ und $f_-(x) e^{-yx} \in L^2(-\infty, \infty)$ für $y \leq \alpha$. Die Fouriertransformierten F^+, F^- von f_+ bzw. f_- haben dann Halbebenen der Holomorphie. Nach einer vorbereitenden Umformung führt die Fouriertransformation

der Integralgleichungen (A), (B) auf ein Randwertproblem für stückweise holomorphe Funktionen vom Typus

$$\Phi^+(\zeta) = A(\zeta) \Phi^-(\zeta) + B(\zeta)$$

auf einem Rand, der aus zwei zur reellen Achse parallelen Geraden besteht. Im Falle der Aufgabe (A) ist die gegenseitige Lage der Holomorphiehalbebenen von $F^+(z)$ und $F^-(z)$ wichtig. Zwei Fälle werden unterschieden. (I) Diese Halbebenen haben keinen gemeinsamen Punkt ($b_1 > a_2$). (II). Die Halbebenen haben einen gemeinsamen Streifen ($b_1 < a_2$). Für die Lösung der Aufgabe (B) ist die gegenseitige Lage der Holomorphiestreifen von $K_1(z)$ und von $K_2(z)$ entscheidend. Es gibt jetzt 3 Fälle: (I) Die Streifen haben keinen gemeinsamen Teil, und der Streifen für K_1 liegt unter dem Streifen für K_2 ($b_1 < a_2$). (II) Die Streifen haben einen gemeinsamen Teil ($\text{Min } [b_1, b_2] > \text{Max } [a_1, a_2]$). (III) Die Streifen haben keinen gemeinsamen Teil und der Streifen von K_1 liegt über dem Streifen von K_2 ($a_1 > b_2$). Die Fälle (I) führen auf ein gewöhnliches Riemannsches Randwertproblem, das nach der üblichen Methode vollständig gelöst werden kann. Der Fall (II) in Aufgabe (B) gestattet die Zurückführung auf zwei derartige Aufgaben und ist deswegen auch allgemein lösbar. Fall (II) in Aufgabe (A) und Fall (III) in Aufgabe (B) ergeben ein verwickelteres Randwertproblem, bei dem sich die Holomorphiestreifen der gesuchten Funktionen teilweise überdecken. Den Verff. gelingt jetzt die Lösung nur in dem Fall, daß $K_1(z)$ und $K_2(z)$ meromorphe Fortsetzungen in den Überlappungsstreifen erlauben.

W. Thimm.

Calderón, A. P. and A. Zygmund: On singular integrals. Amer. J. Math. 78, 289—309 (1956).

Les AA. retrouvent et complètent par une méthode plus simple des résultats antérieurs (ce Zbl. 47, 102) concernant l'intégrale $\tilde{f}_\varepsilon(x) = \int_{|x-y|>\varepsilon} K(x, y) f(y) dy$ où x et y sont des vecteurs de R^n , $|x|$ la norme de x , dy l'élément de volume de R^n . Sous l'une des séries suivantes d'hypothèses, les AA. établissent que si $f \in L^p$ ($1 < p < \infty$) (le cas $p = 1$ semble échapper aux méthodes utilisées: théorie des transformées de Hilbert des fonctions d'une variable), \tilde{f}_ε a une limite dans L^p et une limite simple presque partout lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$: I. $K(x, y) = N(x - y)$, où N est positivement homogène (p. h.) de degré $-n$, est intégrable sur la sphère $|x| = 1$ et y a une intégrale nulle, $N(x) + N(-x)$ appartient à $L \log^+ L$ sur $|x| = 1$. Dans ce cas, en outre $f(x) = \sup \|\tilde{f}_\varepsilon(x)\| \in L^p$ et $\|f\|_p \leq A \|f\|_p$ où A est une constante dépendant de p et K . II. $\tilde{K}(x, y) = N(x, x - y)$ où N est p. h. de degré $-n$ en y , est intégrable sur $|y| = 1$ avec une intégrale nulle, pour tout x , pour un $q > 1$ $|N(x, y)|^q$ est intégrable sur $|y| = 1$ pour tout x et l'intégrale en est bornée; enfin $q/(q-1) \leq p < \infty$. III. $K(x, y) = N(x, x - y) \psi(|x - y|)$ où ψ est une transformée de Fourier-Stieltjes, N est p. h. de degré $-n$ en y , $|N(x, y)| \leq F(y)$ où F est p. h. de degré $-n$ et intégrable sur $|y| = 1$, ψ est paire et N impaire en y ou bien ψ est impaire et N paire en y . IV. Mêmes conditions que III, la majoration de N étant remplacée par: pour un $q > 1$ et tout x , $|N(x, y)|^q$ est intégrable sur $|y| = 1$ et l'intégrale est bornée, $q/(q-1) \leq p < \infty$. On a aussi: Si $K_\varepsilon(x, y) = \varepsilon^{-n} N(x - y) \cdot \psi(\varepsilon^{-1} |x - y|)$, où ψ est une fonction non-croissante telle que $\psi(|x|)$ soit intégrable dans R^n et où N est une fonction non-négative homogène de degré zéro, intégrable sur $|x| = 1$, la fonction $f^*(x) = \sup \left| \int K_\varepsilon(x, y) f(y) dy \right|$ appartient à L^p en même temps que f ($1 \leq p < \infty$) et $\|f^*\|_p \leq A \|f\|_p$ où A est une constante dépendant de N, p, ψ . Même conclusion si $N(x - y)$ est remplacée par $N(x, x - y)$ où $N(x, y)$ est homogène de degré zéro en y , et où pour un $q > 1$, $|N(x, y)|^p$ est intégrable et d'intégrale bornée sur $|y| = 1$ et si $q/(q-1) \leq p < \infty$. Enfin: si n est

impair, et $1 < p \leq 2$, les moyennes sphériques d'ordre $\frac{1}{2}(n-1)$ de la représentation intégrale de Fourier de f convergent vers f dans L^p . La question est ouverte pour n pair. A. Revuz.

Calderón, A. P. and A. Zygmund: Algebras of certain singular operators. Amer. J. Math. 78, 310—320 (1956).

Mêmes notations que dans le compte-rendu précédent. $K(x)$ est p. h. de degré $-n$, $\int_{\Sigma} K(x) d\sigma = 0$ où Σ est la sphère $|x| = 1$, $\int_{\Sigma} |K(x)|^p d\sigma < \infty$ pour un $p > 1$. Si $f \in L^r$, $\tilde{f}_\varepsilon(x) = \int_{|x-y|>\varepsilon} K(x-y) f(y) dy$ tend dans L^r vers \tilde{f} et on a

$$\|\tilde{f}\|_r \leq A_{r,p} \left[\int_{\Sigma} |K(x)|^p d\sigma \right]^{1/p} \|f\|_r$$

où $A_{r,p}$ est une constante ne dépendant que de r et p . Les AA. étudient les opérateurs du type K , $K(f) = \alpha f + \tilde{f}$ où α est une constante complexe, dans le cas où $K \in C^\infty$ pour $x \neq 0$ (classe \mathfrak{A}) et dans le cas où $\|K\|_p = |\alpha| + \left[\int_{\Sigma} |K(x)|^p d\sigma \right]^{1/p} < \infty$

(classe \mathfrak{A}_p). Ils prouvent que \mathfrak{A} et \mathfrak{A}_p sont des algèbres (la multiplication étant la composition) et que, munie de la norme ci-dessus \mathfrak{A}_p est une algèbre de Banach commutative semi-simple (on a $\|KH\|_p \leq A_p \|K\|_p \|H\|_p$). $\mathfrak{F}(g)$ désignant la transformée de Fourier de g , on a si $f \in L^2$, $\mathfrak{F}[K(f)] = \mathfrak{F}(f) \cdot \mathfrak{F}(K)$ où $\mathfrak{F}(K)$ est une fonction bornée que l'on appellera la transformée de Fourier de K . C'est une fonction p. h. de degré 0, continue pour $x \neq 0$ et si $K \in \mathfrak{A}$, elle est C^∞ pour $x \neq 0$ (la réciproque est vraie). Un opérateur de \mathfrak{A} ou \mathfrak{A}_p a un inverse si et seulement si sa transformée de Fourier ne s'annule pas, ou encore l'espace des idéaux maximaux de \mathfrak{A}_p est homéomorphe à la sphère $|x| = 1$. A. Revuz.

Widder, D. V.: Integral transforms related to heat conduction. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 42, 279—305 (1956).

Die Wärmeleitungsgleichung $u_{xx} = u_t$ hat in $t > 0$ bei gegebenem $u(x, 0) = \varphi(x)$ die Poissonsche Lösung (1) $u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y, t) \varphi(y) dy$ mit $k(x, t) = (4\pi t)^{-1/2} e^{-x^2/4t}$. Andererseits ist $u(x, t)$ in $x > 0$ bestimmt durch die Cauchyschen Daten $u(0, t) = f(t)$, $u_x(0, t) = g(t)$. Ist $\varphi(x) = 0$ für $x < 0$, so liefert (1):

(2) $f(t) = \int_0^\infty k(y, t) \varphi(y) dy$. Es wird zunächst die durch (2) bzw. (3) $f(t) =$

$\int_0^\infty k(y, t) d\alpha(y)$ definierte Transformation betrachtet. Wenn f sich durch ein absolut konvergentes Integral dieser Gestalt darstellen läßt, so wird abgekürzt geschrieben $[f, \varphi]$ bzw. $[f, d\alpha]$. Die Eigenschaften der Transformation (2), (3) lassen sich leicht feststellen, weil (2), (3) sich als Laplace-Integrale schreiben lassen (was schon früher in der Literatur benutzt worden ist, siehe F. Tricomi, dies. Zbl. 13, 258; G. Doetsch,

dies. Zbl. 14, 213), z. B. (2) $\frac{1}{\sqrt{t}} f\left(\frac{1}{t}\right) = \int_0^\infty e^{-ty} \varphi(y) dy$. Wenn $[f, d\alpha]$, so liefert

(1): $u(0, t) = f(t)$, $u_x(0, t) = D^{1/2} f(t)$, wo $D^{1/2}$ die Riemann-Liouvillesche Derivierte ist. Letztere stellt sich also in der Wärmeleitung auf natürliche Weise ein, was auch schon früher bemerkt worden ist [vgl. G. Doetsch, Math. Z. 28, 567—578 (1928)]. So lassen sich die bekannten Darstellungen von $u(x, t)$ für gewisse Anfangsbedingungen in folgender Weise deuten:

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty [k(x-y, t) + k(x+y, t)] d\alpha(y) = \cosh x D^{1/2} f(t),$$

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty [k(x-y, t) - k(x+y, t)] d\alpha(y) = \sinh x D^{1/2} f(t).$$

Für das Cauchysche Problem $u(0, t) = f(t)$, $u_x(0, t) = g(t)$ wird für den Spezialfall, daß $[f, \varphi]$ und $[g, \psi]$, die Lösung gegeben:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y, t) v(y) dy \text{ mit } 2v(\pm y) = \varphi(y) \pm \int_0^y \psi(r) dr \ (y > 0).$$

Dafür, daß $u(x, t) \geq 0$ ausfällt, werden unter Verwendung von $D^{-1/2}$ Bedingungen angegeben, die von anderem Charakter als die früher bekannten sind.

G. Doetsch.

Widder, David Vernon: Una trasformazione integrale connessa con la propagazione del calore. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 20, 750—752 (1956).

Überblick über die Ergebnisse der vorstehend referierten Note. *G. Doetsch.*

Erdélyi, A.: Asymptotic representations of Fourier integrals and the method of stationary phase. J. Soc. industr. appl. Math. 3, 17—27 (1955).

In this paper the author uses the method of repeated integration by parts to show that the asymptotic behaviour of the integrals (1) $\int_{\alpha}^{\beta} g(t) e^{ixt} dt$ and

(2) $\int_{\alpha}^{\beta} g(t) e^{ixh(t)} dt$ as $x \rightarrow +\infty$ depends entirely on the behaviour of integrands in

the neighbourhood of certain critical points which are (i) the end points of the interval of integration, (ii) the points at which the integrand or some derivative of the integrand is discontinuous and (iii) in the case of (2) with real $h(t)$, also the points at which $h(t)$ is stationary. The two main theorems proved here give the asymptotic expansions of (1) and (2) supposing that $g(t) = (t-\alpha)^{\lambda-1} (\beta-t)^{\mu-1} g_1(t)$, where $0 < \lambda, \mu \leq 1$ and $g_1(t)$ is N times continuously differentiable over $[a, \beta]$ and, in case of (2), also that $h(t)$ is differentiable and $h'(t) = (t-\alpha)^{\sigma-1} (\beta-t)^{\sigma-1} h_1(t)$ where $\sigma, \sigma \geq 1$ and $h_1(t)$ is positive and N times continuously differentiable over $[\alpha, \beta]$. More complete results of this nature but by more difficult methods have been given earlier by van der Corput.

J. A. Siddiqi.

Erdélyi, A.: Asymptotic expansions of Fourier integrals involving logarithmic singularities. J. Soc. industr. appl. Math. 4, 38—47 (1956).

In this paper the technique of the paper reviewed above is used to obtain asymptotic expansions for the integrals of the form (1) and (2) (see the preceding review) in which the integrands are supposed also to have logarithmic singularities.

J. A. Siddiqi.

Goldberg, Richard R. and Richard S. Varga: Möbius inversion of Fourier transforms. Duke math. J. 23, 553—558 (1956).

The main result of this paper is an inversion formula for a Fourier Cosine transform expressed as a series instead of the familiar integral. Let $f(u)$ be of bounded variation in $0 \leq u \leq R$ for every $R > 0$ and let $\int_1^{\infty} |f(u)| \log u du$ be finite. Let

$$F(t) = \int_0^{\infty} f(u) \cos tu du. \text{ Then } G(t) = \frac{1}{t} \left[\frac{1}{2} F(0) + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p F\left(\frac{p\pi}{t}\right) \right] \text{ is finite}$$

almost everywhere in $(0 < t \leq \infty)$ and $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{2n-1} G[(2n-1)t]$ almost

everywhere in $(0 < t < \infty)$. Here μ_n is the Möbius function equal to zero when n is divisible by a square, equal to 1 when $n = 1$ and equal to $(-1)^s$ when n is the product of s distinct primes. The authors remark that for a large class of functions, the convergence almost everywhere can be replaced by convergence everywhere; for instance, this is true when $f(u) = O(|u|^{-p})$, $p > 1$ as $u \rightarrow \infty$ and that this renders the inversion formula useful in numerical work.

V. Ganapathy Iyer.

Mandelbrojt, S.: La transformée de Fourier et les fonctions holomorphes dans un demi-plan. J. Math. pur. appl., IX. Sér. **35**, 211—222 (1956).

In this paper the following two theorems are proved: (I) Let $K \in L(-\infty, \infty)$ whose Fourier transform does not vanish in $(-\infty, -h)$. Let F be a locally measurable and essentially bounded function such that $M = \text{essential max } |F|$. If $\int K(y-x) F(x) dx = 0$, then there exists a function $F_0(z)$ holomorphic in the half plane $y > 0$ such that (1) $|F_0(z)| \leq M e^{hy}$, (2) $\lim_{y \rightarrow +0} \int_{-N}^N |F_0(z) - F(x)| dx = 0$ for every $N > 0$. (II) Let K be a continuous function for which $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \max_{x \in [n, n+1]} |K(x)| < \infty$ and whose Fourier transform does not vanish in the interval $(-\infty, -h)$.

Let F be a function such that $\int_n^{n+1} |dF| < C$ for every n . If $\int K(y-x) dF(x) = 0$, then there exists a function $F_0(z)$ holomorphic in the half-plane $y > 0$ such that

$$(1') \quad \left| e^{icz} \frac{1}{z} F_0(z) \right| \leq_{-\infty < \xi < \infty} \frac{1}{\xi} \left(e^{ic\xi} \frac{1}{\xi} F(\xi) \right) e^{hy}$$

and (2) hold. These theorems contain as very special cases the two closure theorems on which Wiener's Tauberian theorems are based. J. A. Siddiqi.

Tanno, Yukichi: An inversion formula for convolution transforms. Kodai math. Sem. Reports **8**, 79—84 (1956).

Wenn in der Faltungstransformation $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-t) \varphi(t) dt$ der Kern die Form $G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{1}{F(s)} e^{st} ds$ hat, wo $F(s)$ eine ganze Funktion der Gestalt $F(s) = e^{bs} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{a_k}\right) e^{s/a_k}$ mit b und a_k reell, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k^2} < \infty$ ist, so wird für beschränkte und stetige φ die Transformation durch den Differentialoperator $F(D) [f(x) = \varphi(x)]$ umgekehrt (Hirschman and Widder, The convolution transform, dies. Zbl. **65**, 93). Verf. erweitert die Theorie auf den Fall, daß $F(s)$ eine meromorphe Funktion der Gestalt

$$F(s) = e^{bs} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - s/a_k) e^{s/a_k} \Big/ \prod_{k=1}^{\infty} (1 - s/c_k) e^{s/c_k}$$

mit reellen $b, a_k, c_k, |a_k| \leq |c_k|$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k^2} < \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{c_k^2} < \infty$ ist, wobei noch vorausgesetzt wird:

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} |(\sigma + i\tau)/F(\sigma + i\tau)| = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |(\sigma + i\tau)/F(\sigma + i\tau)| d\tau < \infty.$$

In diese Klasse gehört z. B. die Meijer-Transformation. G. Doetsch.
Stanković, Bogoljub: Inversion d'une transformation intégrale. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. **10**, 85—88 (1956).

Verf. hatte früher [Srpska Akad. Nauka, Zbornik Radova, mat. Inst. **43**, 4, 81—130 (1955)] die Integraltransformation \mathfrak{B} untersucht, deren Kern eine Funktion von E. M. Wright ist. Hier gibt er zu \mathfrak{B} eine Umkehrformel an, die der von Post und Widder bei der Laplaceschen Transformation entspricht, und den Gedanken-gang ihres Beweises, dessen Einzelheiten an anderer Stelle folgen werden.

L. Koschmieder.

Jurkat, W. B.: An extension problem for functions with monotonic derivatives. Canadian J. Math. **8**, 184—191 (1956).

Let the finite sequence $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$ be given. The author poses the following

moment problem: when does there exist a $T > 0$ and a non-decreasing function $\psi(t)$ defined in $0 \leq t \leq T$ such that $\mu_\nu = \int_0^T t^\nu d\psi(t)$ ($\nu = 0, 1, \dots, n$)? This problem is clearly equivalent to the reduced Stieltjes moment problem considered by Verblunsky (this Zbl. **40**, 208). From a result due to Achyeseer and Krein concerning the reduced Hausdorff moment problem (Shohat and Tamarkin, The problem of moments, p. 77) the author deduces the following necessary and sufficient condition that the above problem have a solution: if $n = 2m$, then $\sum_{i,j=0}^m \mu_{i+j} x_i x_j \geq 0$, $\sum_{i,j=0}^{m-1} \mu_{i+j+2} x_i x_j \leq T \sum_{i,j=0}^{m-1} \mu_{i+j+1} x_i x_j$; if $n = 2m + 1$, then $\sum_{i,j=0}^m \mu_{i+j+1} x_i x_j \geq 0$, $\sum_{i,j=0}^m \mu_{i+j+1} x_i x_j \leq T \sum_{i,j=0}^m \mu_{i+j} x_i x_j$ for all real x_i and a suitable $T > 0$. — Next let c_0, c_1, \dots, c_n and X be given. When does there exist a $T > 0$ and a function $f(x)$ which in $X - T \leq x \leq X$ is the n -th integral of a non-decreasing function $\Phi(x)$ and satisfies $f^{(\nu)}(X - T) = 0$, $f^{(\nu)}(X) = c_\nu$ ($\nu = 0, 1, \dots, n$)? The necessary and sufficient condition for it is that the previous problem have a solution with $\mu_\nu = \nu! c_{n-\nu}$. — Finally let $F(x)$ be the n -th integral of a positive non-decreasing function for all large positive x . When does there exist an $f(x)$ which is the n -th integral of a non-decreasing function for $-\infty < x < \infty$ such that $f(x)$ vanish for all large negative x and $f(x) = F(x)$ for all large positive x ? Such an $f(x)$ exists, of course, if and only if the previous problem has a solution with $c_\nu = F^{(\nu)}(X)$ ($\nu = 0, 1, \dots, n$) for all large X . If $F(x)$ is a (H)-function [or L-function, see Bourbaki, Fonctions d'une variable réelle, Chap. V (this Zbl. **42**, 92), Appendice, no 4] then this necessary and sufficient condition is equivalent with the fact that $x^{-n} F(x)$ be non-decreasing for all large positive x . This is the main result of the paper.

J. Horváth.

Mirkil, H.: Differentiable functions, formal power series, and moments. Proc. Amer. math. Soc. **7**, 650—652 (1956).

The n -dimensional analogues of the following two theorems are proved: (I) Let $(\lambda_n)_0^\infty$ be an arbitrary sequence of complex numbers. Then there exists some infinitely differentiable function $f(x)$ defined over $(-\infty, \infty)$ such that $f^{(n)}(0) = \lambda_n$ ($n \geq 0$). (II) Given an arbitrary sequence $(\lambda_n)_0^\infty$ of complex numbers, there exists an analytic function $f(t)$ such that

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) t^n dt = \lambda_n \quad (n \geq 0).$$

Theorem (I) which was first discovered by Borel has also been recently re-proved by Rosenthal (this Zbl. **53**, 228). Theorem (II) on the solution of moment problem follows directly from (I) by taking the Fourier transform.

J. A. Siddiqi.

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

● **Riesz, Friedrich und Béla Sz.-Nagy: Vorlesungen über Funktionalanalysis.** (Hochschulbücher für Mathematik. Bd. 27.) Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1956. XI, 481 S. Ln. DM 32,20.

Vgl. die Besprechung des französ. Originals in diesem Zbl. **46**, 331; **64**, 354.

Sosa Páez, Susana Z. de und Lina N. Muñoz: Geometrie der Sphäre im Hilbert-Raum. Revista Un. mat. Argentina **17**, 279—286 (1956) [Spanisch].

Étude de propriétés concernant les variétés sphériques définies par des équations de la forme $|x - a| = \varrho$, dans un espace de Hilbert: homothétie par rapport à 0, puissance et polarité, hyperplans radicaux, inversion par rapport à 0, projection stéréographique, intersection de n variétés sphériques, isométrie.

A. Pereira Gomes.

Steinberg, R.: Note on a theorem of Hadwiger. *Pacific J. Math.* **6**, 775—777 (1956).

Soit H un espace de Hilbert non nécessairement séparable. Pour qu'un système $\{u_\alpha\}$ de vecteurs de H soit la projection d'un système orthonormé complet (respectivement, non nécessairement complet) il faut et il suffit que l'égalité de Parseval (respectivement, l'inégalité de Bessel) soit vérifiée pour tout couple de vecteurs de H (respectivement, pour tout vecteur de H) d'après un théorème de H. Hadwiger, *ce Zbl.* **24**, 68 [respectivement, G. Julia, *C. r. Acad. Sci., Paris* **219**, 8—11 (1944)]. L'A. donne de nouvelles démonstrations de ces théorèmes et pose le problème de savoir si pour qu'un système $\{u_\alpha\}$ soit la projection d'un système orthogonal (non nécessairement orthonormé) il faut et il suffit que $\{u_\alpha\}$ possède la propriété P suivante: chaque x de H est orthogonal à tous les $\{u_\alpha\}$ sauf, éventuellement, à un sous-ensemble dénombrable. La propriété P est clairement nécessaire, car elle est invariante par projection. L'A. avertit qu'il n'a réussi à démontrer que le cas particulier suivant: Dans un espace de Hilbert séparable, pour qu'un système de vecteurs non nuls $\{u_\alpha\}$ soit la projection d'un système orthogonal il faut et il suffit que $\{u_\alpha\}$ soit dénombrable.

A. Pereira Gomes.

Wright, Fred B.: Semigroups and submodular functions. *Michigan math. J.* **3**, 169—172 (1956).

Cette Note est une tentative d'extension aux espaces topologiques linéaires réels quelconques de la caractérisation à l'aide des fonctions sous-additives de la structure des semi-groupes additifs ouverts de nombres complexes.

R. Croisot.

Grothendieck, A.: Erratum au mémoire: Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. *Ann. Inst. Fourier* **6** (1955/56), 117—120 (1956).

Es wird durch ein Gegenbeispiel gezeigt, daß der zweite Teil von Lemma 13 auf S. 131 der im Titel genannten Arbeit des Verf. (vgl. dies. Zbl. **64**, 355) falsch ist. Auch das Lemma 4 auf S. 144 einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. **50**, 109) ist unrichtig.

G. Köthe.

Kadec, M. I.: Unbedingt konvergente Reihen in einem gleichmäßig konvexen Raum. *Uspechi mat. Nauk* **11**, Nr. 5 (71), 185—190 (1956) [Russisch].

Let X be a uniformly convex Banach space. For $0 < \delta < 1$, let $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ be the l. u. b. of diameters of sets $[x: |x| \leq 1 \text{ and } F(x) \geq 1 - \delta]$ where F is a linear functional, $|F| = 1$. The inverse function $\delta = \delta(\varepsilon)$ is called the modul of convexity of X . — Let $x_1 + x_2 + \dots$ be a commutatively convergent series in X . Suppose that $|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots| \leq 2$ for every sequence $\alpha_i = \pm 1$. Then $\delta(|x_1|) + \delta(|x_2|) + \dots < \infty$. — If $X = L^p$, we have $\delta(\varepsilon) > K(p) \varepsilon^p$ for $p \geq 2$, and $\delta(\varepsilon) > K(p) \varepsilon^2$ for $1 < p < 2$. Therefore the Kadec theorem generalizes the known results of W. Orlicz (this Zbl. **8**, 315).

R. Sikorski.

Henstock, R.: Linear and bilinear functions with domain contained in a real countably infinite dimensional space. *Proc. London math. Soc.*, III. Ser. **6**, 481—500 (1956).

This paper is a continuation and extension of a previous paper by the author (this Zbl. **64**, 363); for notation and terminology, and many details, reference must be made to this previous paper. The chief extension is from linear functions to positive semi-definite bilinear symmetric functions $A(\xi, \zeta)$ of the bounded sequences ξ, ζ ; as in the previous paper, Q_ω denotes the subset of the real bounded sequences $\{x_n\}$ for which $-\frac{1}{2} \leq x_n \leq \frac{1}{2}$, $n = 1, 2, \dots$. The following theorems are established. Theorem 1. A necessary and sufficient condition on a real double sequence $\{a_{n,p}\}$ satisfying $a_{n,n} \geq 0$, $a_{n,p}^2 \leq a_{n,n} a_{p,p}$, $a_{n,p} = a_{p,n}$ ($n, p = 1, 2, \dots$), in order that

$\sum_{n,p=1}^{\infty} a_{n,p} x_n x_p$ should be convergent by squares for almost all $\xi = \{x_n\}$ of Q_ω is that $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,n} < \infty$. Theorem 2. Let $J(\xi)$ be a linear function of points ξ in (m) , and let η be fixed in (m) , where (m) is the space of all real bounded sequences. If

$J(\xi + \eta)$ is measurable for ξ in E_1 , the set of ξ in Q_ω where $J(\xi + \eta)$ exists, and if $L_\omega(E_1) > 0$, $L_\omega(E_1)$ being a measure of E_1 defined in Q_ω , then $J(\xi)$ exists for almost all ξ in Q_ω , $J(\eta)$ exists, $J(\Phi^n)$ exists for $n = 1, 2, \dots$, where Φ^n is the ξ with $x_n = 1$ and $x_p = 0$ ($p \neq n$), $\sum_{n=1}^{\infty} J^2(\Phi^n) < \infty$, and $\lim_{n \rightarrow \infty} J(\xi''_n) = 0$ almost everywhere in Q_ω , where $\xi''_n = \{0, \dots, 0, x_{n+1}, \dots, x_{n+p}, \dots\}$. Conversely, if $J(\xi)$ satisfies the last four conditions, then $J(\xi + \eta)$ is defined, for almost all ξ of Q_ω , by the formula $\sum_{n=1}^{\infty} J(\Phi^n) x_n + J(\eta)$. Theorem 3. Let $A(\xi, \zeta)$ be a bilinear symmetric positive semi-definite function of points ξ, ζ in (m) , and let η be fixed in (m) . If $A(\xi + \eta, \xi + \eta)$ is measurable for ξ in E_2 , the set of ξ in Q_ω where $A(\xi + \eta, \xi + \eta)$ exists, and if $L_\omega(E_2) > 0$, then $A(\xi + \eta, \xi + \eta)$ and $A(\xi, \eta)$ exist for almost all ξ in Q_ω , and

$$(1) \quad a_{n,p} \equiv A(\Phi^n, \Phi^p) \quad \text{exists for } n, p = 1, 2, \dots,$$

$$(2) \quad a_n(\eta) \equiv A(\Phi^n, \eta) \quad \text{exists for } n = 1, 2, \dots,$$

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,n} < \infty, \quad (4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2(\eta) < \infty,$$

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A(\xi'_n, \xi''_n) = 0 \quad \text{almost everywhere in } Q_\omega,$$

where $\xi'_n = \{x_1, \dots, x_n, 0, 0, 0, \dots\}$,

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A(\xi''_n + \eta, \xi''_n + \eta) = B,$$

for some constant $B \geq 0$, almost everywhere in Q_ω . In particular, if $\eta = 0$, we obtain the result that $A(\xi, \xi)$ exists almost everywhere in Q_ω , and (1), (3), (5), (6) hold with $\eta = 0$, whenever $A(\xi, \zeta)$ satisfies the conditions of the theorem. Also, under the hypotheses of the theorem, $A(\xi, \xi)$ exists almost everywhere in Q_ω if and only if $A(\eta, \eta)$ exists. Conversely, if $A(\xi, \zeta)$ is a bilinear symmetric positive semi-definite function of points ξ, ζ in (m) , satisfying (1), (2), (3), (4), (5), (6), then $A(\xi + \eta, \xi + \eta)$ is measurable for ξ in Q_ω , and defined for almost all $\xi = \{x_n\}$ in Q_ω by the formula

$$\sum_{n,p=1}^{\infty} a_{n,p} x_n x_p + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\eta) x_n + B.$$

The following theorem provides an example for which $B > 0$. Theorem 4. Let $\{m_n\}$ be a sequence of completely additive measures on the real axis, such that $m_n(-\infty, \infty) = 1$. Let $\gamma_n(x)$ be a real function measurable with respect to m_n for $n = 1, 2, \dots$, and let

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\gamma_n^2(x)]_R dm_n \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_n^2(x) dm_n \leq K$$

uniformly in n as $R \rightarrow \infty$, where K is independent of n , and where $[f]_R = f$ when $f \leq R$, resp. $= R$ when $f > R$. Put $\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_n(x) dm_n$. Then for almost all $\xi = \{x_n\}$, in the sense of the product measure of the m_n for $n = 1, 2, \dots$,

$$\sum_{p=1}^n \gamma_p(x_p) = \sum_{p=1}^n \mu_p + O(n^{1/2} \log^{1/2} n).$$

In particular, for almost all ξ in Q_ω , using the measure $L_\omega(E)$, and for each bounded sequence $\{y_n\}$, we have

$$\sum_{p=1}^n x_p = O(n^{1/2} \log^{1/2} n), \quad \sum_{p=1}^n |x_p| = \frac{1}{4} n + O(n^{1/2} \log^{1/2} n),$$

$$\sum_{p=1}^n x_p^2 = \frac{1}{12} n + O(n^{1/2} \log^{1/2} n), \quad \sum_{p=1}^n x_p y_p = O(n^{1/2} \log^{1/2} n),$$

$$\text{and} \quad \sum_{p=1}^n (x_p + y_p)^2 = \frac{1}{12} n + \sum_{p=1}^n y_p^2 + O(n^{1/2} \log^{1/2} n).$$

Cohen, L. W.: A non-archimedian measure in the space of real sequences. Pacific J. Math. **6**, 9—24 (1956).

L'espace S des suites réelles $X = \{x_n\}$ est ordonné lexicographiquement. S est un groupe topologique si l'on prend pour base des ouverts les intervalles $\{Z; X < Z < Y\}$. L'A. montre que les ensembles

$$I_p(a_1, \dots, a_{p-1}; a'_p, a''_p) = \{X; x_n = a_n \text{ si } n < p, a'_p \leq x_p < a''_p\}$$

forment une base pour la même topologie, et que si l'on pose $\mu(I_p) = \{x_n\}$ avec $x_n = 0$ si $n \neq p$ et $x_p = a''_p - a'_p$, $\mu(I_p)$ peut être étendue en une mesure positive simplement additive (à valeurs dans S) sur l'anneau engendré par les I_p . Cette mesure est évidemment invariante par les translations de S . A. Revuz.

Tarnawski, E.: On the spaces of functions satisfying Dini's condition. Fundamenta Math. **43**, 141—147 (1956).

Soit $f(x)$ continue, périodique, de période $l = 1$, définie pour chaque x réel. Désignons par $\omega(t)$, $\omega_1(t)$ des fonctions définies et non nulles pour $t > 0$, monotones nondécroissantes et tendant vers zéro pour $t \rightarrow 0$. Posons

$$W(\tau) = \int_{\tau}^1 \frac{dt}{\omega(t)}, \quad W_1(\tau) = \int_{\tau}^1 \frac{dt}{\omega_1(t)}.$$

Considérons les conditions

$$(1) \quad \lim_{\tau \rightarrow +0} W_1(\tau) = \infty, \quad (*) \quad \int_0^1 \frac{t}{\omega(t)} dt < \infty \quad \text{et resp.} \quad \int_0^1 \frac{t}{\omega_1(t)} dt < \infty,$$

$$(**) \quad \lim_{t \rightarrow +0} W(t) \frac{\omega(t)}{t} = g > 1, \quad (***) \quad \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\omega_1(2t)}{\omega_1(t)} = s < \infty.$$

Désignons par D_w l'espace des fonctions $f(x)$ satisfaisant la condition généralisée de Dini $\int_0^1 \frac{|f(x+t) - f(x)|}{\omega(t)} dt \leq 1$ pour chaque x . La distance ϱ entre deux éléments de cet espace est définie par $\varrho(f_1, f_2) = \max_{0 \leq x < l} |f_1(x) - f_2(x)|$. D_w est complet. Soit S l'ensemble des fonctions $f(x)$ appartenant à D_w et satisfaisant, pour chaque x , la condition

$$(2) \quad \int_0^1 \frac{|f(x+t) - f(x)|}{\omega_1(t)} dt = \infty.$$

Supposons que $\omega(t)$ et $\omega_1(t)$ satisfont (1), (*), (**), (***) et $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\omega_1(t)}{\omega(t)} = 0$. Alors, S est un ensemble résiduel dans l'espace D_w . Si $\omega_1(t)$ satisfait les conditions (1) et (***), alors l'ensemble des fonctions satisfaisant, pour chaque x , la condition (2), est un ensemble résiduel dans l'espace des fonctions continues et périodiques.

S. Marcus.

Koosis, Paul: Note sur les fonctions moyenne-périodiques. Ann. Inst. Fourier **6** (1955/56), 357—360 (1956).

Une fonction $f(x)$ continue sur $-\infty < x < \infty$ est dite moyenne-périodique s'il existe une mesure $\mu \neq 0$, à support compact, telle que $f * \mu = 0$ (L. Schwartz, ce Zbl. **30**, 150). Soit alors $f^-(x) = f(x)$ pour $x \leq 0$ et $f^-(x) = 0$ pour $x > 0$ et

$$\text{posons} \quad g = f^- * \mu, \quad G(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-wx} g(x) dx,$$

$$M(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-wx} d\mu(x), \quad F(w) = \frac{G(w)}{M(w)}.$$

J. P. Kahane (ce Zbl. **64**, 359) déduit la théorie des fonctions moyenne-périodiques de la proposition suivante: „Si $F(w)$ n'a pas de pôles, $f = 0$ “, mais sa démonstration est incomplète. L'A. donne une démonstration simplifiée et correcte de cette proposition.

J. Horváth.

Luxemburg, W. A. J. and A. C. Zaanan: Conjugate spaces of Orlicz spaces. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 59, 217–228 (1956).

$\Phi(u)$ und $\Psi(v)$ seien im folgenden zwei komplementäre Youngsche Funktionen, Δ sei eine Punktmenge, auf der ein nichtnegatives vollständiges und total σ -finites Maß $\mu(E)$ gegeben ist. Für eine komplexwertige, μ -meßbare Funktion $f(x)$ auf Δ wird $M_\Phi(f) = \int_\Delta \Phi(|f(x)|) d\mu$ und $M_\Psi(f) = \int_\Delta \Psi(|f(x)|) d\mu$ gesetzt. Diese beiden Funktionale sind Modulare im Sinne von H. Nakano (vgl. Topology and Linear Topological Spaces, Tokyo 1951). Setzt man $\|f\|_{M_\Phi} = \inf k^{-1}$, wobei k alle $k \geq 0$ mit $M_\Phi(kf) \leq 1$ durchläuft, so bilden alle f mit $\|f\|_{M_\Phi} < \infty$ einen Banachraum L_{M_Φ} mit dieser Norm, einen sog. Orliczraum. Der assoziierte Orliczraum L_Φ zu L_{M_Ψ} besteht aus allen f mit $\|f\|_\Phi = \sup \int |fg| d\mu < \infty$, wobei das Supremum über alle g aus der Einheitskugel von L_{M_Ψ} zu nehmen ist. Die Räume L_Φ und L_{M_Φ} enthalten dieselben Elemente, die beiden Normen $\|f\|_\Phi$ und $\|f\|_{M_\Phi}$ sind äquivalent, $\|f\|_{M_\Phi} \leq \|f\|_\Phi \leq 2 \|f\|_{M_\Phi}$. L_Φ ist im allgemeinen nur ein echter Teilraum des konjugierten Raumes $L_{M_\Psi}^*$. Der für alle $f \in L_\Phi$ erklärte Modular $M_\Phi(f)$ läßt sich auch durch die Formel $M_\Phi(f) = \sup_{g \in L_\Psi} [\int f g d\mu - M_\Psi(g)]$ erhalten. Diese Formel erlaubt eine

Fortsetzung von $M_\Phi(f)$ von L_Φ auf $L_{M_\Psi}^*$, man setzt für $g^* \in L_{M_\Psi}^*$ $M_\Phi(g^*) = \sup_{g \in L_\Psi} [g^*(g) - M_\Psi(g)]$. Die Modulareigenschaften von $M_\Phi(f)$ gelten auch für die

Fortsetzung. Entsprechendes gilt natürlich auch für L_{M_Ψ} und $L_{M_\Phi}^*$. Umgekehrt gilt für $f \in L_\Phi$ auch $M_\Phi(f) = \sup_{f^* \in L_{M_\Psi}^*} [f^*(f) - M_\Psi(f^*)]$. Für die Norm $\|g\|_\Psi$ eines

$g \in L_\Psi$ gilt $\|g\|_\Psi = \sup \|g^*(g)\|$, wobei das Supremum über alle $g^* \in L_\Psi^*$ mit $M_\Phi(g^*) \leq 1$ zu nehmen ist. Die Norm $\|g^*\|_{M_\Phi}$ auf L_Ψ^* , die durch $\|g^*\|_{M_\Phi} = \inf k^{-1}$ definiert ist, wobei k alle $k \geq 0$ mit $M_\Phi(kg^*) \leq 1$ durchläuft, ist nichts anderes als die Norm auf dem konjugierten Raum zu L_Ψ . Die Norm $\|g^*\|_\Phi$ ist die Norm im konjugierten Raum zu $L_{M_\Psi}^*$, und es ist $\|g^*\|_\Phi = \inf_{k > 0} k^{-1} (1 + M_\Phi(kg^*))$. Es gilt wieder $\|g^*\|_{M_\Phi} \leq \|g^*\|_\Phi \leq 2 \|g^*\|_{M_\Phi}$. Eine Folge $f_n \in L_\Phi$ konvergiert gegen $f \in L_\Phi$ im Sinne von $\sigma(L_\Phi, L_\Psi)$ bzw. $|\sigma|(L_\Phi, L_\Psi)$, wenn $\int (f_n - f) g d\mu$ bzw. $\int |(f_n - f) g| d\mu \rightarrow 0$ für alle $g \in L_\Psi$. Eine Reihe von Kriterien für diese Konvergenzen werden abgeleitet, u. a.: Geht f_n gegen f im Sinne von $\sigma(L_\Phi, L_\Psi)$, so ist $M_\Phi(kf) \leq \liminf M_\Phi(kf_n)$ für alle $k \geq 0$. Ist $\Phi(u) > 0$ für alle $u > 0$ und gibt es ein $k_0 > 0$ mit $M_\Phi(k_0(f - f_n)) \rightarrow 0$, so konvergiert f_n gegen f im Sinne von $|\sigma|(L_\Phi, L_\Psi)$. Konvergiert f_n gegen f im Sinne von $|\sigma|(L_\Phi, L_\Psi)$ und ist $\lim M_\Phi(kf_n) = M_\Phi(kf) < \infty$ für alle $k > 0$, so ist $\|f_n - f\|_\Phi \rightarrow 0$.

G. Köthe.

Matthes, Klaus: Über eine Verallgemeinerung eines Satzes von Gelfand und Kolmogoroff. Math. Nachr. 15, 117–121 (1956).

E : espace localement compact. $C(E)$: espace des fonctions réelles continues sur E à supports compacts. D_n : partie de $C(E)$ qui: 1. sépare E ; 2. contient pour tout point $p \in E$ une fonction non nulle en p ; 3. contient avec f_1, \dots, f_m , $\Phi(f_1, \dots, f_m)$ si Φ est une application n fois continuellement différentiable de R^m dans R^1 . Une fonction réelle f sur E appartient localement à D_n s'il existe pour tout $p \in E$ une fonction $f_p \in D_n$ qui coïncide avec f sur un voisinage de p . Un homomorphisme ψ de (E, D_n) dans (E', D'_n) est une application de E dans E' telle que si $f' \in D'_n$, $f' \circ \psi$ appartient localement à D_n . Définition correspondante de l'isomorphisme. Théorème: A tout isomorphisme d'anneau Φ de D'_n sur D_n correspond exactement un isomorphisme ψ de (E, D_n) sur (E', D'_n) tel que $\Phi(f') = f' \circ \psi$. Application aux variétés n fois continuellement différentiables.

A. Revuz.

Wermer, John: Subalgebras of the algebra of all complex-valued continuous functions on the circle. Amer. J. Math. 78, 225–242 (1956).

Extension au cas d'un domaine M d'une surface de Riemann limité par une

courbe simple analytique \mathcal{S} telle que $M \cup \mathcal{S}$ soit compact d'un résultat établi par l'A. dans le cas du cercle unité (ce Zbl. 52, 121). C est l'algèbre des fonctions complexes continues sur \mathcal{S} , \mathfrak{A} en est la sous-algèbre des fonctions prolongeables en une fonction analytique dans M et continue sur $M \cup \mathcal{S}$. Th.: \mathfrak{A} est une sous-algèbre maximale fermée de C . M détermine \mathfrak{A} en ce sens que si M_1 et M_2 sont deux domaines de deux surfaces de Riemann limités par deux courbes simples analytiques \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 telles que $M_1 \cup \mathcal{S}_1$ et $M_2 \cup \mathcal{S}_2$ soient compacts, \mathfrak{A}_1 et \mathfrak{A}_2 sont isomorphes si et seulement s'il existe une application biunivoque et biconforme de M_1 sur M_2 .

A. Revuz.

Miyanaga, Yasue: A note on Banach algebras. Proc. Japan Acad. 32, 176 (1956).

A new proof of the following theorem of R. E. Edwards (this Zbl. 43, 114): Let X be a complex Banach algebra with unit and such that $\|x^{-1}\| = \|x\|^{-1}$ for every regular element x . Then X is isomorphic to the complex field.

A. Alexiewicz.

Wolfson, Kenneth G.: A note on the algebra of bounded functions. II. Proc. Amer. math. Soc. 7, 852—855 (1956).

In einer früheren Note (dies. Zbl. 55, 107) gab Verf. notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß eine kommutative B^* -Algebra K mit Einselement äquivalent einer Algebra $B(X)$ ist, dem Ring aller beschränkten komplexwertigen Funktionen auf einem diskreten Raum X . L. J. Heider gab mit Hilfe des K zugeordneten Gelfandschen Ringes $C(M)$ zwei neue Kriterien. Durch Kombination der Methoden erhält Verf. folgenden Satz: Eine B^* -Algebra K mit Einselement ist dann und nur dann äquivalent einem $B(X)$, wenn der Strukturraum M eine dichte Menge isolierter Punkte enthält und wenn jede reguläre offene Teilmenge von M abgeschlossen ist.

G. Köthe.

Vidav, Ivan: Quelques propriétés de la norme dans les algèbres de Banach. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. 10, 53—58 (1956).

Suppose that \mathfrak{B} is a Banach algebra with unit element 1 . If $a \in \mathfrak{B}$, then the function $f(a, \cdot)$ is defined by $f(a, \xi) = \|1 + \xi a\|$ when $-\infty < \xi < \infty$; the function $f(a, \cdot)$ is convex and possesses therefore both a right derivative and a left derivative at $\xi = 0$. When $u \in \mathfrak{B}$ and $v \in \mathfrak{B}$, then $P(u, v)$ denotes the set of all $x = \lambda_1 u + \lambda_2 v$, where λ_1 and λ_2 are complex numbers; call $M(x; u, v) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}$. Note that \mathfrak{B} is the scalar field whenever $\mathfrak{B} = P(1, 0)$. Suppose that \mathfrak{B} has the following property: for any a in \mathfrak{B} there exists a complex number μ with $|\mu| = 1$ and such that $f(\mu a, \cdot)$ is differentiable at $\xi = 0$; if so, then either $\mathfrak{B} = P(1, 0)$ or there exists two idempotent elements u and v such that $u + v = 1$ and $\mathfrak{B} = P(u, v)$. If $\mathfrak{B} = P(u, v)$, then \mathfrak{B} is commutative and $\|x\| = M(x; u, v)$. Corollary I: Suppose that \mathfrak{B} is a Banach algebra with $1 \in \mathfrak{B}$: if \mathfrak{B} is also a Hilbert space, then \mathfrak{B} is the scalar field. Corollary II: Suppose that \mathfrak{B} is a Banach algebra with $1 \in \mathfrak{B}$; if $a \in \mathfrak{B}$ implies that $f(a, \xi) f(a, -\xi) = 1 + o(\xi)$ when $\xi \rightarrow 0^+$, then \mathfrak{B} is the scalar field. This last hypothesis is clearly weaker than the one used by Mazur to obtain the same conclusion. The corollaries are proved by using the fact that $g(\xi) = M(1 + \xi a; u, v)$ is not always differentiable at $\xi = 0$. The following theorem is also used. Let H be the set of all u in \mathfrak{B} such that $f(u, i\xi) = 1 + o(\xi)$ when $\xi \rightarrow 0^+$. Let R be the field of reals and let $R(u, v)$ be the set of all $x = \lambda_1 u + \lambda_2 v$, where $\lambda_1 \in R$ and $\lambda_2 \in R$; if $u \in H$ and $v \in H$ then $R(u, v) \subset H$ and there exist two real numbers k_1 and k_2 such that $\|\exp(\pm \xi u)\| = \exp(\pm k_n \xi)$ for any $\xi > 0$ and $n = 1, 2$. The set H is closed and contains no quasi-nilpotent elements.

G. L. Krabbe.

Sakai, Shôichirô: A characterization of W^* -algebras. Pacific J. Math. 6, 763—773 (1956).

Following Z. Takeda (this Zbl. 57, 97), the aim of the present article is to render the theory of W^* -algebras independent of the underlying Hilbert space. Important

results in this direction have been achieved by I. Kaplansky and Dixmier (this Zbl. 50, 115), who showed that a W^* -algebra is an adjoint space. Now follows the main result of this article. A C^* -algebra is a W^* -algebra if and only if it is an adjoint space, when considered as a Banach space. The proof is carried through under the assumption that the C^* -algebra has a unit; this assumption is removed with the help of the following theorem: if the unit sphere of a C^* -algebra N has an extreme point, then N has a unit. The article owes much to the work of Dixmier and leans heavily on the beautiful results of M. H. Stone (see Dixmier, this Zbl. 45, 380).

G. L. Krabbe.

Umegaki, Hisaharu: Conditional expectation in an operator algebra. II. Tôhoku math. J., II. Ser. 8, 86—100 (1956).

Auf Ergebnisse von Dixmier sich stützend beweist der Verf. die Existenz bedingter Erwartungen in einer halb-endlichen W^* -Algebra A von Operatoren, mit einer Spur μ (regular gage im Sinne von Segal), und charakterisiert sie in analoger Weise wie vorher im sigma-endlichen Fall (dies. Zbl. 58, 105; vgl. auch Nakamura-Turumaru, dies. Zbl. 58, 105). Im folgenden sei $r = 1$ oder $r = 2$. Ist $S \subseteq L^r(A)$, so gibt es eine minimale W^* -Unteralgebra $W(S)$ von A mit $S \subseteq L^r(W(S))$. Mit Hilfe dieser Begriffe wird nun der Begriff eines Martingals $\{x_\alpha; \alpha \in D\}$, vom Verf. M -net genannt, durch $x_\alpha = x_\beta^\alpha$ für $\alpha, \beta \in D, \alpha \leq \beta$, definiert, wobei der Parameterbereich D nach rechts oder links filtriere, $x_\alpha \in L^r(A)$ sei und $x \rightarrow x^\alpha$ die bedingte Erwartung in bezug auf die von allen $W(x_\gamma)$ mit $\gamma \leq \alpha$ erzeugte W^* -Unteralgebra von A bedeute. Die bekannten Sätze über die starke (Mittel-) Konvergenz aufsteigender Martingale in $L^r(A)$ werden auf den vorliegenden Fall übertragen und analoge Sätze über absteigende Martingale bewiesen. Schließlich zeigt der Verf., daß ein Konvergenzsatz über Folgen von Operatoren von J. von Neumann (dies. Zbl. 23, 133; chapter II) ein Spezialfall dieser allgemeinen Sätze ist.

K. Krickeberg.

Tomita, Minoru: Harmonic analysis on locally compact groups. Math. J. Okayama Univ. 5, 133—193 (1956).

Das Hauptergebnis der Arbeit sind zwei Sätze vom Plancherelschen Typ für eine separable unimodulare lokal kompakte Gruppe \mathfrak{G} . Der Raum \mathfrak{N} der normierten stetigen positiv definiten Funktionen auf \mathfrak{G} ist schwach lokal kompakt, die schwache und die Pontrjaginsche Topologie stimmen auf \mathfrak{N} überein. \mathfrak{N} enthält den vollständig regulären Teilraum \mathfrak{E} der elementaren positiv definiten Funktionen auf \mathfrak{G} . Ist dx das Haarsche Maß auf \mathfrak{G} und $f \in L^1(\mathfrak{G})$, so ist durch $\hat{f}(\hat{y}) = \int (\hat{y}, \overline{x}) f(x) dx$ die Fouriertransformierte \hat{f} von f als Funktion auf \mathfrak{E} definiert. Ist umgekehrt π ein (naheliegender definiertes) endliches positives reguläres Borelsches Maß auf \mathfrak{E} , so ist $\hat{\pi}(x) = \int_{\mathfrak{E}} (\hat{y}, x) d\pi(\hat{y})$ eine positiv definite stetige Funktion auf \mathfrak{G} . Die Komplikationen der Theorie treten dadurch auf, daß, anders als im abelschen oder kompakten Fall, \mathfrak{E} nicht lokal kompakt ist und kein ausgezeichnetes Maß auf \mathfrak{E} existiert; deshalb ist man gezwungen, eine ganze Klasse gleichberechtigter Maße auf \mathfrak{E} zu betrachten: Der Verf. nennt ein positives Borelsches Maß τ auf \mathfrak{E} fundamental, wenn 1. \mathfrak{E} die direkte Vereinigung abzählbar vieler kompakter Teile endlichen Maßes und einer

Nullmenge ist, 2. für $f \in L^1(\mathfrak{G}) \cap L^2(\mathfrak{G})$ stets $\int |f|^2 dx = \int (\widehat{f \star f}) d\tau$ gilt ($f \star (x) = f(x^{-1})$, $(g \star h)(x) = \int g(x y^{-1}) h(y) dy$) und 3. für die charakteristischen Funktionen φ_X, φ_Y von disjunkten Borelschen Mengen endlichen Maßes $X, Y \subset \mathfrak{G}$ stets $(\hat{\varphi}_X, \hat{\varphi}_Y) = 0$ gilt. Hauptergebnis: Satz 18: Es existieren lineare Abbildungen \mathcal{T} von $L^2(\mathfrak{G})$ in $L^2(\tau) = L^2(\mathfrak{E}, \tau)$ und \mathcal{T}^* von $L^2(\tau)$ in $L^2(\mathfrak{G})$ mit folgenden Eigenschaften: $\mathcal{T}f = \hat{f}$ für $f \in L^1 \cap L^2$, $\mathcal{T}^* \varphi = \hat{\varphi} = \int (\lambda, \overline{x}) \varphi(\lambda) d\tau$ falls φ eine

τ -integrierbare Funktion mit Träger endlichen Maßes ist. \mathcal{T}^* ist eine unitäre Abbildung, d. h. es gilt $(\mathcal{T}^* \varphi, \mathcal{T}^* \psi) = (\varphi, \psi)$ für alle $\varphi, \psi \in L^2(\tau)$, ferner gilt $\mathcal{T}^* \varphi \star \mathcal{T}^* \psi = \mathcal{T}^*(\varphi \psi)$. $\mathcal{T} \mathcal{T}^*$ ist die Identität in $L^2(\tau)$, $\mathcal{T}^* \mathcal{T}$ ist eine Projektion in $L^2(\mathfrak{G})$. — Für $f \in L^2(\mathfrak{G})$ gilt eine Umkehrformel. Definieren wir für Funktionen f auf \mathfrak{G} und $a \in \mathfrak{G}$ den Operator Γ_a durch $(\Gamma_a f)(x) = f(ax) - f(xa)$, so wird $L^2(\mathfrak{G})$ von allen $\mathcal{T}^* \varphi$, $\Gamma_a \mathcal{T}^* \psi$, $\varphi, \psi \in L^2(\tau)$, aufgespannt. Der Verf. nennt einen abgeschlossenen Teilraum $M \subset L^2(\mathfrak{G})$ maximal abelsch, wenn 1. $M^* = M$, 2. für $f, g \in M$ stets $f \star g = g \star f$ gilt und 3. $L^2(\mathfrak{G})$ von M und allen $\Gamma_a f$, $f \in M$, erzeugt wird. Satz 19: Ist τ ein Fundamentalmaß, so bildet das zugehörige \mathcal{T}^* den Hilbert-Raum $L^2(\tau)$ auf einen maximalen abelschen Teilraum M aus $L^2(\mathfrak{G})$ ab. Umgekehrt existiert zu jedem maximalen abelschen $M \subset L^2(\mathfrak{G})$ ein Fundamentalmaß τ , für welches M als Bild von $L^2(\tau)$ auftritt. Diese Beziehung ist eineindeutig. [Ist \mathfrak{G} abelsch, so ist $\Gamma_a f \equiv 0$, also ist $L^2(\mathfrak{G})$ der einzige maximal abelsche Teil und das Fundamentalmaß auf E eindeutig bestimmt.] — Die Beweise dieser Sätze beruhen hauptsächlich auf der Darstellungstheorie und Reduktionstheorie separabler C^* -Algebren. Ist \mathfrak{A} eine separable C^* -Algebra mit Eins, so bestimmt ein positiv definites Funktional p bekanntlich eine zyklische Darstellung $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}(p)$ von \mathfrak{A} in einem Hilbert-Raum H_p . Die maximalen kommutativen Unterhalbgebren \mathfrak{R} der Kommutante $\mathfrak{A}(p)'$ von $\mathfrak{A}(p)$ entsprechen dann den verschiedenen Zerlegungen der Darstellung in irreduzible, bzw. den Zerlegungen von p in elementare Funktionale. $p(A) = \int (\lambda, A) d\pi(\lambda)$, wobei $\pi(\lambda)$ ein durch p und \mathfrak{R} bestimmtes endliches Maß auf dem Raum $E(\mathfrak{A})$ der elementaren positiven Funktionale auf \mathfrak{A} ist. Es ist bekannt, daß \mathfrak{R} und der Raum $L^\infty(E, \pi)$ kanonisch isomorph sind. Ist umgekehrt σ ein positives endliches reguläres Maß auf $E = E(\mathfrak{A})$, so ist durch $\hat{\sigma}(A) = \int (\lambda, A) d\sigma(\lambda)$ ein positives Funktional $s = \hat{\sigma}$ auf \mathfrak{A} definiert, zu dem wieder eine Darstellung $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}(s)$ von \mathfrak{A} gehört. Man kann dann in naheliegender Weise wieder eine Abbildung von $L^\infty(E, \sigma)$ auf eine Teilmenge $\mathfrak{F}(\sigma) \subset \mathfrak{A}(s)'$ definieren. σ heißt diagonal, wenn $\mathfrak{F}(\sigma)$ eine Algebra und diese Abbildung ein Isomorphismus ist. Der Verf. gibt verschiedene Kennzeichnungen für Diagonalmäße auf E , z. B.: Ein positives reguläres beschränktes Maß σ auf $E(\mathfrak{A})$ ist genau dann diagonal, wenn zu jedem $f \in L^2(\sigma) = L^2(E, \sigma)$ eine Folge $\{A_n\} \subset \mathfrak{A}$ existiert mit $\lim \hat{A}_n = f$ in $L^2(\sigma)$ und $\lim \hat{\sigma}(A_n^* A_n) = \int |f|^2 d\sigma$ ($\hat{A}(\lambda) = \lambda(A)$ für $\lambda \in E$). Der Zusammenhang zwischen den C^* -Algebren und der Gruppe \mathfrak{G} wird natürlich über die Darstellungstheorie der Gruppenalgebra $L^1(\mathfrak{G})$ hergestellt. Man erhält insbesondere: Ein nicht negatives reguläres endliches Maß π auf \mathfrak{G} ist dann und nur dann diagonal (ähnlich wie für Algebren definiert), wenn zu jedem $\varphi \in L^2(\pi)$ eine Folge $\{f_n\} \subset L^1(\mathfrak{G})$ existiert mit $\lim \hat{f}_n = \varphi$ (in $L^2(\pi)$) und $\lim \hat{\pi}(f_n^* \star f_n) = |\varphi|^2$. Ist π diagonal, auch $\psi \in L^2(\pi)$ und gehört die Folge $\{g_n\} \subset L^1(\mathfrak{G})$ entsprechend zu ψ , so gilt $\lim \widehat{g_n^* \star f_n} = \varphi \psi$ in der $L^1(\pi)$ -Norm. — Die Bemerkungen über Radonsche Integrale auf p. 152 und der Beweis zu Lemma 5. 1 scheint dem Ref. unverständlich. Im übrigen darf sich der Leser durch die schwerfällige Bezeichnungsweise (Faltungen werden fast immer explizit als Integrale geschrieben) und die zahllosen Druckfehler nicht von der Lektüre dieser schönen Arbeit abhalten lassen!

H. Leptin.

Ionescu Tulcea, Cassius: Fonctions de type positif. C. r. Acad. Sci., Paris 243, 1389—1392 (1956).

Die Theorie der Funktionen f von positivem Typ kann verallgemeinert werden: Als Definitionsbereich der f wird eine gewissen zusätzlichen Forderungen genügende lokalkompakte Unterhalbgruppe S einer lokalkompakten Gruppe G zugelassen. Ohne Beweis gibt Verf. eine Reihe von Sätzen an, die bekannten Resultaten der Theorie der Funktionen von positivem Typ auf G (s. R. Godement, dies. Zbl. 39, 258) entsprechen. Diese Sätze können wegen ihres umfangreichen Wortlauts hier nicht aufgeführt werden.

E. Schieferdecker.

Hewitt, Edwin and Herbert S. Zuckerman: The l_1 -algebra of a commutative semigroup. Trans. Amer. math. Soc. **83**, 70—97 (1956).

Les AA. inaugurent dans ce travail l'analyse harmonique sur un monoïde commutatif discret G . L'algèbre de Banach correspondante est naturellement l'algèbre $\mathcal{L}^1(G)$ avec la convolution définie par $(f * g)(x) = \sum_{uv=x} f(u)g(v)$ comme loi multiplicative. Les caractères $\neq 0$ de cette algèbre sont alors en correspondance biunivoque avec les „semi-caractères“ de G , i. e. les homomorphismes bornés et non identiquement nuls de G dans le monoïde multiplicatif des nombres complexes. L'algèbre $\mathcal{L}^1(G)$ est semi-simple si et seulement si l'ensemble \hat{G} des semi-caractères sépare les points de G (la démonstration de ce résultat par les AA. est très artificielle; leur th. 3. 4 est en fait une simple application du th. de Stone-Weierstrass: il suffit, avec leurs notations, d'appliquer ce dernier à l'espace compact X obtenu en complétant X pour la structure uniforme la moins fine rendant uniformément continues les fonctions de \mathfrak{S}). Ce critère conduit les AA. à une intéressante description générale des monoïdes commutatifs G : en premier lieu ils considèrent sur G la relation d'équivalence „ $\chi(x) = \chi(y)$ “ pour tout semi-caractère χ “ et montrent que la classe T_x de x pour cette relation est l'ensemble des $y \in G$ tels que $x y^n = y^{n+1}$ et $y x^n = x^{n+1}$ pour un entier $n > 0$ convenable. L'ensemble quotient G' de G par cette relation d'équivalence est naturellement muni d'une structure de monoïde commutatif pour laquelle les relations $xy = x^2 = y^2$ impliquent $x = y$; on a $\hat{G}' = \hat{G}$ et $\mathcal{L}^1(G')$ est semi-simple. La démonstration de ce dernier fait repose sur une seconde décomposition: sur G' la relation „ $\chi(y) = 0$ “ pour tout semi-caractère χ de G' tel que $\chi(x) = 0$ “ est de nouveau une relation d'équivalence; la classe H_x de $x \in G'$ pour cette relation est l'ensemble des $y \in G'$ pour lesquels il existe un entier $n > 0$ et deux éléments u, v de G' tels que $y^n = ux$ et $x^n = vy$. L'ensemble quotient G'' de G' par cette relation est encore un monoïde multiplicatif dans lequel cette fois tout élément est idempotent; en outre chaque H_x est un sous-monoïde dans lequel tout élément est régulier, ce qui permet de le plonger dans un groupe abélien H_x^0 ; de plus on peut définir de façon naturelle une structure de monoïde sur la réunion G_0 de tous les H_x^0 , induisant sur chaque H_x^0 et sur G' les structures déjà connues; les semi-caractères de G_0 sont alors ceux dont la restriction à G' est telle que $|\chi(x)| = 0$ ou 1 pour tout $x \in G'$. Il y a en général bien d'autres semi-caractères de G' comme le montrent les AA. par des exemples; en fait, l'absence de ces semi-caractères équivaut à la relation $G' = G_0$. Les AA. considèrent ensuite le problème de l'existence de l'élément unité de $\mathcal{L}^1(G')$, et montrent en particulier que $\mathcal{L}^1(G')$ a un élément unité si et seulement si \hat{G} (avec la topologie usuelle du spectre) est compact. Enfin ils étudient l'existence d'idempotents dans $\mathcal{L}^1(G')$ et la question de la connexité de \hat{G} , et le mémoire se termine par une série d'exemples variés.

J. Dieudonné.

Cotlar, Mischa: Über die algebraische Maßtheorie und den Satz von Hahn-Banach. Revista Un. mat. Argentina **17**, 9—24 (1956) [Spanisch].

Ist auf einer Teilmenge Y einer regulär geordneten kommutativen Halbgruppe $(H, +, \leq)$ mit 0 eine endliche reelle Funktion $f|H$ erklärt und ist ferner $p|H$ eine endliche unteradditive Funktion mit $p(0) = 0$, so ist für die Erweiterbarkeit von $f|Y$ zu einer auf der Halbgruppenthülle \bar{Y} von Y in H additiven gleichsinnig monotonen Funktion $\bar{f}|\bar{Y}$ mit $f \leq p$ auf \bar{Y} notwendig und hinreichend: (1) Aus $\sum x_i \leq \sum y_j + \sum z_k$ folgt $\sum f(x_i) \leq \sum f(y_j) + p(\sum z_k)$ für alle x_i, y_j, z_k aus Y . Um die Erweiterung auch über die Halbgruppenthülle hinaus mit Erfolg zu betreiben, führt Verf. die stärkere Bedingung ein: (2) Wenn $\sum x_i \leq \sum y_j + z$, dann ist $\sum f(x_i) \leq \sum f(y_j) + p(z)$ für alle x_i, y_j aus Y und z aus H , und sucht nach Erweiterungen auf Teilhalbgruppen $H(e)$ von H , $e \in H$, bestehend aus allen Elementen x von H , zu welchen existieren $m' \geq 0$, $n' \geq 1$, $z' \in H$ mit $m'e \leq n'x + z'$, oder auf Teil-

halbgruppen $H'(e)$, bestehend aus den Elementen x von H , für die $m'e \ll n'x$ und $x \ll m''e$ gilt mit geeigneten $m', m'' \geq 0$ und $n' \geq 1$. Bezeichnet man die Menge der Funktionen $f|Y$ mit $f(e) = \alpha$ und (2) mit $[Y, e \rightarrow \alpha, p|H]$, so wird (durch transfinite Induktion) folgender Satz bewiesen: Wenn $e \in Y \subset H(e)$ und $f \in [Y, e \rightarrow \alpha, p|H]$, so gibt es eine Erweiterung $f^*|H(e)$ von $f|H$ mit $f^* \in [H(e), e \rightarrow \alpha, p|H]$. Spezialisierungen dieses Satzes führen u. a. zum Hahn-Banachschen Satz, zu einem Satz von Tarski (dies. Zbl. 19, 54), zu Sätzen von J. von Neumann [Fundamenta Math. 13, 73—116, 333 (1929)] über invariante Maße und Maße auf Gruppen, zu Ergebnissen von R. Agnew und A. P. Morse (dies. Zbl. 19, 311), und darüber hinaus.

G. Aumann.

Willcox, Alfred B.: Note on certain group algebras. Proc. Amer. math. Soc. 7, 874—879 (1956).

Soient R_1, R_2 deux algèbres de Banach ayant pour normes, respectivement, p_1 et p_2 et soit $R_1 \times R_2$ leur produit tensoriel. Si $R_1 \times R_2$ est une algèbre normée pour une norme p et si $p(x_1 \times x_2) = p_1(x_1) p_2(x_2)$ pour $x_1 \in R_1, x_2 \in R_2$, on désigne par $R_1 \otimes R_2$ l'algèbre de Banach, complétée de $R_1 \times R_2$. Une algèbre de Banach R est une algèbre GS [A. B. Willcox, Pacific J. Math. 6, 177—192 (1956)] si: 1. l'ensemble $S(R)$ des idéaux bilatéraux, maximaux et réguliers, de R , muni de la „hull-kernel“ topologie est séparé; 2. tout point $M \in S(R)$ est contenu dans un ensemble ouvert dont l'adhérence a un noyau régulier. Les principaux résultats obtenus, par l'auteur, dans cette note sont les suivants: (I) Si G_1 et G_2 sont deux groupes localement compacts, on a $L^1(G_1 \times G_2) = L^1(G_1) \otimes L^1(G_2)$. (II) Si G_1 est compact et G_2 abélien, $L^1(G_1 \times G_2)$ est une algèbre GS. (III) Si G_1 est compact et G_2 abélien, l'ensemble des éléments $f \in L^1(G_1 \times G_2)$ tels que \hat{f} soit à support compact, est dense dans $L^1(G_1 \times G_2)$. (IV) Si G_1 est compact et G_2 abélien, tout idéal bilatéral, propre et fermé est contenu dans un idéal $M \in S(L^1(G_1 \times G_2))$.

C. T. Ionescu Tulcea.

Gottschalk, W. H.: Characterizations of almost periodic transformation groups. Proc. Amer. math. Soc. 7, 709—712 (1956).

Let the topological group T act as a transformation group on the compact space X . The following statements are pairwise equivalent: (1) T is almost periodic; (2) T is locally almost periodic on X and T is distal on X , i. e. for each pair $x, y \in X$ with $x \neq y$ there exists a vicinity α of the uniform structure of X such that $(xt, yt) \notin \alpha$ for all $t \in T$; (3) T is locally weakly almost periodic at every point of the diagonal of $X \times X$ and T is distal on X .

T. Ganea.

Grabar (Grabar), M. I.: On substitution for time in dynamical systems. Doklady Akad. Nauk SSSR 109, 250—252 (1956) [Russisch].

Grabar (Grabar), M. I.: On a sufficient test for isomorphism of dynamical systems. Doklady Akad. Nauk SSSR 109, 431—433 (1956) [Russisch].

Grabar (Grabar), M. I.: On the spectrum of harmonized dynamical systems. Doklady Akad. Nauk SSSR 109, 687—689 (1956) [Russisch].

Eine einparametrische Gruppe von Homöomorphismen S_t eines Kompaktums R auf sich heißt dynamisches System, t heißt Zeit, $\{S_t \hat{x}\}$ (für ein $\hat{x} \in R$) heißt eine Trajektorie. In den ersten beiden Noten werden Bedingungen für die Isomorphie (und damit für die Gleichheit der Spektren) zweier Systeme S_t und \tilde{S}_t angegeben, für deren Formulierung auf die Arbeiten selbst verwiesen werden muß. — In der letzten Note werden die Ergebnisse angewandt für zwei auf dem r -dimensionalen Torus $R: \{x_k: 0 \leq x_k \leq 2\pi\}$ definierte Systeme $dx_k/dt = \alpha_k, dx_k/d\tau = \alpha_k/F(x)$. Damit werden Resultate von Kolmogorov (dies. Zbl. 52, 319) für den Fall $r = 2$ auf beliebige r verallgemeinert.

D. Laugwitz.

• **Friedman, Bernard:** Principles and techniques of applied mathematics. (Applied Mathematics Series.) New York: John Wiley & Sons, Inc. London: Chapman & Hall, Ltd. 1956. IX, 315 p. \$ 8.00.

Das Buch gliedert sich auf in fünf Kapitel: Lineare Räume, Spektraltheorie der Operatoren, Greensche Funktionen, Eigenwertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen, Partielle Differentialgleichungen. Kapitel 1 behandelt der Reihe nach Definitionen des endlichdimensionalen und unendlichdimensionalen Vektorraumes, als Folgenraum betrachtet, die Einführung des Skalarproduktes, abstrakte Räume, Konvergenzdefinitionen, Vollständigkeit, lineare Unterräume, Darstellungen linearer Räume, Orthogonalisierung, lineare Funktionale, lineare Operatoren, Darstellungen von Operatoren als Matrizen und in allgemeinerer Form (unter Benutzung der von Dirac in seinem Buch „Principles of Quantum Mechanics“ eingeführten Symbolik), Inverse von Operatoren, Vollstetigkeit, adjungierte Operatoren, Vektorgleichungen, Operatoren mit abgeschlossenem Wertebereich. Kapitel 2 bringt Ausführungen über invariante Unterräume von Operatoren, vertauschbare Operatoren, Elementarteilerttheorie und Transformation auf die Jordansche Normalform für endlichdimensionale Operatoren, Eigenwerte von zueinander adjungierten Operatoren, charakteristische Gleichungen von n -dimensionalen Operatoren, selbstadjungierte und orthogonale Matrizen, unitäre und Hermiteische Matrizen, Hauptachsentransformation quadratischer Formen, simultane Hauptachsentransformation zweier quadratischer Formen, Funktionen von Operatoren, Spektraldarstellung und komplexe Integration, Behandlung von Differenzen- und Differentialgleichungen als Operatorengleichungen, Operatoren in unendlichdimensionalen Räumen, kontinuierliches Spektrum. In Kapitel 3 findet man zunächst eine Einführung der Diracschen δ -Funktion und allgemein sogenannter symbolischer Funktionen, der Laurent-Schwartzschen Distributionen. Es ist die elementare Theorie der Distributionen abgehandelt. Mit Hilfe von Integraloperatoren, deren Kern eine Distribution ist, wird die Inverse von Differentialoperatoren zunächst formal erklärt. Alsdann werden genauer Definitionsbereiche von Differentialoperatoren eingeführt, es wird die Adjungierte sowie der Hermiteische Operator und die Selbstadjungiertheit erklärt. Ferner folgt Definition der Greenschen Funktion als Lösung von $\Delta g = \delta(x - y)$. Verschiedene Beispiele von Greenschen Funktionen sind aufgezeigt. Es folgen Betrachtung von inhomogenen Randbedingungen, der verallgemeinerten Greenschen Funktion, der Greenschen Funktion des adjungierten Operators und endlich Anwendung auf Wellenausbreitung und Streuung. Das Kapitel 4 beginnt mit einigen Beispielen von Entwicklungen nach Eigenfunktionen regulärer Sturm-Liouvillescher Eigenwertprobleme; es wird dann das Ritzsche Verfahren diskutiert und die Relation zwischen Greenscher Funktion und Spektralzerlegung des Operators hergestellt. Es folgt ein Beispiel einer Integraldarstellung willkürlicher Funktionen nach den Eigenfunktionen eines singulären Sturm-Liouville-Problems, das Fouriersche Integraltheorem. Dann werden mehrfache Eigenwerte und mehrfache Pole der Greenschen Funktion betrachtet, und es folgt endlich etwas formale Störungstheorie für das diskrete und kontinuierliche Spektrum (an Beispielen). Endlich wird die Frage der Normierung der singulären Eigenfunktionen des kontinuierlichen Spektrums berührt. Das fünfte Kapitel enthält endlich Betrachtungen über die Greensche Formel und die Greensche Funktion für den Laplaceschen Operator Δ , ferner einiges über Separation der Variablen und ihre verallgemeinerte Betrachtung an vertauschbaren Operatoren. Die gewonnene Theorie ist auf spezielle Randwertprobleme angewandt. Insbesondere wird der Spektralsatz für einige separierbare Randwertprobleme des Operators $-\Delta$ diskutiert. Schließlich folgt Betrachtung eines Beispiels einer hyperbolischen Gleichung, der zweidimensionalen Wellengleichung. — Das Buch bemüht sich, den nicht mit Gedankengängen dieser Art vertrauten Lesern durch einfachste Formulierung aller Resultate und Beschränkung auf einfache Beispiele der wesentlichsten Begriffsbildungen entgegenzukommen. Wo es aus Gründen mathematischer Vollständigkeit notwendig war, kompliziertere Beweise zu bringen, wurden diese stets als Anhänge an die betreffenden Kapitel angeschlossen. Der Referent hat den

Eindruck, daß das Buch in der Lage ist, die diskutierten Gegenstände einem sehr weiten Kreis von Interessenten zugänglich zu machen. *H. O. Cordes.*

Sebastião e Silva, J.: *Le calcul différentiel et intégral dans les espaces localement convexes, réels ou complexes.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **20**, 743—750 (1956).

L'A. définit la différentielle de la fonction f au point x comme une opération linéaire L bornée sur une famille B d'ensembles bornés et telle que la différence $f(x+h) - f(x) - L(h)$ soit „un infiniment petit d'ordre supérieur à 1 par rapport à la famille B “. Ainsi définie, la différentiabilité conserve certaines propriétés de la différentiabilité au sens de Fréchet, mais, par exemple, n'implique pas la continuité de la fonction f . L'A. dit que la fonction f est totalement différentiable si elle est différentiable par rapport à la famille de tous les ensembles bornés. Dans des espaces particuliers, par exemple dans les espaces métrisables, cette définition peut être considérée la véritable généralisation de la différentielle de Fréchet. La notion de dérivée correspondante est liée à l'intégrale de ligne par la méthode utilisée par l'A. dans les espaces de Banach (ce Zbl. **45**, 379). — Remarque: une définition de la différentielle de Fréchet, qui conserve toutes les propriétés valables dans les espaces de Banach (en particulier la différentiabilité implique la continuité), a été donnée par le référent [Bull. math. Soc. Sci., Math. Phys. R. P. R., **1** (49), nr. 1, 77—86 (1957)].

G. Marinescu.

Fréchet, Maurice: *Le problème de l'existence d'un extremum local d'une fonctionnelle.* Ann. sci. Écol. norm. sup., III. Sér. **73**, 93—120 (1956).

Der Verf. gibt zunächst eine Ausführung der in einer früheren Note (dies. Zbl. **65**, 351) angekündigten Resultate. Sodann werden die in den Darstellungen der Analysis gemeinhin vernachlässigten Ausnahmefälle (cas douteux) ausführlich untersucht; ein solcher Fall liegt vor, wenn entweder das Infimum $m_n(y)$ oder das Supremum $M_n(y)$ der n -ten generalisierten Variation (genommen für alle Richtungen Δy in einem Punkte y) verschwindet und außerdem $m_\nu(y) = M_\nu(y) = 0$ für $\nu < n$. Neben dem Paritätsgrad von n sind hier entscheidend für das Vorliegen eines lokalen Extremums und für dessen Charakter das Verhalten der kritischen Geraden (in deren Richtungen die generalisierten Variationen der betr. Ordnung verschwinden), falls solche existieren, und die Vorzeichen der höheren generalisierten Variationen. Auch hier werden wieder verschiedene notwendige oder hinreichende Bedingungen angegeben. Als Beispiel wird der Fall eines Funktionals von zwei reellen Variablen behandelt.

D. Laugwitz.

Singer, Ivan: *Caractérisation des éléments de meilleure approximation dans un espace de Banach quelconque.* Acta Sci. math. **17**, 181—189 (1956).

If E is a real Banach space and G a linear subspace, then $q \in G$ is an element of closest approximation to $x \notin G$ if $\|x - q\| = \inf_{z \in G} \|x - z\|$. A necessary and sufficient condition for q to be such an element is the existence of a linear functional $f \in E^*$ for which (1) $\|f\| = 1$, (2) $f(z) = 0$ for all $z \in G$, (3) $f(x) = -\|q - x\|$. It is shown that this generalizes conditions previously obtained for certain special Banach spaces. When G is of finite dimension n , the functional takes the form of a convex mean of $h \leq n + 1$ non-opposed vertices of the unit sphere in E^* . This finite dimensional case is given an interpretation when $E = C(Q)$, the space of continuous functions on a compact Hausdorff space Q and G is generated by the elements x_1, \dots, x_n which form a Tchébychef system on Q . *J. E. L. Peck.*

Ehrenpreis, Leon: *Theory of distributions for locally compact spaces.* Mem. Amer. math. Soc. Nr. **21**, 80 p. (1956).

Soit R un espace localement compact dénombrable à l'infini et $\{D_i\} = D$ une famille dénombrable d'opérateurs linéaires définis dans l'espace des fonctions complexes continues sur R . On suppose les opérateurs D_i fermés, permutables et

ayant un caractère local. L.A. construit un espace $\mathcal{D}(D)$ par la méthode de L. Schwartz, en remplaçant les dérivations partielles mixtes par les produits finis $D_{i_1} D_{i_2} \cdots D_{i_k}$. Les fonctionnelles linéaires et continues sur $\mathcal{D}(D)$ sont appelées distributions sur R (par rapport à la famille D). Certains aspects de la théorie de L. Schwartz se conservent dans ce cadre. Par exemple, on construit par l'intermédiaire d'une mesure convenable sur R , une application i de $\mathcal{D}(D)$ dans son dual, telle que $i(\mathcal{D}(D))$ y soit dense. On définit les distributions à support compact, mais on montre par un exemple que la notion de support n'a pas de sens pour une distribution quelconque. On construit aussi les analogues des espaces S et S' en utilisant une fonction $|x|$ supposée définie sur R avec les propriétés du module. Sous certaines conditions concernant les fonctions propres des opérateurs D_i , on définit un produit de composition et la transformation de Fourier et on étend le théorème de Bochner sur les fonctions positivement définies.

G. Marinescu.

Sebastião e Silva, J.: Rectifications à l'article „Sur une construction axiomatique de la théorie des distributions“. Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A 5, 169—170 (1956).

Einige Ergänzungen und Berichtigungen zu der im Titel genannten Arbeit (dies. Zbl. 64, 358). Insbesondere wird für die Theorie der lokal konvexen Vektorräume auf eine Arbeit von A. Grothendieck (dies. Zbl. 58, 98) verwiesen, für die Theorie der Integration der Distributionen auf das Seminar von L. Schwartz aus dem Jahre 1953/54 und auf dessen Arbeit über differenzierbare Funktionen mit Werten in einem topologischen Vektorraum (dies. Zbl. 66, 96).

H. König.

Łojasiewicz, S.: Sur la valeur d'une distribution dans un point. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 4, 239—242 (1956).

Die vorliegende Note bringt einige Ergänzungen zu der vom Verf. (dies. Zbl. 65, 102) angegebenen Definition des Wertes einer auf der reellen Zahlengeraden definierten Distribution f in einem Punkte x_0 . U. a. wird behauptet: Wenn die Distribution f in jedem Punkte x_0 einen Wert $f_0(x_0)$ besitzt und die Funktion $f_0(x)$ summierbar ist, so gilt $f = f_0$. Zum Abschluß wird kurz die Verallgemeinerung der Begriffsbildung auf Distributionen des n -dimensionalen Raumes besprochen, die hier auf ein Festhalten aller oder einiger Veränderlicher hinausläuft. Beweise werden nicht gegeben, sie sollen in einer späteren Arbeit dargestellt werden.

H. König.

Gates jr., Leslie D.: Linear differential equations in distributions. Proc. Amer. math. Soc. 7, 933—939 (1956).

On considère, dans l'espace D' des distributions, l'équation $L(T) = p_0 T^{(n)} + p_1 T^{(n-1)} + \cdots + p_n T = S$, où les coefficients p_i sont des fonctions indéfiniment différentiables. Soit \bar{L} l'adjoint de L . L.A. donne une solution de l'équation $L(T) = S$, dans les hypothèses suivantes: a) \bar{L} admet un inverse \bar{L}^{-1} continu sur $\bar{L}(D)$; b) il existe m distributions T_1, \dots, T_m telles que $\varphi \in \bar{L}(D)$ si et seulement si $\langle \varphi, T_i \rangle = 0$, $i = 1, \dots, m$. La solution est alors donnée par la formule

$$\langle \varphi, T \rangle = \sum_{i=1}^m c_i a_i + \langle \bar{L}^{-1} \left(\varphi - \sum_{i=1}^m a_i \psi_i \right), S \rangle$$

où c_i sont des constantes arbitraires, $a_i = \langle \varphi, T_i \rangle$ et $\psi_i \in D$ sont telles que $\langle \psi_k, T_i \rangle = \delta_{ik}$ ($i, k = 1, \dots, m$). On donne un exemple où la condition a) n'est pas vérifiée.

G. Marinescu.

Mikusiński, J.: Über die Arbeiten der polnischen Mathematiker zur Theorie der verallgemeinerten Funktionen und zur Operatorenrechnung. Uspechi mat. Nauk 11, Nr. 6 (72), 169—172 (1956) [Russisch].

Słowikowski, W.: A generalisation of Mikusiński's operational calculus. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 4, 643—647 (1956).

Mit Hilfe einer Verallgemeinerung der Mikusińskischen Operatorenrechnung auf Funktionen $x(t)$ mit Werten in einem lokal konvexen Vektorraum X beweist

der Verf. einen allgemeinen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die Differentialgleichung

$$x^{(n)}(t) + A_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + A_n x(t) = y(t).$$

Hierin sind $x(t)$, $y(t)$ stetige Funktionen der reellen Variablen t mit Werten in X und A_1, \dots, A_n stetige lineare Abbildungen von X in sich. H. König.

Taylor, Angus E.: Extensions of a theorem of Hellinger and Toeplitz. *Math. Z.* **66**, 53—57 (1956).

Der Satz von Hellinger und Toeplitz [*Math. Ann.* **69**, 289—330 (1910)] besagt, daß eine Matrixabbildung des Hilbertschen Folgenraumes l^2 in sich stetig ist, wenn sie überhaupt existiert. Mit Hilfe des closed graph theorem („In B-Räumen ist eine lineare Abbildung T stetig, wenn aus $x_n \rightarrow x$ und $T x_n \rightarrow y$ folgt $y = T x$ “) wird das auf allgemeinere Banachsche Folgen- und Funktionenräume übertragen, bei denen die Koordinaten stetig sind (Theorem 1 und 2, vgl. Ref., dies. Zbl. **45**, 334; **46**, 120). Ebenso wird gezeigt, daß (bei linearen Operationen in linearen normierten Räumen) aus der Existenz der konjugierten Operation die Stetigkeit der Ausgangsoperation folgt (Théorem 5; N. Dunford, dies. Zbl. **19**, 416). Theorem 3 und 4 geben Aussagen über die Darstellung stetiger linearer Operationen in Räumen der oben beschriebenen Art und verallgemeinern damit Ergebnisse von Izumi-Sunouchi, *Proc. Imp. Acad. Tokyo* **19**, 169—173 (1943), und R. S. Phillips, dies. Zbl. **25**, 342. K. Zeller.

Sobolev, V. I.: On the splitting of linear operators. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **111**, 951—954 (1956) [Russisch].

Let E be a Banach space, E^* its adjoint space, and let H be a Hilbert space. Suppose that : (1) $E \subset H \subset E^*$; (2) the identical mappings of E into H and of H into E^* are continuous; (3) if $x \in E$ and $y \in H$ (and consequently $y \in E^*$), then $y(x)$ is the scalar product of x and y in H . The author examines linear operators A transforming E^* into E and introduces the notion of self-adjoint operators and of positive operators. He proves that each positive self-adjoint operator A transforming E^* into E can be extended to an operator \tilde{A} transforming E^{***} into E^{**} and this extension \tilde{A} is a superposition $\tilde{A} = B B^*$ where B maps H into E^{**} and the adjoint operator B^* maps E^{***} into H . — This theorem generalizes some earlier results of Krasnosel'ski (this Zbl. **47**, 359) and of Vajenberg (this Zbl. **64**, 117). R. Sikorski.

Butzer, Paul L.: Sur la théorie des demi-groupes et classes de saturation de certaines intégrales singulières. *C. r. Acad. Sci., Paris* **243**, 1473—1475 (1956).

Verf. betrachtet Semigruppen $T(\xi)$ ($\xi \geq 0$) von linearen Operatoren in einem B-Raum X [wo $T(0) = I$ und $T(\xi_1 + \xi_2) = T(\xi_1) \cdot T(\xi_2)$ sowie $\lim_{\xi \rightarrow 0} T(\xi) x = x$ für alle x]. Mit $D(A)$ bezeichnet er die Menge der x , für die $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} [T(\xi) x - x] = A x$ existiert. Satz 1: Für $x \in D(A)$ gilt $\|T(\xi) x - x\| \leq \xi \|A x\|$; bei schwach vollständigem X folgt umgekehrt $x \in D(A)$ aus $\|T(\xi) x - x\| = O(\xi)$. — Das ergänzt ein Ergebnis von E. Hille, *Functional Analysis and Semi-Groups* (dies. Zbl. **33**, 65), p. 323: Aus $\|T(\xi) x - x\| = O(\xi)$ folgt $T(\xi) x = x$. — Die Approximation von x durch $T(\xi) x$ ist also, abgesehen von invarianten x , niemals von der Ordnung $o(\xi)$; und Approximation $O(\xi)$ wird genau für $x \in D(A)$ erreicht. Im Anschluß an Favard (dies. Zbl. **36**, 204) drückt Verf. das so aus: $T(\xi)$ ist saturiert mit der Größenordnung $O(\xi)$, und $D(A)$ (mit Ausschluß der invarianten Elemente?) ist die zugehörige Saturationsklasse. Anwendungen betreffen das Abel-Poisson-Integral, angewandt auf Funktionen in $L_p(-\pi, +\pi)$ [Größenordnung $O(\log 1/r)$, Saturationsklasse mittels konjugierter Funktionen definiert], sowie das Gauß-Weierstraß-Integral und das Poisson-Integral in $L_p(-\infty, +\infty)$ [Größenordnung $O(\xi)$, Saturationsklasse mittels Ableitungen definiert bzw. gleich L_p]. K. Zeller.

Halberg jr., Charles J. A. and Angus E. Taylor: On the spectra of linked operators. Pacific J. Math. 6, 283—290 (1956).

If A and B are two sets, the relation $A < B$ will signify that: if C is any component of A , then $C \cap B \neq 0$. This article displays some conditions under which the preceding relation holds between the spectra of certain operators. Let X_1, Y_2 and Z be Banach spaces under the norms n_1, n_2 and N respectively, such that $0 \neq Z \subset X_1 \cap Y_2$ and $N = \max \{n_1, n_2\}$. Suppose throughout that T_1 and T_2 are bounded linear operators on X_1 and Y_2 respectively, with the property that $T_1 z = T_2 z \in Z$ for all z in Z (the operators are then said to be „linked“). Denote by $\sigma(T_x)$ the spectrum of T_x . Theorem: If Z is dense in X_1 , then $\sigma(T_1) < \sigma(T_2)$ whenever $(\lambda I - T_1)^{-1} z = (\lambda I - T_2)^{-1} z \in Z$ for all z in Z and all λ in the intersection of the resolvent sets of T_1 and T_2 . It is clear that the relation $A < B$ is antisymmetric over the family \mathcal{K} of all sets whose components are single points. Accordingly, if Z is dense in both X_1 and Y_2 , it follows that $\sigma(T_1) = \sigma(T_2)$ when both spectra belong to \mathcal{K} . Let T be the restriction of T_1 to Z ; then $\sigma(T) < \sigma(T_1) \cap \sigma(T_2)$. If moreover Z is dense in X_1 , then $\sigma(T_1) < \sigma(T)$. Suppose that $1 \leq r < s$, $X_1 = l_r$ and $Y_2 = l_s$; then $\sigma(T_1) < \sigma(T_2)$ and $\sigma(T_2) < \sigma(T_1)$ when T_1 and T_2 are defined by the same matrix. An identical conclusion holds when $1 < r \leq \infty$ and when T_2 is defined by the transposed of the matrix which defines T_1 . The author also gives an example of two linked operators with different spectra.

G. L. Krabbe.

Müller, P. H.: Zu einer Spektralbetrachtung von Atkinson und Sz.-Nagy. Acta Sci. math. 17, 195—197 (1956).

Atkinson, Charasow, Gochberg und Sz.-Nagy bewiesen folgenden Satz: V_1, \dots, V_n seien lineare vollstetige Operatoren eines Banachraumes; die Gleichung $(I + \lambda V_1 + \dots + \lambda^n V_n) f = 0$ besitzt dann nur für komplexe λ , die sich nicht im Endlichen häufen, Lösungen $f \neq 0$. Für diesen Satz wird ein neuer einfacher Beweis gegeben.

G. Köthe.

Krabbe, G. L.: Abelian rings and spectra of operators on l_p . Proc. Amer. math. Soc. 7, 783—790 (1956).

l_p ($p > 1$) bezeichne den Raum aller Folgen $c = (\dots, c_{-1}, c_0, c_1, \dots)$ mit $\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^p \right)^{1/p} < \infty$. Ist $A(x)$ eine beschränkte summierbare Funktion auf $[-\pi, \pi]$, so bezeichne ΦA die Folge (a_n) , $n = 0, \pm 1, \dots$, der Fourierkoeffizienten von A . Ordnet man A die Laurentmatrix (a_{n-r}) zu, so bedeutet die Anwendung von (a_{n-r}) auf $c \in l_p$ die Faltung $\Phi A * c = b$ mit $b_n = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} a_{n-r} c_r$, $n = 0, \pm 1, \dots$.

Stečkin (dies. Zbl. 35, 197) bewies, daß jeder Funktion A beschränkter Schwankung ein beschränkter Operator \tilde{A} in l_p mit $\tilde{A} c = \Phi A * c$ entspricht. Verf. beweist, daß die Zuordnung $A \rightarrow \tilde{A}$ ein Isomorphismus des Ringes \mathfrak{B} aller Funktionen beschränkter Schwankung auf einen abelschen Teilring $\tilde{\mathfrak{B}}$ des Ringes \mathfrak{G} aller beschränkten Operatoren auf l_p ist. Ist speziell A eine stetige Funktion, so ist das Spektrum $\sigma(\tilde{A})$ von \tilde{A} eine zusammenhängende Teilmenge des Spektrums $\sigma(A)$. Ist A analytisch und ist I die identische Funktion $I(x) = x$, so läßt sich \tilde{A} schreiben als $\tilde{A}(\tilde{I})$ im Sinn des Dunfordschen Operatorenkalküls und \tilde{A} besitzt keine Eigenwerte, falls A nicht konstant ist. Ist A analytisch und reellwertig, so ist das Spektrum von \tilde{A} gleich dem Wertebereich von A . Die Ergebnisse sind zum Teil Verallgemeinerungen klassischer Resultate von O. Toeplitz und F. Riesz für $p = 2$ auf beliebiges $p > 1$.

G. Köthe.

Landsberg, Max: Über das Spektrum symmetrisierbarer Endomorphismen in lokalkonvexen Räumen, insbesondere in Räumen vom Typ (ω) . Math. Z. 66, 58—63 (1956).

Es sei E lokalkonvex, E' der duale Raum. E heißt symmetrisierbar, wenn es eine antilineare Abbildung θ von E' in E gibt mit $\langle \theta u, u \rangle \neq 0$ für jedes $u \neq 0$ aus E' und $\langle \theta u, v \rangle = \overline{\langle \theta v, u \rangle}$ für alle $u, v \in E'$; $\langle x, u \rangle$ bedeutet dabei den Wert der Linearform u auf x . Symmetrisierbar sind z. B. alle E' mit $1 \leq r \leq \infty$ und die Räume vom Typus (ω) (vgl. G. Köthe, dies. Zbl. 31, 406). Ein stetiger Endomorphismus A von E heißt symmetrisierbar, wenn es ein θ der angegebenen Form gibt, für das überdies $\langle A \theta u, v \rangle = \langle A \theta v, u \rangle$ für alle $u, v \in E'$ gilt. Ist A symmetrisierbar, so ist jeder Eigenwert von A' reell und auch Eigenwert von A . Ist A überdies vollständig, so ist das Spektrum von A reell. Für symmetrisierbare Endomorphismen eines Raumes E vom Typus (ω) gilt überdies: Das kontinuierliche Spektrum von A ist stets leer. Ist E von abzählbarer stetiger Dimension, so ist das Spektrum von A nicht leer und besteht nur aus Eigenwerten; folgende drei Eigenschaften von A sind äquivalent: a) Das Spektrum von A ist reell, b) das Spektrum von A ist höchstens abzählbar, c) jeder Eigenwert von A ist auch Eigenwert von A' . G. Köthe.

Iochvidov, I. S. und M. G. Krejn: Spektraltheorie der Operatoren in Räumen mit indefiniter Metrik. I. Trudy Moskovsk. mat. Obsč. 5, 367—432 (1956) [Russisch].

Soient Π_- un espace hilbertien au produit scalaire $-(x_-, y_-)$ ($x_-, y_- \in \Pi_-$) et Π_+ un espace à un nombre fini χ de dimensions, considéré avec la métrique euclidienne (x_+, y_+) ($x_+, y_+ \in \Pi_+$). On appelle espace à métrique indéfinie Π_χ la somme directe de Π_- et Π_+ , dans laquelle on introduit à la fois la métrique indéfinie $(x, y) = (x_+, y_+) + (x_-, y_-)$ (où $x = x_+ + x_-$, $x_+ \in \Pi_+$, $x_- \in \Pi_-$) et la métrique hilbertienne $[x, y] = (x_+, y_+) - (x_-, y_-)$. Les AA. donnent aussi une description axiomatique de Π_χ , qui revient à la même chose. L'orthogonalité et les notions qui s'y rattachent sont définies par rapport à la métrique indéfinie, tandis que la topologie est introduite par $[x, y]$. Le but des AA. est d'exposer d'une manière systématique les résultats obtenus jusqu'à présent dans l'étude de ces espaces. Dans cette première partie on étudie, en suivant la théorie des espaces hilbertiens, la structure des espaces Π_χ , les propriétés générales des opérateurs hermitiens, autoadjoints, isométriques et unitaires, la transformation de Cayley, l'extension des opérateurs hermitiens et isométriques, les espaces invariants de dimension finie et les spectres des opérateurs autoadjoints et unitaires. La plupart des résultats sont dus à L. S. Pontrjagin et aux AA., et certains d'entre eux ont été publiés dans des travaux antérieurs, sous une forme moins générale. Parmi les résultats nouveaux, citons les théorèmes concernant l'extension des opérateurs hermitiens et isométriques, dont l'énoncé est le même que dans la théorie des espaces hilbertiens. G. Marinescu.

Brodskij, M. S.: Die charakteristischen Matrixfunktionen der linearen Operatoren. Mat. Sbornik, n. Ser. 39 (81), 179—200 (1956) [Russisch].

Verf. setzt frühere Untersuchungen (dies. Zbl. 56, 111) bei abgeschwächten Voraussetzungen fort. Sei A ein beschränkter linearer Operator des Hilbertschen Raumes H mit vollstetigem Imaginärteil $\text{Im } A$; E sei ein Unterraum von H , welcher den Bildbereich von $\text{Im } A$ enthält; mit e_1, \dots, e_r ($r \leq \infty$) bezeichne man eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von $\text{Im } A$ in E , $\omega_1, \dots, \omega_r$ seien die zugehörigen Eigenwerte. Sei Ω die aus den ω_α gebildete Diagonalmatrix und seien J, Π Matrizen mit $\Pi^* J \Pi = \Omega$; ferner J eine Diagonalmatrix mit einer Diagonale nur aus Zahlen gleich $+1$ oder gleich -1 ; schließlich Π vollstetig und so, daß aus $\Pi \xi^* = 0$ mit $\xi = \|\xi_1, \dots, \xi_r\|$, $\sum_{i=1}^r |\xi_i|^2 < \infty$ folgt $\xi = 0$; Matrizen J, Π dieser Art lassen sich zu Ω stets konstruieren. Die (nicht eindeutig bestimmte) komplexe Matrixfunktion

$$W(\lambda) = I - i \Pi \|(A - \lambda I)^{-1} e_\alpha, e_\beta\| \Pi^* J$$

heiße dann charakteristisch für A . Theorem 1: Eine Matrixfunktion $W(\lambda)$ ist genau dann charakteristisch für einen Operator, wenn (i) $W(\lambda)$ regulär in einem Bereich G ,

entstehend aus der vervollständigten komplexen Ebene durch Entfernung einer beschränkten Menge reeller Punkte und einer beschränkten Menge nicht-reeller Punkte ohne nicht-reellen Häufungspunkt; (ii) in einer Umgebung von ∞ ist $W(\lambda) = I + i T J 1/\lambda + \dots$ eine Entwicklung von $W(\lambda)$ nach negativen λ -Potenzen mit vollständigem, selbstadjungiertem und nicht-negativem T ; (iii) $W(\lambda) - I$ vollständig in G ; (iv) $W(\lambda) J W^*(\lambda) \geq J$ für λ aus G und $\text{Im } \lambda > 0$, Gleichheit für $\text{Im } \lambda = 0$. — Sei H_E der von den $A^n e_\alpha$ ($\alpha = 1, \dots; n = 0, \dots$) aufgespannte Unterraum, A_E die Spur von A auf H_E . Theorem 2: Sei $A^{(i)}$ Operator in $H^{(i)}$ und $W^{(i)}(\lambda)$ charakteristisch für $A^{(i)}$ ($i = 1, 2$); gilt dann $W^{(1)}(\lambda) = W^{(2)}(\lambda)$, so sind $A_{E_1}^{(1)}, A_{E_2}^{(2)}$ unitär-äquivalent. — Theorem 3: Ist $W(\lambda)$ charakteristisch für A und H_E gleich H , so besteht das Spektrum von A genau aus den singulären Punkten von $W(\lambda)$. — Sei H_0 Unterraum von H , P_0 Projektion auf H_0 , A in H definiert und $W(\lambda)$ charakteristisch für A ; für $A_0 = P_0 A$ auf H_0 ist $\text{Im } A_0$ vollständig und der Bildbereich von $\text{Im } A_0$ im von $P_0 E$ erzeugten Unterraum E_0 enthalten. Man bezeichne mit $e_1^{(0)}, \dots, e_{r_0}^{(0)}$ ($r_0 \leq \infty$) eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von $\text{Im } A_0$ in E_0 , setze $U_0 = \|(e_\alpha, e_\beta^{(0)})\|$ und $\Pi_0 = \Pi U_0$. Dann heißt

$$\text{Pr}_{H_0} W(\lambda) = I - i \Pi_0 \|(A_0 - \lambda I)^{-1} e_\alpha^{(0)}, e_\beta^{(0)}\| \Pi_0^* J$$

Projektion von $W(\lambda)$ auf H_0 , ist unabhängig von der Wahl der $e_\alpha^{(0)}$ und charakteristisch für A_0 . Theorem 5: Sind H_i Unterräume von H ($i = 1, 2$) und gilt $H_1 \subseteq H_2$, so auch $\text{Pr}_{H_1}(\text{Pr}_{H_2} W(\lambda)) = \text{Pr}_{H_1} W(\lambda)$. — Theorem 6: Gilt $H = H_1 \oplus \dots \oplus H_n$ und ist $H_1 \oplus \dots \oplus H_i$ ($i = 1, \dots, n-1$) invariant für A , so gilt $W(\lambda) = \text{Pr}_{H_n} W(\lambda) \dots \text{Pr}_{H_1} W(\lambda)$. — Anwendungen auf Operatoren in endlichdimensionalen Räumen: analog zum Theorem 1 werden die zugehörigen Matrixfunktionen gekennzeichnet; dabei ein neuer Zugang zu einem Satz von Potapov (dies. Zbl. 40, 354). — Sei $H = H_1 \oplus H_2$, A_i linearer Operator in H_i ($i = 1, 2$); ein Operator A in H mit $A = A_1 P_1 + A_2 P_2 + \Gamma$ heiße Kombination von A_1, A_2 , wenn P_i Projektion auf H_i ist ($i = 1, 2$) und $\Gamma H_1 = 0$, $\Gamma H_2 \subseteq H_1$ gilt. Theorem 8: Sei A_i definiert in H_i , $W_i(\lambda)$ charakteristisch für A_i und wie eingangs mit einer Matrix J_i konstruiert ($i = 1, 2$). Gilt dann $J_1 = J_2$, so existiert in $H_1 \oplus H_2$ eine Kombination A von A_1, A_2 , für die $W_2(\lambda) W_1(\lambda)$ charakteristisch ist, und mit $W(\lambda) = W_2(\lambda) W_1(\lambda)$ gilt $W_i(\lambda) = \text{Pr}_{H_i} W(\lambda)$ ($i = 1, 2$). W. Felscher.

Štraus (Strauss), A. V.: A formula of generalized resolvents for differential operator of an even order. Doklady Akad. Nauk SSSR 111, 773—776 (1956) [Russisch].

L'A. étend ses recherches sur les résolvantes généralisées aux opérateurs différentiels autoadjoints d'ordre pair. Il donne, sans démonstration, la formule générale de ces résolvantes, $R_\lambda f = \int_a^b K(x, s; \lambda) f(s) ds$, où la description du noyau K est trop longue pour être reproduite ici.

G. Marinescu.

Feller, William: On generalized Sturm-Liouville operators. Proc. Confer. Differential equations, Maryland 1955, 251—270 (1956).

Analog zur Theorie der klassischen Differentialoperatoren zweiter Ordnung, für Funktionen in einem Intervall $J =]a, b[$, wird eine Theorie allgemeiner linearer Differentialoperatoren Ω zweiter Ordnung (dies. Zbl. 64, 113) entwickelt. Unter der Annahme der lokalen Existenz zweier linear unabhängiger positiver Lösungen von $(*) \Omega w = 0$ überall in J leitet der Verf. zunächst aufs Neue und einfacher eine kanonische Darstellung von Ω in der Form $\Omega f = w^{-1} D_m (w^2 D_s (f w^{-1}))$ her, wobei w eine nullstellenfreie, unter Umständen komplexwertige Lösung von $(*)$ bedeutet, m und s monoton wachsen und s stetig ist. Unabhängig von der Wahl von w ist s bis auf eine lineare Transformation und m durch die Wahl von s eindeutig bestimmt. In der darauf folgenden Behandlung der Halbbeschränktheit von Ω nach oben in $L^2(m)$ muß die Ungleichung (5.3) durch die entgegengesetzte ersetzt werden.

Anschließend wird die Gleichung $\lambda u - \Omega u = 0$ betrachtet. Im Fall $\lambda > 0$ gibt es zwei positive, in jedem Intervall linear unabhängige Lösungen, von denen die eine samt ihrer Reziproken quadratisch integrierbar hinsichtlich m in der Umgebung von a ist und die andere entsprechend bei b . Das Randverhalten der Lösungen wird weiter untersucht in den Fällen der Weylschen Klassifizierung der Randpunkte (a bzw. b ist von Grenzkreistyp oder Grenzpunkttyp), und die schon früher [Commun. pure appl. Math. 8, 203—216 (1955)] behandelte Lösung von $\lambda F - \Omega F = f$ mit Hilfe Greenscher Funktionen wird fortgeführt. *K. Krickeberg.*

Vertgejm (Wertheim), B. A.: On the conditions for the application of Newton's method. Doklady Akad. Nauk SSSR 110, 719—722 (1956) [Russisch].

L'A. étend la méthode des tangentes à l'équation $P(x) = 0$, où P est une opération entre deux espaces de Banach, dont la dérivée satisfait à une condition de Hölder, $\|P'(x_1) - P'(x_2)\| \leq K \|x_1 - x_2\|^\alpha$ avec $0 < \alpha \leq 1$. Il obtient des évaluations du domaine d'application de la méthode en fonction de α , en généralisant les résultats de L. V. Kantorovič. *G. Marinescu.*

Pol'skij (Polsky), N. I.: On a general scheme in the application of approximate methods. Doklady Akad. Nauk SSSR 111, 1181—1184 (1956) [Russisch].

Verf. beschäftigt sich mit der Lösung von linearen Gleichungen $Kx = f$ unter Verwendung von Näherungen, die durch Projektion auf endlichdimensionale Räume gewonnen werden (Projektionsmethoden). Sei K ein linearer Operator, der den B -Raum E_1 in den B -Raum E_2 abbildet. Sowohl $\{K\psi_i\}$ (wo $\psi_i \in E_1$) als auch $\{q_i\}$ sei ein lineares vollständiges System in E_2 . (Vollständig: Linearkombinationen liegen dicht.) Ferner sei P_n ein Projektionsoperator ($P_n^2 = P_n$) von E_2 auf die lineare Hülle M_n der q_1, \dots, q_n . Mit L_n bezeichnen wir die lineare Hülle der $K\psi_1, \dots, K\psi_n$. Es gebe ferner (Bedingung A) ein C , so daß für große n gilt $\|y\| \leq C \cdot \|P_n y\|$ ($y \in L_n$). Unter diesen Voraussetzungen hat die Gleichung $P_n K x_n = P_n f$ für große n eine Lösung x_n und es gilt $\|K x_n - K x\| \rightarrow 0$. Existiert eine stetige Umkehrabbildung K^{-1} , so erhält man sogar Konvergenz von $x_n \rightarrow x$. Beim Beweis stützt sich Verf. auf frühere Arbeiten (dies. Zbl. 47, 113; 64, 120). Aus dem Ergebnis folgen durch Spezialisierung entsprechende Aussagen für die Methoden von Krylov, Petrov, Galerkin, Ritz und die der kleinsten Quadrate. (Vgl. G. I. Petrov, dies. Zbl. 24, 91; S. G. Michlin, Direkte Methoden der mathematischen Physik (Moskau 1950); dies. Zbl. 70, 121.) Ist Bedingung A verletzt, so kann man zu jedem K ein f finden, bei dem die Näherungslösungen nicht gegen die genaue Lösung konvergieren (vgl. Krasnosel'skij, dies. Zbl. 41, 71).

K. Zeller.

Slugin (Sluguin), S. N.: The use of a Chaplyguin method for an approximate solution of operator equations. Doklady Akad. Nauk SSSR 110, 739—741 (1956) [Russisch].

L'A. applique les résultats énoncés dans une note antérieure (ce Zbl. 64, 372) aux équations différentielles et intégrales. Par exemple, pour l'équation $y' - f(t, y) = 0$, $y(t_0) = \alpha$, il donne l'algorithme

$$y_{n+1} = \alpha e^{A(t_0-t)} + \int_{t_0}^t [A y_n(\tau) + f(\tau, y_n(\tau))] e^{A(\tau-t)} d\tau$$

où A est une constante telle que $\partial f / \partial y \geq -A$.

G. Marinescu.

Pugačev (Pugachev), B. P.: On two methods for an approximate calculation of eigenvalues and eigenvectors. Doklady Akad. Nauk SSSR 110, 334—337 (1956) [Russisch].

Es sei A ein positiv definit, beschränkter, selbstadjungierter Operator im reellen Hilbertschen Raum. Die untere Grenze des Spektrums λ_1 von A wird als Grenzwert der Zahlen $\mu_k = (A x_k, x_k) / (x_k, x_k)$ gefunden, wobei sich die Vektoren x_k

aus den Formeln

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(\Delta_k, \Delta_k)}{(A \Delta_k, \Delta_k)} \Delta_k \quad \text{oder} \quad x_{k+1} = x_k - 2 \frac{(\Delta_k, \Delta_k)}{(A \Delta_k, \Delta_k)} \Delta_k$$

bestimmen mit $\Delta_k = A x_k - \mu_k x_k$.

W. Schulz.

Sikkema, P. C.: On sum-equations. I, II. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 59, 411—421, 422—425 (1956).

I. Gegeben die homogene Perronsche Summengleichung $\sum_{\gamma=0}^{\infty} a_{\alpha\gamma} x_{\alpha+\gamma} = 0$ ($\alpha = 0, 1, 2, \dots$) mit einer h -parametrigen Minimallösung x_γ , für die also $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \sqrt[\gamma]{|x_\gamma|} = 0$. Verf. zeigt: Es genügt, den ersten $h+1$ Koeffizientendiagonalen $a_{\alpha 0}, \dots, a_{\alpha h}$ ($\alpha = 0, 1, 2, \dots$) geeignete zusätzliche Bedingungen aufzuerlegen — sie sind in Satz 1 explizit genannt —, damit für die h partikulären Minimallösungen x_γ die positiven, endlichen Größen- oder Wachstumsordnungen $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \sqrt[\gamma]{|x_\gamma|^{e_1}}, \dots, \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \sqrt[\gamma]{|x_\gamma|^{e_h}}$ mit $0 < e_1 \leq \dots \leq e_h$ zum Vorschein kommen. Diese Größen-

ordnungen erweisen sich als Nullstellenbeträge eines gewissen Polynoms $f(z)$, während sich die h Exponenten e_1, \dots, e_h als Steigungen der Seiten eines gewissen Puiseux-Polygons P ergeben. P und $f(z)$ sind in einfacher Weise aus den zusätzlichen Koeffizientenbedingungen bestimmbar (Methode von Perron; Verallgemeinerung eines Satzes von Kreuser). — II. Gegeben die inhomogene Perronsche Summengleichung $\sum_{\gamma=0}^{\infty} a_{\alpha\gamma} x_{\alpha+\gamma} = c_\alpha$ ($\alpha = 0, 1, 2, \dots$) mit $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sqrt[\alpha]{|c_\alpha|} = 0$. In Satz 2 (Satz 1 behandelte die homogene Summengleichung; s. o.) weist Verf. durch Aufspaltung in vier Unterfälle die Existenz einer Minimallösung $x_\alpha = \mu_\alpha \alpha!^{-\sigma}$ ($\sigma \geq 0$; $\alpha = 0, 1, 2, \dots$) von analogem Wachstumscharakter wie $c_\alpha = d_\alpha \alpha!^{-\sigma}$ nach. Satz 3 studiert diese vier Unterfälle, nach Hinzunahme der zusätzlichen Koeffizientenbedingungen aus Satz 1, wiederum mit der Perronschen Methode der Puiseux-Polygone. Bez. der formelmäßigen Einzelheiten muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden (gilt auch für Satz 1). Lit.: Kreuser, Paasche, Perron, Sheffer. I. Paasche.

Krishnaiah, P. V. and N. V. Subrahmanyam: On elementary symmetric functions. J. London math. Soc. 31, 364—369 (1956).

Es wird der Satz bewiesen, daß aus

$F[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3), f(x_1)f(x_2) + f(x_2)f(x_3) + f(x_3)f(x_1), f(x_1)f(x_2)f(x_3)] = 0$ folgt, daß $f(x)$ nur konstant sein kann und zwar auch für komplexe Funktionen und unter Bedingungen, die schwächer sind als die üblichen (s. z. B. G. H. Hardy, A course of pure mathematics, Cambridge 1945, p. 336), die aber hier wegen ihrer komplizierten Formulierung nicht wiedergegeben werden können. Die Verff. zeigen mit einem Gegenbeispiel, daß eine weitere plausibel erscheinende Abschwächung der Voraussetzungen nicht möglich ist. J. Aczél.

Praktische Analysis:

Perry, N. C. and J. C. Morelock: On the propagation of error by multiplication. Amer. math. Monthly 63, 177—179 (1956).

Während in der angewandten Mathematik die Analyse der Fehler, die im Ergebnis numerischer Berechnungen mit nur angenähert vorgegebenen Zahlenwerten auftreten, bislang zumeist die Betrachtung der möglichen Maximalfehler zum Gegenstand hatte, beschäftigen sich Verff. mit einer mehr statistische Aspekte aufweisenden Untersuchung der Zusammenhänge. Und zwar geht es darum, eine Verteilungsfunktion für die Wahrscheinlichkeit dafür zu entwickeln, daß ein Fehler bestimmter

Größe überschritten wird. Im wesentlichen sind diese Fragen, wie Verff. bemerken, bereits in Arbeiten von Householder (Principles of numerical analysis, dies. Zbl. 51, 346) und Inman (dies. Zbl. 38, 76), ferner von Rademacher (Proc. Symposium Large Scale Digital Calculating Machinery, 176—178, Cambridge Mass. 1948) und Goldstine und von Neumann (dies. Zbl. 43, 123) enthalten. In der vorliegenden Abhandlung wird an dem einfachen Beispiel einer Multiplikation zweier mit Fehlern behafteter Zahlen die Herleitung der Wahrscheinlichkeitsfunktion für den Ergebnisfehler ausführlich dargelegt.

G. Wünsche.

● **Couffignal, Louis: Résolution numérique des systèmes d'équations linéaires.** (Manuels de Calculs Techniques. Vol. II.) Paris: Gauthier-Villars 1956. III, 180 p., 9 fig. 2000 fr.

Cet ouvrage est un manuel destiné aux opérateurs qui résolvent des systèmes d'équations du premier degré à la main ou à la machine de bureau. Il expose, en formulant d'une manière très précise les règles d'exécution, la méthode des cracoviens. Des exemples traités complètement illustrent ces règles. Les difficultés qui peuvent se présenter par suite de la mauvaise condition de la matrice sont mises en évidence sur des cas précis.

J. Kuntzmann.

● **Šafarevič (Schafarewitsch), I. R.: Über die Auflösung von Gleichungen höheren Grades (Sturmsche Methode). Mit einem Anhang von H. Karl: Das Horner'sche Schema.** (Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik. Bd. 17.) Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1956. 29 S. DM 1,80.

Vgl. die Besprechung des russ. Originals in dies. Zbl. 56, 254.

Ostrowski, Alexander: Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale und die absolute Konvergenz von linearen Iterationsprozessen. Commentarii math. Helvet. 30, 175—210 (1956).

Nach einem ausführlichen, manche eingebürgerte Zuschreibung korrigierenden, historischen Überblick wird eine allgemeine Theorie der linearen Iterationsverfahren einschließlich Unter- und Überrelaxation gegeben unter Zugrundelegung des Begriffs der absoluten Konvergenz. In diesem Referat können nur die wichtigsten Begriffe und Sätze, nicht aber ihre Interpretation bzw. Spezialisierung auf bekannte Kriterien gebracht werden. — Begriffe und Bezeichnungen. Seien $A = (a_{\mu\nu})$ eine quadratische Matrix n -ter Ordnung mit nichtverschwindenden Diagonalelementen $A_{\nu} = a_{\nu\nu}$; $\xi = (x_{\nu})$, $\eta = (y_{\nu})$, \dots n -dimensionale Zeilenvektoren; $\xi_k = (x_{\nu}^{(k)})$ eine Iterationsfolge zur Lösung von $A \xi' = \eta'$ mit den Residualvektoren $A \xi'_k - \eta' = \rho'_k = (r_{\nu}^{(k)})$. Bei der Einzelschrittiteration unterscheiden sich ξ_{k+1} und ξ_k nur in einer Komponente mit dem „Leitindex“ N_k nach der Vorschrift $x_{N_k}^{(k+1)} - x_{N_k}^{(k)} = q_k \delta_k$, $A_{N_k} \delta_k = -r_{N_k}^{(k)}$, $0 < q_k < 2$. Wird N_k im Hinblick auf q_k gewählt, so liegt Relaxation vor, und zwar Unterrelaxation bei $q_k < 1$, Überrelaxation bei $q_k > 1$. Wird die Folge N_k periodisch ($N_k = k \pmod{n}$) vorgegeben, so wird von „zyklischer Steuerung“ gesprochen, bei beliebiger Vorgabe (aber so, daß jeder Index unendlich oft vorkommt) von „freier Steuerung“. Bei der Einzelschrittiteration in Gruppen werden entsprechend die Indizes $1, \dots, n$ bei jedem Schritt in zwei Gruppen („aktive“ und „passive“) aufgeteilt; die Rechenvorschrift lautet: $x_{\beta}^{(k+1)} = x_{\beta}^{(k)}$, $x_{\alpha}^{(k+1)} - x_{\alpha}^{(k)} = q_k^{(\alpha)} \delta_{\alpha}^{(k)}$, $A_{\alpha} \delta_{\alpha}^{(k)} + \sum_{\gamma \neq \alpha} a_{\alpha\gamma} \delta_{\gamma}^{(k)} = -r_{\alpha}^{(k)}$, $0 < q_k^{(\alpha)} < 2$, wobei α, γ die aktiven, β die passiven Indizes durchläuft. Ein Iterationsprozeß heißt „absolut konvergent“, wenn er bei beliebiger Wahl von ξ_1 und η konvergiert und konvergent bleibt, wenn die Elemente von A mit beliebigen Faktoren vom absoluten Betrag 1 multipliziert werden; in ein Kriterium für absolute Konvergenz können also nur die Beträge dieser Elemente eingehen. Eine Matrix mit positiven Diagonalelementen und nichtpositiven sonstigen Elementen heißt M -Matrix, wenn ihre Determinante positiv und die Determinanten aller ihrer Hauptminoren aller Ordnungen nicht-

negativ sind. A heißt H -Matrix, wenn die Matrix $(\varepsilon_{ik} | a_{ik}|)$ mit $\varepsilon_{ik} = -1$ bzw. $= 1$ für $i \neq k$ bzw. $i = k$ eine M -Matrix ist. Die Maximalwurzel σ_A der Matrix $(|a_{\mu\nu}|/|a_{\mu\mu}|) - E$ heiße Jacobische Konstante von A . Werden die Elemente von A mit verschiedenen nichtnegativen Zahlen ≤ 1 multipliziert, so wird das Ergebnis eine abgestumpfte Teilmatrix von A genannt. — Sätze. 1. Die Bedingung $\sigma_A < 1$ ist notwendig und hinreichend dafür, daß A eine H -Matrix ist. 2. Hat A in der Diagonale nur positive, sonst nur nichtpositive Elemente und konvergiert das zyklische Einzelschrittverfahren (mit $q_k = 1$) für jede Wahl des Ausgangsvektors ξ_1 , so ist A eine M -Matrix. 3. Sei A eine H -Matrix, t_1 eine beliebige positive Zahl < 1 , t_2 und t beliebige positive Zahlen mit $t_2 < (1 - \sigma_A)/(1 + \sigma_A)$, $\sigma_A < t < 1$. Dann konvergiert die Einzelschrittiteration und allgemeiner die Gruppeniteration bei freier Steuerung für jede Wahl von ξ_1 und η . Dabei ist auch die unvollständige Relaxation zugelassen mit folgenden Einschränkungen: $t_1 \leq q_k \leq 1 + t_2$ ($k = 1, 2, \dots$) bei Einzelschrittiteration, $|q_k^{(\alpha)} - 1| \leq t_2$ bei Gruppeniteration bzw. $t \leq q_k^{(\alpha)} \leq 1$, wenn nur Unterrelaxation zugelassen ist. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \tau_k$ mit $\tau_k = \sum_{\alpha} |r_{\alpha}^{(k)}|$ ist

konvergent. 4. Notwendig und hinreichend für die Konvergenz des Gesamtschrittverfahrens ist, daß A eine H -Matrix ist. 5. Die Matrix A mit positiven Diagonalelementen und nichtpositiven sonstigen Elementen habe eine Zerlegung $A = U + V$ in zwei abgestumpfte Teilmatrizen, wo U eine M -Matrix ist und V verschwindende Diagonalelemente hat. Dann folgt aus der Konvergenz des stationären linearen Iterationsprozesses $\xi'_{k+1} = H \xi'_k + (E - H) A^{-1} \eta'$ mit $H = -U^{-1} V$ bei beliebigem ξ_1 und η , daß A eine M -Matrix ist. 6. Die H -Matrix A besitze eine Folge von Zerlegungen $A = U_k + V_k$ in abgestumpfte Teilmatrizen, wobei die Determinante von U_k ungleich Null ist und die Diagonalelemente von V_k verschwinden. Dann konvergiert der Iterationsprozeß

$$\xi'_{k+1} = H_k \xi'_k + (E - H_k) A^{-1} \eta', \quad H_k = -U_k^{-1} V_k$$

und es gilt für jedes $\varepsilon > 0$: $|\xi_{k+1} - \xi_k| = O((\sigma_A + \varepsilon)^k)$, $k \rightarrow \infty$. — Aus diesen Sätzen ergibt sich insbesondere als notwendig und hinreichend für die absolute Konvergenz sowohl des Gesamtschritt- wie des zyklischen Einzelschrittverfahrens die Bedingung, daß A eine H -Matrix ist. Schließlich sei noch referiert der Satz 10: Die reelle Matrix A ist eine M -Matrix, wenn sowohl A^{-1} wie $(A + \lambda E)^{-1}$ für alle hinreichend großen λ lauter nichtnegative Elemente haben. J. Weissinger.

Fiedler, Miroslav und Vlastimil Pták: Über die Konvergenz des verallgemeinerten Seidelschen Verfahrens zur Lösung von Systemen linearer Gleichungen. Math. Nachr. 15, 31—38 (1956).

Es sei A eine nichtnegative, symmetrische Matrix und $E - A$ positiv definit. Das verallgemeinerte Seidelsche Iterationsverfahren zur Lösung von $(E - A)x = y$ läßt sich deuten als gewöhnliche Iteration $x_{n+1} = Wx_n + z$, wobei $W = (E - B)^{-1}(A - B)$, $z = (E - B)^{-1}y$ mit weitgehend willkürlicher Matrix B . Verff. untersuchen die Konvergenzgüte in Abhängigkeit von B , wobei ein Verfahren als um so besser gilt, je kleiner der größte Betrag $\lambda(A, B)$ der Eigenwerte von W ist, und beweisen hierzu den Satz: Aus $0 \leq B_1 \leq B_2 \leq A$ folgt $\lambda(A, B_2) \leq \lambda(A, B_1)$. Die Matrix M^Z entstehe definitionsgemäß aus der quadratischen Matrix M n -ter Ordnung durch Nullsetzen aller Elemente, deren Indizes nicht beide zu einer vorgegebenen, nichtleeren Teilmenge Z der natürlichen Zahlen von 1 bis n gehören. Unter der Voraussetzung $0 \leq B \leq A$ gilt dann $\lambda(A^Z, B^Z) \leq \lambda(A, B)$. Die beiden Sätze werden zu einem Vergleich verschiedener Spezialfälle des Seidelschen Verfahrens benutzt sowie zu einer Bemerkung über den Einfluß der Gebietsgröße bei der Lösung des Dirichletschen Problems durch Seidelsche Iteration der Differenzengleichungen. J. Weissinger.

Urabe, Minoru: Convergence of numerical iteration in solution of equations. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 19, 479—489 (1956).

Sei F ein vollständiger Teilraum des normierten linearen Raumes R und T ein auf F definiertes Funktional: $T(F) \subset R$, das einer Lipschitzbedingung $\|Tf_1 - Tf_2\| \leq K \|f_1 - f_2\|$, $K < 1$ genügt. Dann konvergiert bekanntlich die Folge $x_{n+1} = Tx_n$ gegen eine Lösung \bar{x} von $x = Tx$, wenn x_0 und x_1 sowie die Kugel $S\{h: \|h - x_1\| \leq K(1-K)^{-1} \|x_1 - x_0\|\}$ zu F gehören. Verf. untersucht das Verhalten der Folge $x_{n+1}^* = T^*x_n^*$, $x_0^* = x_0$, in der T^* ein T approximierendes Funktional auf F ist, das die bei der numerischen Rechnung auftretenden Abrundungs- und Verfahrensfehler enthält. Auf F sei $\|Tf - T^*f\| \leq (1-K)\delta$, und die δ -Umgebung U der Kugel

$$\Sigma\{h: \|h - x_1^*\| \leq K(1-K)^{-1} \|x_1^* - x_0\| + \delta\}$$

liege in F . Dann ist $S \subset \Sigma$ und mit x_n^* liegt auch x_{n+1}^* in U , so daß die Näherungsfolge gebildet werden kann. Von einem gewissen Index ab wird die Folge x_n^* entweder periodisch und unterscheidet sich dann von \bar{x} höchstens um δ ; andernfalls existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Index, von dem ab $\|x_n^* - \bar{x}\| < \delta + \varepsilon$ gilt und durch weitere Iteration die Näherung nicht verbessert werden kann. Bei einer reellen Gleichung $x = \varphi(x)$ läßt sich durch genügend große Rechengenauigkeit erreichen, daß x_n^* im Periodizitätsfall höchstens zwei verschiedene Werte annimmt.

J. Weissinger.

Nečepurenko (Nechepurenko), M. I.: On the convergence of approximate methods. Doklady Akad. Nauk SSSR 109, 704—706 (1956) [Russisch].

Für ein Iterationsverfahren (1) $x_{n+1} = x_n - \Delta(x_n)$ zur Auflösung der Gleichung $\varphi(x) = 0$ wird eine Restabschätzung hergeleitet, welche in folgender Weise auf der von Kantorovič (dies. Zbl. 31, 57) für das Newtonsche Verfahren angegebenen beruht. Der vorgelegten Gleichung wird die Gleichung $\psi(x) = 0$ zugeordnet, wobei $\psi(x)$ als Lösung der Differentialgleichung $\Delta(x) = \psi(x)/\psi'(x)$, d. h. in der Form $\psi(x) = c \cdot \exp\left(\int_{x_0}^x \frac{dx}{\Delta(x)}\right)$ gewonnen wird. Auf diese Gleichung wird das Newtonsche Verfahren angewendet. Ist dann

$$|\Delta(x_0)| \leq \eta_0 \quad \text{und} \quad [|1 - \Delta'(x)|/|\Delta(x)|^2] |\psi(x)| \leq K$$

für alle x , die der Bedingung

$$(2) \quad |x - x_0| \leq h_0^{-1} (1 - \sqrt{1 - 2h_0}) \eta_0$$

genügen, wobei $\eta_0^2 K = h_0 \leq \frac{1}{2}$, so führt die Methode (1) zu einer Wurzel x^* von $\varphi(x)$, welche der Bedingung (2) genügt; die Geschwindigkeit der Konvergenz ergibt sich aus der Ungleichung $|x_n - x^*| \leq (1/2^{n-1}) (2h_0)^{2^{n-1}} \eta_0$. H. Schwerdtfeger.

Ostrowski, Alexander: Über Verfahren von Steffensen und Householder zur Konvergenzverbesserung von Iterationen. Z. angew. Math. Phys. 7, 218—229 (1956).

Sei $\zeta = \varphi(\zeta)$ ein Fixpunkt der reellen Transformation $y = \varphi(x)$ sowie der beiden willkürlichen Funktionen $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2$). Nach Householder (dies. Zbl. 51, 346) bildet man zur Bestimmung von ζ statt der Iterationsfolge $x_{r+1} = \varphi(x_r)$ besser die Folge $y_{r+1} = \Phi(y_r)$ mit

$$\Phi(y) = [y\varphi_1(\varphi_2(y)) - \varphi_1(y)\varphi_2(y)]/[y - \varphi_1(y) - \varphi_2(y) + \varphi_1(\varphi_2(y))],$$

falls $\varphi'_i(\zeta) \neq 1$; der Spezialfall $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ wurde früher von Steffensen betrachtet. Verf. verschärft und verallgemeinert diese Resultate. Vorausgesetzt wird, daß je zwei Zahlen α_i und $\lambda_i > 1$ existieren, so daß die beiden Funktionen

$$E_i(y) = [\varphi_i(y) - \zeta - \alpha_i(y - \zeta)]/\varrho^{2^i}, \quad \varrho = |y - \zeta|$$

für $y \rightarrow \zeta$ beschränkt bleiben. Unter der weiteren Annahme $\alpha_i \neq 1$ gilt dann $\Phi(y) - \zeta = O(\varrho^2)$ und falls $\alpha_2 = 0$ sogar $\Phi(y) - \zeta = O(\varrho^{2^1 + \lambda_2 - 1})$; der Fall $\alpha_2 = 0$ ist der einzige, wo das Householdersche Verfahren eine bessere Konvergenzordnung liefern kann als das Steffensensche, wenn nämlich $\lambda_1 > \lambda_2$ ist. Das ergibt

sich u. a. aus den Sätzen, die ohne die Annahme $\alpha_i \neq 1$ formuliert werden, die aber etwas schärfere Voraussetzungen über $E_i(y)$ benötigen. *J. Weissinger.*

Bauer, Friedrich L.: Das Verfahren der abgekürzten Iteration für algebraische Eigenwertprobleme, insbesondere zur Nullstellenbestimmung eines Polynoms. *Z. angew. Math. Phys.* **7**, 17—32 (1956).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **67**, 94) hat Verf. die algebraischen Grundlagen einer auf die Lagrangesche Methode gegründeten Verallgemeinerung des Bernoullischen Iterationsverfahrens zur Nullstellenbestimmung eines Polynoms entwickelt. Nunmehr werden (abgesehen von einer — weniger der Praxis, als der besseren Einsicht dienenden — Verallgemeinerung auf Matrizeigenwertprobleme) vor allem Gesichtspunkte für die praktische Durchführung erörtert. Durch die auf einer gewichteten Summation beruhende „abgekürzte Iteration“ wird nicht nur quadratische Konvergenz, sondern auch eine Selbstkorrektur von Rundungsfehlern erreicht. Gegen Rechenfehler wird eine einfache Kontrollmöglichkeit gezeigt. Da das Verfahren keine wesentlichen Divisionen erfordert, ist es besonders für Polynome mit komplexen Koeffizienten geeignet. *J. Weissinger.*

Hestenes, Magnus R.: The conjugate-gradient method for solving linear systems. *Proc. Sympos. appl. Math.* **6**, 83—102 (1956).

Eine n -Schrittmethod zur Auflösung des (komplexen) linearen Gleichungssystems $Mx = k$ in n Unbekannten besteht in der Konstruktion von $n + 1$ Vektoren x_i ($i = 0, \dots, n$), also etwa $x_{i+1} = x_i + \alpha_i p_i$ (α_i Skalare, p_i Vektoren, x_0 beliebig), derart, daß $Mx_n = k$ gilt. Dabei wird verlangt, daß die p_i linear unabhängig sind. Verf. zeigt: Jede solche Methode läßt sich als „Verfahren konjugierter Richtungen“ ($c-d$ -method) deuten, d. h. es gibt eine positiv hermitesche Matrix N , so daß: 1. die Vektoren p_i bezüglich N konjugiert sind: $(p_i, N p_j) = 0$ für $i \neq j$, $(p_i, N p_i) > 0$, und 2. die α_i die Eigenschaft haben (die sie eindeutig bestimmt), daß die „Fehlerfunktion“ $E(x) = (r, H r)$ mit $r = k - Mx$, $N = M^* H M$ (M^* ist die konjugierte Transponierte von M) durch x_{i+1} minimisiert wird auf der Geraden $x_i + \alpha p_i$. Umgekehrt ist ein Verfahren konjugierter Richtungen stets auch eine n -Schrittmethod. — Die Methode konjugierter Gradienten ($c-g$ -method) ist ein Verfahren zur Konstruktion konjugierter Richtungen p_0, p_1, \dots , das abbricht, sowie p_m parallel p_{m-1} wird. Dann gilt $Mx_m = k$. Verf. verallgemeinert das bekannte Verfahren (siehe z. B. Hestenes-Stiefel, dies. Zbl. **48**, 99, oder auch Bodewig, *Matrix Calculus*, Amsterdam 1956) durch Einführung einer weiteren positiv hermiteschen Matrix K soweit, daß jedes System von n N -konjugierten Richtungen in dieser Weise erzeugt werden kann. — Schließlich zeigt Verf., daß seine Verallgemeinerung auch dadurch hergeleitet werden kann, daß man das frühere Verfahren auf das hermitesche Gleichungssystem $(L M^* H M) (L^{-1} x) = (L M^* H k)$ mit den Variablen $L^{-1} x$ anwendet. Dabei ist L eine hermitesche Matrix und $K = L^2$. — Die in der vorliegenden Arbeit entwickelte neue Version der $c-g$ -Methode liefert der numerischen Anwendung durch Spezialisierung von N und K eine Vielfalt von Rechenvorschriften. Verf. greift zwei derselben heraus, die er für besonders geeignet hält und deren numerische Vorteile in einem späteren Bericht untersucht werden sollen. *G. Beyer.*

Marcus, M.: On the optimum gradient method for systems of linear equations. *Proc. Amer. math. Soc.* **7**, 77—81 (1956).

Um ein lineares Gleichungssystem $\mathfrak{A} \mathfrak{x} = \mathfrak{b}$ (\mathfrak{A} quadratisch, nichtsingulär) zu lösen, kann man mit $\mathfrak{b} = \mathfrak{A} \mathfrak{x} - \mathfrak{b}$ die Form $\Phi(\mathfrak{x}) = \bar{\mathfrak{b}}' \mathfrak{A} \mathfrak{b}$ mit der positiv definiten Hermite-Matrix \mathfrak{A} betrachten, und von einem willkürlichen Anfangsvektor \mathfrak{x}_0 ausgehend das Minimum dieser Form und damit die Lösung des Gleichungssystems mit dem Gradientenverfahren nach folgender Vorschrift bestimmen: $\mathfrak{x}_{k+1} = \mathfrak{x}_k - \alpha_k \delta_k$ mit $\delta_k = \bar{\mathfrak{A}}' \mathfrak{A} (\mathfrak{A} \mathfrak{x}_k - \mathfrak{b})$. Die Bestimmung des optimalen α_k erfolgt

dadurch, daß $\Phi(x_k - \alpha_k \delta_k)$ in Abhängigkeit von α_k zum Minimum gemacht wird. Dabei ist die Wahl der Metrik willkürlich. Verf. führt eine allgemeine Metrik $\Re_\psi = \psi'(\mathfrak{A})\psi(\mathfrak{A})$ ein mit einer gewissen Matrizenfunktion ψ unter der Voraussetzung \mathfrak{A} hermitesch und positiv definit. Es werden Aussagen gemacht, unter welchen Voraussetzungen \Re_ψ genau wie \mathfrak{C} als Metrik verwendet werden kann. Ferner werden untere Schranken für α_ψ angegeben, die bequem aus den Elementen von \mathfrak{A} und mittels ψ berechnet werden können. Über die Größe α_ψ läßt sich die Güte der Konvergenz beurteilen.

H. Unger.

Fischbach, Joseph W.: Some applications of gradient methods. Proc. Sympos. appl. Math. 6, 59—72 (1956).

Der Verf. beschreibt zunächst die klassische Gradientenmethode zur Lösung von nichtlinearen und linearen Gleichungssystemen. Im linearen Fall bringt er auch noch die Methode der konjugierten Gradienten (M. R. Hestenes und E. Stiefel, dies. Zbl. 48, 99) und vergleicht die Eignung beider Methoden gegründet auf numerische Rechnungen mit der Ordvac-Maschine. Im zweiten Teil der Arbeit werden beide Methoden auf die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$(1) \quad R(x, y, y') = dy/dx - f(x, y) = 0$$

angewandt, indem das Funktional $J(y) = \int_0^1 R^2(x, y, y') dx$ minimal gemacht wird,

wobei geeignete Differenzen-Annäherungen für die Integrale und Ableitungen verwendet werden. Es ist eine originelle Idee, Gradientenmethoden so einzusetzen, weil für die Lösung von (1) doch die klassischen Methoden der Schrittintegration zur Verfügung stehen. Es wäre interessant festzustellen, ob etwa eine bessere numerische Stabilität den erhöhten Rechenaufwand rechtfertigt.

E. Stiefel.

Hart, William L. and Theodore S. Motzkin: A composite Newton-Raphson gradient method for the solution of systems of equations. Pacific J. Math. 6, 691—707 (1956).

Die Verff. entwickeln auf einem originellen und intuitiv-geometrischen Wege ein Iterationsverfahren zur Auflösung beliebiger Gleichungen (alles im Reellen), welches sich besonders für Rechenmaschinen eignet, das aber auch für sich betrachtet mathematisch sehr interessant ist und im Grunde die bekannte Newtonsche Regel zur näherungsweise Berechnung der Wurzel einer Gleichung $f(x) = 0$ auf ein System von k Gleichungen $f^{(j)}(x_1, \dots, x_n) = 0$ ($j = 1, \dots, k$) in n Unbekannten sinnvoll ausdehnt. Ist im Newtonschen Falle x eine Näherung, so liefert $y = x + \Delta x$ mit $\Delta x = -f(x)/f'(x) = -f(x)f'(x)/|f'(x)|^2$ bzw. auch (1) $y = x + \varrho \Delta x$ mit (2) $\Delta x = -f(x)f'(\xi)/|f'(\xi)|^2$ bei passenden $\varrho \neq 0$ und ξ eine Verbesserung (alle hier und im folgenden auftretenden Nenner als $\neq 0$ vorausgesetzt). Liegt nun ein System $f^{(j)}(x) = 0$ mit $x = 1$ -reihige Matrix (x_1, \dots, x_n) vor, so setzen die Verff. analog zu (1) und (2) an: (3) $\Delta^{(j)}x = -f^{(j)}(x) \text{ grad } f^{(j)}(\xi) / |\text{grad } f^{(j)}(\xi)|^2$ [$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ und η_1, \dots, η_k gegebene positive Gewichte], (4) $\Delta x = \sum_j^{1,k} \eta_j \Delta^{(j)}x$ und schließlich mit geeignetem $\varrho \neq 0$ (5) $y = x + \varrho \Delta x$. Durchlaufen ϱ und ξ je eine vorgegebene Folge $\varrho^{(m)}, \xi^{(m)}$, so hat man mit

$$(6) \quad \Delta^{(j)}(x^{(m+1)}) = -f^{(j)}(x^{(m)}) \text{ grad } f^{(j)}(\xi^{(m)}) / |\text{grad } f^{(j)}(\xi^{(m)})|^2$$

in (7) $x^{(m+1)} = x^{(m)} + \varrho^{(m)} \Delta x^{(m)}$ und $x^{(0)}$ als Ausgangswert das betreffende Iterationsverfahren. Dabei wird häufig $\varrho^{(m)} = \text{const} = \varrho$, $\xi^{(m)} = x^{(m)}$ und $\eta_1 = \dots = \eta_k = 1$ sein. — Es liege jetzt speziell das lineare nicht notwendig verträgliche System

$$f^{(j)}(x) = \sum_h^{1,n} x_h a_{hj} + b_j = 0 \quad \text{oder in Matrixschreibung} \quad (8) \quad xA + b = 0 \quad \text{vor}$$

$$(b = (b_1, \dots, b_k)). \quad r \text{ sei der Rang von } A, \quad \|x\|^2 = \sum_h^{1,n} x_h^2 \text{ das übliche Normenquadrat,}$$

und N die $k \times k$ -Diagonalmatrix mit der Hauptdiagonale $\sqrt{\eta_1}, \dots, \sqrt{\eta_k}$. Die linke Seite von (8) rechtsseitig mit N multipliziert ergibt (9) $x \mathbf{A} + \beta = 0$ ($(\alpha_{hj}) = \mathbf{A} = A N$, $\beta = b N$) und weiter (10) $\Delta x = -(x \mathbf{A} + \beta) \mathbf{A}'$ (\mathbf{A}' Transponierte von \mathbf{A}). $\mathbf{A} \mathbf{A}'$ ist eine symmetrische positiv semidefinite $n \times n$ -Matrix und daher orthogonal auf eine Diagonalmatrix $D = \mathbf{S} \mathbf{A}' \mathbf{A} \mathbf{S}'$ transformierbar mit der Hauptdiagonale $\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0$ ($\lambda_i > 0$, $1 \leq i \leq r$). Übergang zu einem neuen Bezugssystem mittels $x = z S$ ergibt für (10) dann (11) $\Delta z = -z D + \hat{\beta}$. Ist ψ der Unterraum, für den $\Delta x = 0$, also auch $\Delta z = 0$ ist, und \tilde{x} bzw. \tilde{z} irgendein Punkt von ψ , so ergibt sich in einem parallel um \tilde{z} verschobenen System mittels $z = u + \tilde{z}$ schließlich (12) $\Delta u = -u D$, und also im u -System die Rekursionsvorschrift (13) $u^{(m+1)} = u^{(m)} (E - \varrho D) = u^{(0)} (E - \varrho D)^{m+1}$, wenn $\varrho^{(m)} = \varrho$ ist (E die $n \times n$ -Einheitsmatrix). In $E - \varrho D$ lautet die Hauptdiagonale $\mu_1, \dots, \mu_r, 0, \dots, 0$, wo $\mu_i = 1 - \varrho \lambda_i$ ($1 \leq i \leq r$). Aus (13) folgt das Hauptresultat der Verff.: ist $\sigma_\varrho = \max_{1 \leq i \leq r} |\mu_i|$, so konvergiert die Folge $u^{(m)}$ dann und nur dann, wenn $\sigma_\varrho < 1$ ist; ist $\sigma_\varrho < 1$, so gilt $u^{(m)} \rightarrow \hat{u} = (0, \dots, 0, u_{r+1}^{(0)}, \dots, u_n^{(0)})$ und (14) $\|u^{(m)} - \hat{u}\| \leq \sigma_\varrho^m \|u^{(0)} - \hat{u}\|$; ist (15) $\hat{g}(u) = \|u \hat{\mathbf{A}} + \hat{\beta}\|^2$, wo $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{S} \mathbf{A}$, so ergibt die Ausrechnung $\hat{g}(u) = \sum_{h=1}^r \lambda_h u_h^2 + \|\hat{\beta}\|^2$, was zeigt, daß der Grenzwert \hat{u} jener Punkt aus dem Unterraum ψ ist, welcher im Sinne von (15) (Methode der kleinsten Quadrate!) dem Ausgangspunkt $u^{(0)}$ am nächsten liegt; ferner ist $\Delta u = -\frac{1}{2} \text{grad } \hat{g}(u)$. Dieses Ergebnis läßt sich natürlich sofort auf die x zurückübersetzen. Ferner wird bewiesen: damit $\sigma_\varrho < 1$ ist, ist notwendig, daß $0 < \varrho < 2r/\omega$, wo $\omega = \text{Spur von } D$, und hinreichend, daß $0 < \varrho \leq 2/\omega$ falls $r > 1$ bzw. $0 < \varrho < 2/\omega$, falls $r = 1$ ist; unter allen diesen σ_ϱ gibt es genau ein optimal kleinstes für $\varrho = \varrho_0$ mit $2/\omega < \varrho_0 < 2(r-1)/\omega$ falls $r > 2$ und $\varrho_0 = r/\omega$ falls $r \leq 2$ ist. Sind die $\varrho^{(m)}$ nicht konstant, jedoch $0 < \varrho^{(m)} < 2r/\omega$, so lautet die Hauptdiagonale der in (13) fungierenden Matrix jetzt $\mu_1^{(m)}, \dots, \mu_r^{(m)}, 1, \dots, 1$, wo $\mu_i^{(m)} = 1 - \varrho^{(m)} \lambda_i$ ($1 \leq i \leq r$); mit $\sigma^{(m)} = \max_{1 \leq i \leq r} |\mu_i^{(m)}|$, (15) $\sigma = \sup_{(m)} \sigma^{(m)}$ herrscht dann wieder Konvergenz, wenn $\sigma < 1$ ist. — Bei einem allgemeinen System $f^{(j)}(x) = 0$ ($x = (x_1, \dots, x_n)$; $j = 1, \dots, k$) beschränken sich die Verff. auf den Fall, daß die k „Flächen“ $f^{(j)}(x) = 0$ in einem gewissen konvexen Gebiet genau einen gemeinsamen Punkt \tilde{x} haben (streng gesprochen, ergibt sich diese Eindeutigkeit aus ihrem Beweis), was bedeutet, daß $k \geq n$ ist. Die Tangentialebenen an die Flächen $f^{(j)}(x) = 0$ seien $\varphi^{(j)}(x) = \sum_{h=1}^n (x_h - \hat{x}_h) a_{hj} = 0$. Wird dann in dem allgemeinen Iterationsverfahren $x^{(0)}$ genügend nahe an \hat{x} gewählt, so erhellt nach allem, daß wieder Konvergenz eintritt; dabei tritt an Stelle des σ_ϱ in (1) bzw. des σ in (16) ein Faktor θ mit $\sigma_\varrho < \theta < 1$ bzw. $\sigma < \theta < 1$. Im letzten Abschnitt zeigen die Verff., wie man auf derselben Grundlage auch einen durch implizite Gleichungen definierten Kurvenbogen $x = x(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) Punkt für Punkt über einem genügend feinen t -Raster berechnen kann, wenn der Ausgangspunkt $x(0)$ bekannt ist. Die Verff. wollen in weiteren Arbeiten ihre Methode auf Ungleichungen und auf Gleichungen im Komplexen ausdehnen.

E. Mohr.

Mendelsohn, N. S.: Some elementary properties of ill conditioned matrices and linear equations. Amer. math. Monthly 63, 285—295 (1956).

Verf. belegt das Vorkommen schlecht konditionierter Matrizen durch instruktive Beispiele und Hinweise und zeigt insbesondere, daß es bei der Auflösung von linearen Gleichungssystemen (deren Koeffizienten mit Abrundungsfehlern behaftet sind) mittels der inversen Matrix wesentlich sein kann, ob man die Linksinverse oder die Rechtsinverse benutzt. Denn für jedes $n \geq 2$ gibt es (n, n) -reihige Matrizen A und U

derart, daß UA beliebig wenig und AU beliebig stark von der Einheitsmatrix abweicht. Im ersten Fall ist U eine brauchbare (angenäherte) Linksinverse zu A oder A brauchbare Rechtsinverse zu U . Im zweiten Fall ist U eine unbrauchbare (angenäherte) Rechtsinverse zu A oder A unbrauchbare Linksinverse zu U . Je nachdem also A eine angenäherte brauchbare Linksinverse oder brauchbare Rechtsinverse besitzt, wird man $AX = B$ (X, B Spalten) durch $X = A^{-1}B$ lösen oder erst $X'A = B'$ bilden und X' berechnen. H. Rohrbach.

Akaike, Hirotugu: Monte Carlo method applied to the solution of simultaneous linear equations. Ann. Inst. statist. Math. **7**, 107—113 (1956).

The author shows that a system of linear algebraic equations can be reduced to a form $(I - S)x = c$, where S is a positive definite matrix (s_{ij}) with latent roots less than unity and with $\max_i \sum_j |s_{ij}| < 2$. A splitting technique is then applied to the solution of the reduced system. (For the concepts of the Monte Carlo model see for instance, the Symposium on Monte Carlo Methods, edited by H. A. Mayer this Zbl. **70**, 134). S. Vajda.

Akaike, Hirotugu: On optimum character of von Neumann's Monte Carlo model Ann. Inst. statist. Math. **7**, 183—193 (1956).

The optimum character mentioned in the title consists in that the technique conforms to certain characteristics which are stated to be desirable. S. Vajda.

Davis, P. and P. Rabinowitz: Some Monte Carlo experiments in computing multiple integrals. Math. Tables Aids Comput. **10**, 1—8 (1956).

Das Volumen V_n einer Kugel im n -dimensionalen Raum mit $\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1$ ist durch $V_n = 2\pi^{n/2}/(n \Gamma(n/2))$ gegeben. Mit der Monte-Carlo-Methode wurden für $n = 2(1)12$ und jeweils $N = 2^k \cdot 32$ Punkte mit $k = 0(1)10$ die auf den n -dimensionalen Einheitswürfel bezogenen Volumen $v_n = V_n/2^n$ berechnet und mit den exakten Werten verglichen. Die Pseudo-Zufallsfolgen wurden auf drei verschiedene Weisen erzeugt, wobei sich II und III nur durch die Wahl der Ausgangswerte unterscheiden. Methode I führte zu befriedigenden Ergebnissen, II und III werden wegen der Empfindlichkeit in den Ausgangswerten (II lieferte schlechte, III Ergebnisse etwa wie bei I) abgelehnt. — Für die Durchführung der Rechnung waren verschiedene Gründe maßgebend. Einmal sind in der Literatur nur wenige Ergebnisse über praktische Versuche mit der M.C.-Methode mitgeteilt. Weiter war aber auch zu untersuchen, ob die bereits bekannten Pseudo-Zufallsfolgen ohne weiteres auf ein n -Tupel übertragen werden können, um so eine entsprechende Folge in n -Dimensionen zu erhalten. Schließlich ist bekannt, daß zur Durchführung von Integrationen die Verwendung von gleichmäßig verteilten Zahlenfolgen (vgl. G. Pólya und G. Szegő, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Berlin 1925, S. 70) genügt bzw. vorzuziehen ist. Denn letztere weisen einen theoretischen Fehler der Ordnung $O(1/N)$ auf, erstere dagegen $O(1/\sqrt{N})$. Die Berechnung von $\int_0^1 x dx$ wurde mit beiden Zahlenfolgen durchgeführt, die bessere Konvergenz bei Verwendung gleichmäßig verteilter Zahlenfolgen ist augenscheinlich. Ferner wurde $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 e^{x_1 x_2 x_3 x_4} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$ mit gleichverteilten Zahlen berechnet. Auch hier tritt die Konvergenz mit $1/N$ zu Tage. In einer letzten Betrachtung wird darauf eingegangen, daß bei einer Integration gemäß $\int_V f(P) dv = V \sum_{j=1}^N \frac{f(P_j)}{N}$, d. h. bei Auswertung mit gleichen Gewichten, schlechte Ergebnisse zu erwarten sind. Steigerung der Genauigkeit durch passende Gewichte bzw. Gewichte und Abszissen. H. Unger.

Azbelev, N. V. and L. V. Tonkov: A theorem on the estimation of the error in an approximate solution of a differential equation. Doklady Akad. Nauk SSSR **111**, 515—516 (1956) [Russisch].

k durchlaufe im folgenden die Werte $0, 1, \dots, n-1$. Alle auftretenden Funktionen seien stetig in dem Gebiet des Raumes $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, das definiert ist durch die Ungleichungen $x_0 \leq x \leq X$, $a_k \leq y^{(k)} \leq b_k$. $y(x)$ sei Lösung der Gleichung $y^{(n)} = f[y] \equiv f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ mit $y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)}$. Die beiden Wertesysteme $y_1^{(k)}$ und $y_2^{(k)}$ mögen den Ungleichungen $a_k \leq y_1^{(k)} \leq y_2^{(k)} \leq b_k$ genügen, und mit zwei Funktionensystemen $p_k(x)$ und $q_k(x)$ mögen die Ungleichungen

$$\sum_{k=0}^{n-1} (y_2^{(k)} - y_1^{(k)}) p_k \geq f[y_2] - f[y_1] \geq \sum_{k=0}^{n-1} (y_2^{(k)} - y_1^{(k)}) q_k$$

bestehen. Schließlich sei $u(x)$ eine n -mal stetig differenzierbare Funktion mit $a_k \leq u^{(k)} \leq b_k$. Man setze nun $\varphi = u^{(n)} - f[u]$, $\eta = u - y$ und wähle $\bar{\varphi} \geq \text{Max}(0, \varphi)$, $\underline{\varphi} \leq \text{Min}(0, \varphi)$. Es sei $\bar{\xi}$ eine Lösung der Gleichung $\xi^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} p_k \xi^{(k)} + \bar{\varphi}$ mit $\bar{\xi}^{(k)}(x_0) \geq \text{Max}(0, \eta^{(k)}(x_0))$ und $\underline{\xi}$ eine Lösung von $\xi^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} q_k \xi^{(k)} + \underline{\varphi}$ mit $\underline{\xi}^{(k)}(x_0) \leq \text{Min}(0, \eta^{(k)}(x_0))$. Für das Intervall $x_0 \leq x \leq x^*$ sei der Čaplygin-sche Satz über Differentialungleichungen für die Gleichung $v^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} q_k v^{(k)}$ in bezug auf das Gebiet $x_0 < x < X$, $-\infty < v^{(k)} < \infty$ und die Anfangsbedingungen $v^{(k)}(x_0) = \eta^{(k)}(x_0) - \bar{\xi}^{(k)}(x_0)$ anwendbar (vgl. z. B. N. V. Azbelev, dies. Zbl. **70**, 126). Gelten dann für die Größen $\bar{z} = u - \bar{\xi}$ und $\underline{z} = u - \underline{\xi}$ die Ungleichungen $a_k \leq \bar{z}^{(k)} \leq b_k$, $a_k \leq \underline{z}^{(k)} \leq b_k$, so bestehen für $x_0 < x < x^*$ die Ungleichungen $\bar{z}^{(k)} < \eta^{(k)} < \underline{z}^{(k)}$. Als Beispiel wird die Gleichung $y'' = -e^x \sinh y$ mit $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ behandelt. W. Schulz.

Ostrovskij, G. M.: Graphische Integration einiger nichtlinearer Gleichungen der Schwingungstheorie. Vestnik Moskovsk. Univ. **11**, Nr. 5 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk 3), 25—30 (1956) [Russisch].

Zur graphischen Integration der Gleichung $d^2x/dt^2 + f_1(x) dx/dt + kx = 0$ mit $f_1(x) \neq 0$ wird zunächst $\tau = \sqrt{k}t$, $f(x) = f_1(x)/\sqrt{k}$ eingeführt, so daß die gegebene Gleichung übergeht in das System $dv/dx = -[f(x)v + x]/v$, $dx/d\tau = v$. Die Lösung wird dann in folgender Weise in der Phasenebene (x, v) konstruiert: Als erstes zeichne man in der (x, v) -Ebene die Kurve L mit der Gleichung $v = -x/f(x)$, die durch den Nullpunkt O geht. Um nun in einem Punkt A der (x, v) -Ebene die Richtung des Linienelementes der Integralkurve zu finden, ziehe man durch A die Parallele zur v -Achse. Sie schneide die Kurve L im Punkte B und die x -Achse im Punkte D . Der Punkt C sei der Schnittpunkt zwischen der Verbindungsgeraden BO und der Parallelen durch A zur x -Achse. Der Winkel CDA heiße α . Trägt man an AB in A den Winkel $90^\circ - \alpha$ nach der richtigen Seite an, so erhält man die Richtung des gesuchten Linienelements. Wiederholt man die Konstruktion für einen nahe bei A gelegenen Punkt des Linienelements, so ergibt sich eine Näherung für die Integralkurve. Die Betrachtungen lassen sich auf den Fall der Gleichung $d^2x/dt^2 + f(x) dx/dt + \varphi(x) = \psi(t)$ erweitern. W. Schulz.

Anisimov, V. V.: Über die Erregung biharmonischer Schwingungen in einem Generator mit zwei Freiheitsgraden. Vestnik Moskovsk. Univ. Ser. Mat. Mech. Astron. Fis. Chim. **11**, Nr. 1, 137—146 (1956) [Russisch].

Das vorliegende technische Problem führt auf eine nichtlineare Differentialgleichung der Gestalt

$$\sum_{i=0}^4 a_i \frac{d^i V}{dt^i} = \sum_{i=0}^4 b_i V^i$$

mit Konstanten a_i, b_i . Die Lösung wird in der Form

$$V = a(t) \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + b(t) \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

angesetzt, wobei $a(t)$ und $b(t)$ langsam veränderliche Amplituden seien. In der Ebene der Amplitudenquadrate ergibt sich dann angenähert die autonome Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B y (3x^2 + 6xy + y^2 - 4\beta x - 2\beta y + b_0)}{A x (x^2 + 6xy + 3y^2 - 2\beta x - 4\beta y + a_0)}.$$

Die Phasenkurven in der (x, y) -Ebene, besonders aber die stationären Punkte wie auch mehrere Parameterebenen werden ausführlich diskutiert und technisch ge-
deutet. W. Haacke.

Ivankov, A. G.: Zulässige Synchronisationsfrequenzen der Eigenschwingungssysteme zweiter Ordnung. Vestnik Moskovsk. Univ., Ser. Mat. Mech. Astron. Fis. Chim. **11**, Nr. 1, 147—149 (1956) [Russisch].

Das im Titel genannte Problem führt auf folgende Differentialgleichung: (1) $\ddot{u} + \varphi(u) \dot{u} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 F(t)$. Dabei ist ω_0 die Eigenkreisfrequenz des Stromkreises, $\varphi(u) = R/L - (M/LC) f'(u)$ mit $f(u) = I_a$, $\varphi(u) \bmod p$ periodisch bei $p \approx \omega_0$. Es werden u und F als Fourierreihen angesetzt und aus (1) die Energiegleichung gebildet, in der $\varphi(u)$ nicht mehr auftritt. Daraus ergibt sich bekanntlich eine Gleichung zwischen p^2/ω_0^2 und den Fourierkoeffizienten von $u(t)$. Hinweise wie verwandte Probleme ähnlich behandelt werden, schließen die Arbeit ab.

W. Haacke.

Lin, Hua: On the convergence of an iterative procedure in solving dynamic response problems. J. aeronaut. Sci. **23**, 391—393 (1956).

Um einen Einblick in die Tragweite ähnlicher in der Literatur vorgeschlagener Verfahren zu gewinnen, wird das exakt lösbare Problem $\xi'' + 2\zeta \xi' + \xi = 1$ (ζ konstant) mit der (auch bei der Iteration festgehaltenen) Anfangsbedingung $\xi(0) = \xi'(0) = 0$ iterativ nach der Vorschrift $\xi''_{n+1} + 2\zeta \xi'_n + \xi_n = 1$ mit der durch Nullsetzung von ζ sich ergebenden Anfangsfunktion $\xi_0 = 1 - \cos \tau$ gelöst; die ersten drei Näherungen werden für verschiedene Werte von ζ mit der exakten Lösung verglichen.

J. Weissinger.

Bolton, H. C. and H. I. Scoins: Eigenvalues of differential equations by finite-difference methods. Proc. Cambridge philos. Soc. **52**, 215—229 (1956).

In der Schrödinger-Gleichung für eine Dimension $[-d^2/dx^2 + V(x)]\psi(x) = \lambda \psi(x)$ mit Sturmschen Randbedingungen bei $x=0$ und $x=1$ oder speziell $\psi(0) = \psi(1) = 0$ sei $V(x)$ in $\langle 0, 1 \rangle$ beschränkt oder habe einen einfachen Pol an einem Intervallende. Mit Hilfe des gewöhnlichen Differenzenverfahrens (Maschenweite $h = 1/N$) werden angenäherte Eigenwerte $\Lambda(h)$ berechnet. Unter schwer nachprüfbareren Voraussetzungen über die Entwickelbarkeit der Lösungen gewisser Differenzengleichungen in Potenzreihen von h wird gezeigt: $\Lambda(h) = \lambda + v_2 h^2 + O(h^2)$, wobei v_2 unter Zusatzvoraussetzungen < 0 ausfällt. Der Schluß auf $\Lambda(h) < \lambda$ erscheint dem Ref. noch nicht gerechtfertigt. Es folgen: Verbesserung der Näherungswerte durch eine Extrapolation auf $h \rightarrow 0$, Berechnung der Differenzen-Eigenfunktionen mit Anbringen von Korrekturen durch höhere Differenzen und drei einfache quantenmechanische Beispiele.

L. Collatz.

Čečík (Chechik), V. A.: An approximate method of solving singular differential equations. Doklady Akad. Nauk SSSR **110**, 517—520 (1956) [Russisch].

Verf. konstruiert unter Anlehnung an Gedankengänge von S. A. Čaplygin obere und untere Näherungsfolgen zur Lösung des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen $y'_k = f_k(x, y_1, \dots, y_n)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) mit den Anfangsbedingungen $\lim_{x \rightarrow +0} y_k(x) = 0$. Dabei sollen die Funktionen f_k und ihre ersten Ableitungen nach allen Veränderlichen y_i ($i, k = 1, 2, \dots, n$) für $0 < x \leq b$, $|y_k| \leq a$ stetig sein; für $x = 0$ brauchen die f_k aber nicht beschränkt zu sein. Für die Differenz der

m -ten Näherungsfunktionen der beiden Folgen wird eine Abschätzung angegeben. Die gewöhnliche Picardsche Methode der sukzessiven Approximationen zur Lösung der Gleichungen ist nicht anwendbar, da hierbei Integrale von nicht notwendig integrierbaren Funktionen auftreten.

W. Schulz.

Friedmann, Norman E.: The truncation error in a semi-discrete analog of the heat equation. J. Math. Physics 35, 299—308 (1956).

Es sei $\mu = \mu(x, t)$ die Lösung der Aufgabe $\mu_{xx} = \alpha^{-1} \mu_t$; $\mu(0, t) = F$ ($= \text{const}$), $\mu(l, t) = \mu(x, 0) = 0$ und μ_h die Lösung der zugehörigen halbdiskreten Näherungsaufgabe, bei der die zweite Ableitung durch einen zentralen zweiten Differenzenquotienten zur Maschenweite $h = l N^{-1}$ ersetzt ist. Von der Fourierreihe für μ und der entsprechenden Summendarstellung von μ_h ausgehend wird eine Schranke für $|\mu - \mu_h|$ hergeleitet, welche nur von F , N und $\alpha t/l^2$ abhängt. Vergleich mit numerischen Ergebnissen.

J. Schröder.

Rose, Milton E.: On the integration of non-linear parabolic equations by implicit difference methods. Quart. appl. Math. 14, 237—248 (1956).

Verf. löst das Problem

$$u_{xx} = F(x, t, u, u_x, u_t), \quad t = 0: u = f_0(x),$$

$$x = 0: \alpha_1(t) u_x - \beta_1(t) u = f_1(t), \quad x = L: \alpha_2(t) u_x - \beta_2(t) u = f_2(t)$$

näherungsweise durch Übergang zum Differenzenproblem. Ist h die Maschenweite eines rechteckigen Gitters in der x -Richtung und k die Maschenweite in der t -Richtung, so wird gezeigt, daß die Lösung des Differenzenproblems für $h, k \rightarrow 0$ gegen die des Differentialproblems konvergiert. Voraussetzung für die Konvergenz ist, daß $k/h^2 = \lambda$ eine feste Zahl ist, die noch gewissen Beschränkungen unterliegt. Schließlich wird noch ein Iterationsverfahren zur Lösung des Differenzenproblems angegeben. Ein Zahlenbeispiel fehlt.

A. Weigand.

Douglas jr., Jim: On the relation between stability and convergence in the numerical solution of linear parabolic and hyperbolic differential equations. J. Soc. industr. appl. Math. 4, 20—37 (1956).

Verf. zeigt, daß für zahlreiche Differenzenverfahren zur Lösung parabolischer und hyperbolischer Differentialgleichungen mit zeitunabhängigen Koeffizienten aus der Stabilität des Differenzenverfahrens notwendig die Konvergenz im quadratischen Mittel (der finiten Lösung w gegen die Lösung u der Differentialgleichung bei Verkleinerung der Maschenweite) folgt. Werden die Werte von w in den N räumlichen Gitterpunkten im Zeitpunkt $t = n \Delta t$ zu einem Lösungsvektor w_n zusammengefaßt, so läßt sich die Differenzengleichung mit gewissen zeitunabhängigen Matrizen $A^{(i)}$ und einem die Randbedingungen enthaltenden Vektor b_n schreiben in der Form

$$(1) \quad A^{(1)} w_{n+1} = A^{(0)} w_n + A^{(-1)} w_{n-1} + \dots + A^{(-q)} w_{n-q} + b_n \quad (n \geq q),$$

wobei $A^{(1)}$ nichtsingulär ist. Der Fehler $v = u - w$ genügt derselben Gleichung, nur daß b_n durch den Finitisierungsfehler h_n ersetzt ist. Vorausgesetzt wird, daß die Matrizen $A^{(i)}$ ($i = 1, 0, \dots, -q$) ein gemeinsames System von N Eigenvektoren mit den Eigenwerten $\lambda_p^{(i)}$ ($p = 1, \dots, N$) haben. Die Gleichung (1) heißt stabil, wenn die Wurzeln ϱ_{pj} ($j = 1, \dots, q+1$, $p = 1, \dots, N$) alle vom Betrag ≤ 1 sind; im Falle mehrfacher Wurzeln vom Betrag 1 läßt dieser Stabilitätsbegriff ein Anwachsen einer Störung wie eine Potenz von n zu, was jedoch durch passende Wahl von Δt ausgeschlossen werden kann und soll. Das allgemeinste, verschiedene vorher behandelte Spezialfälle üblicher Differenzenverfahren umfassende Resultat lautet: Mit zwei positiven, von Δt unabhängigen Konstanten K, L gelte $|\lambda_p^{(1)}| \geq K (\Delta t)^\alpha$ ($p = 1, \dots, n$), $|\prod_{j \neq k} (\varrho_{pj} - \varrho_{pk})| \geq L (\Delta t)^\beta$ ($j = 1, \dots, q+1$; $p = 1, \dots, N$) und $\|v_n\| = O[(\Delta t)^{\tau+\beta}]$ ($n = 0, \dots, q$); $\|h_n\| = O[(\Delta t)^{\tau+\alpha+\beta+1}]$ ($n \geq q$), wo das Normzeichen den durch \sqrt{N} dividierten Vektorbetrag bedeutet. Ferner sei (1) stabil. Dann gilt gleichmäßig im ganzen Bereich $\|v\|_n = O[(\Delta t)^\tau + (\Delta t)^\beta]$. Falls

alle zweiten Ableitungen von u beschränkt sind, läßt sich eine analoge Abschätzung auch für das Integral über v^2 angeben.

J. Weissinger.

Minasjan, R. S.: Über die Lösung des Dirichletschen Problems von Gleichungen mit nicht-separierbaren Variablen für ein Rechteck. Akad. Nauk Armjan. SSR, Doklady 23, 145—152 (1956) [Russisch].

Die Lösung von $\partial^2 U / \partial x^2 + 2\alpha \partial^2 U / \partial x \partial y + \beta \partial^2 U / \partial y^2 = P(x, y)$ mit $\beta > \alpha^2$ im Rechteck $0 < x < b$, $0 < y < d$, wobei als Randwerte $U(x, 0) = S_0(x)$, $U(x, d) = S(x)$, $U(0, y) = T_0(y)$, $U(b, y) = T(y)$ vorgeschrieben sind, wird in der Form $U(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \sin \frac{k\pi y}{d}$ bzw. $U(x, y) = \frac{1}{2} \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \cos \frac{k\pi y}{d}$ angesetzt.

W. Schulz.

Minasjan, R. S.: Über eine Lösung des Dirichletschen Problems für einige polygonale Bereiche. Akad. Nauk Armjan. SSR, Doklady 22, 193—202 (1956) [Russisch].

Unter Erweiterung und Vereinfachung früherer Betrachtungen (dies. Zbl. 47, 342) wird die Lösung der Dirichletschen Gleichung $\partial^2 U / \partial x^2 + \partial^2 U / \partial y^2 = Q(x, y)$ für Gebiete, die sich aus Rechtecken mit achsenparallelen Seiten zusammensetzen, in Form von Fourierreihen konstruiert.

W. Schulz.

Davidenko, D. F.: On a difference method in solving Laplace's equation with axial symmetry. Doklady Akad. Nauk SSSR 110, 910—913 (1956) [Russisch].

Untersucht wird das achsensymmetrische Dirichletsche Problem für die Laplace'sche Gleichung $\Delta u = (1/r) \partial u / \partial r + \partial^2 u / \partial r^2 + \partial^2 u / \partial z^2 = 0$ für ein Gebiet G , wobei die Koordinate in Richtung der Symmetrieachse sei. G wird mit einem Netz überdeckt, dessen Gitterpunkte $\alpha_i = \alpha_i(r_0 + k_i, z_0 + l_i)$ seien. Zur Aufstellung der Differenzengleichungen wird angenommen, daß sich die Lösung $u(r, z)$ in der Umgebung des Punktes α_0 in der Form

$$u = a_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_{n-1,1} \Phi_{2n-1}(r, z) + a_{n0} \Phi_{2n}(r, z)]$$

darstellen läßt, wobei

$$\Phi_{2n-1} = \sum_{j=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^j F_{n-2j-1, 2j+1}(r, z), \quad \Phi_{2n} = \sum_{j=0}^{[n/2]} (-1)^j F_{n-2j, 2j}(r, z)$$

harmonische Funktionen sind und die Funktionen $F_{kl}(r, z)$ den Bedingungen

$$\frac{\partial^{v+\mu} F_{kl}(r_0, z_0)}{\partial r^v \partial z^\mu} = \begin{cases} 0 & \text{für } v \neq k; \mu \neq l; v = 0, 1, \dots, k+l; \mu = 0, 1, \dots, k+l-v; \\ 1 & \text{für } v = k; \mu = l \end{cases}$$

genügen. Die Koeffizienten $a_{n-1,1}$ und a_{n0} bestimmen sich aus den Beziehungen

$$\frac{\partial^{k+1} u(r_0, z_0)}{\partial r^{k-p} \partial z^{p+1}} = \sum_{n=1}^{k+1} a_{n-1,1} \frac{\partial^{k+1} \Phi_{2n-1}(r_0, z_0)}{\partial r^{k-p} \partial z^{p+1}},$$

$$\frac{\partial^k u(r_0, z_0)}{\partial r^{k-p} \partial z^p} = \sum_{n=0}^k a_{n0} \frac{\partial^k \Phi_{2n}(r, z)}{\partial r^{k-p} \partial z^p} \quad \left(\begin{matrix} k = 0, 1, 2, \dots; \\ p = 0, 2, 4, \dots, 2[k/2] \end{matrix} \right).$$

Die Funktionen Φ lassen sich durch Legendresche Polynome ausdrücken. Für ein quadratisches Netz mit 9 Gitterpunkten werden die Zahlenwerte für die Differenzengleichungen angegeben.

W. Schulz.

Budak, B. M.: On the straight line method for certain boundary problems. Doklady Akad. Nauk SSSR 109, 9—12 (1956) [Russisch].

Für Randwertaufgaben bei folgenden vier partiellen Differentialgleichungen werden Näherungslösungen durch Zurückführen auf Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen angegeben und die zugehörigen Fehler abgeschätzt:

$$u_{xy} = a(x, y) u + f(x, y), \quad u_{xy} = A(x, y, u),$$

$$\rho(x) u_{tt} = [\sigma(x) u_x]_x - q(x) u + f(x, t), \quad \rho(x) u_t = [\sigma(x) u_x]_x - q(x) u + f(x, t).$$

Z. B. erhält man für die Lösung von $u_{xy} = a(x, y) u + f(x, y)$ mit $u(x_0, y) = \varphi(y)$, $u(x, y_0) = \psi(x)$, $\varphi(y_0) = \psi(x_0)$ ($x_0 \leq x \leq X$, $y_0 \leq y \leq Y$) Näherungswerte auf den Geraden $x = x_k = k h$, $(n+1) h = X - x_0$, $k = 1, 2, \dots, n$, durch Lösen der Gleichungen $u'_{k+1}(y) = u'_k(y) + h a_k(y) u_k(y) + h f_k(y)$ ($y_0 \leq y \leq Y$, $k = 0, 1, \dots, n-1$) mit $a_k(y) = a(x_k, y)$, $f_k(y) = f(x_k, y)$ und den zusätzlichen Bedingungen $u_k(y_0) = \psi(x_k)$, $u_0(y) = \varphi(y)$. Wenn $a(x, y)$ und die Ableitungen $u_x, u_y, u_{xy}, u_{xxy}$ der Lösung $u(x, y)$ der gegebenen Randwertaufgabe in dem Rechteck $D = (x_0 \leq x \leq X, y_0 \leq y \leq Y)$ stetig sind und wenn $\max_D |u_{xxy}| \leq 2 M_3$, $\max_D |a(x, y)| = a^*$ gilt, dann besteht die Fehlerabschätzung

$$|u(x_k, y) - u_k(y)| \leq (M_3 h/a^*) (e^{a^*(X-x_0)(y-y_0)} - 1). \quad W. Schulz.$$

Budak, B. M.: Über die Methode der Geraden für gewisse Randwertaufgaben. Vestnik Moskovsk. Univ., Ser. Mat. Mech. Astron. Fis. Chim. **11**, Nr. 1, 3—11 (1956) [Russisch].

Ausführliche Behandlung der im vorstehenden Referat genannten Aufgaben. W. Schulz.

Mel'nik, S. I.: Oszillierende Funktionen und einige Anwendungen auf Probleme der mathematischen Physik. Mat. Sbornik, n. Ser. **38 (80)**, 465—478 (1956) [Russisch].

Die Funktion $f(P)$ sei im beschränkten Gebiet Ω definiert, und $|f(P)|^p$ ($p > 1$) sei summierbar in Ω . $f(P)$ heiße oszillierend von der Ordnung m , wenn es eine Zerlegung Γ von Ω in punktfremde Teilmengen Ω_i , $i = 1, \dots, N$, gibt, so daß

$$\int_{\Omega_i} f(P) \Pi^m(P) d\omega_P = 0$$

ist für $i = 1, \dots, N$ und alle Polynome $\Pi^m(P)$ des Grades $\leq m$. Es werden Abschätzungen für $\left| \int_{\Omega} F(P) f(P) d\omega_P \right|$ abgeleitet, wenn $F(P) \in [L_q]$, $1/p + 1/q = 1$ und $f(P)$ eine oszillierende Funktion ist. Diese Abschätzungen werden angewandt (a) zur Fehlerabschätzung bei Näherungslösungen linearer Integralgleichungen, (b) zur Fehlerabschätzung beim Anfangswertproblem der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$, wenn die Näherungslösung nach der Methode der oszillierenden Funktionen bestimmt wird, (c) zur Abschätzung der Deformationen bei einem Problem der Elastizitätstheorie (isotropes Medium, Belastungen des Randes, die statisch äquivalent null sind, Fehlen von Massenkraften). W. Thimm.

Mikeladze, Š. E.: Quadraturformeln für eine reguläre Funktion. Soobšćenija Akad. Nauk Gruzinskoj SSR **17**, 289—296 (1956) [Russisch].

Das Integral über eine reguläre Funktion $f(z)$ wird unter Heranziehung der Lagrangeschen Interpolationsformel als lineare Funktion vorgegebener Funktionswerte $f(z_\nu)$ berechnet und ein allgemeiner Ausdruck für die Koeffizienten dieser Darstellung abgeleitet. Durch geschickte Vorwahl einiger der Interpolationsstellen z_ν und einiger der Koeffizienten in dieser Darstellung lassen sich die übrigen bestimmen und verschiedene Quadraturformeln gewinnen. So ergeben sich u. a. bekannte Näherungsformeln (H. E. Salzer, dies. Zbl. **39**, 342; G. Birkhoff and D. Young, dies. Zbl. **39**, 342; D. Young, dies. Zbl. **46**, 132). Weiterhin werden Näherungsformeln entwickelt mit Interpolationsstellen auf einem Abschnitt der reellen Achse, im Zentrum und in den Eckpunkten regelmäßiger Vielecke und Formeln mit reellen Koeffizienten. Abschließend folgt ein Beispiel mit Interpolationsstellen in t_ν ($\nu = 0, 1, \dots, 8$), den Wurzeln von $t(t^4 - 1)(t^4 - 16) = 0$:

$$\int_{-H}^H f(z) dz = \frac{H}{37800} \{ 60060 f(0) + 10432 [f(-H) + f(H)] - 67 [f(-2H) + f(2H)] \\ - 2648 [f(-iH) + f(iH)] + 53 [f(-2iH) + f(2iH)] \},$$

gültig für alle Polynome mit $n \leq 9$.

G. Feldmann.

Mikeladze, Š. E.: Näherungsformeln für ein mehrfaches Integral von einer regulären Funktion. Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoj SSR 17, 577—584 (1956) [Russisch].

Verf. wendet die in seiner vorstehend referierten Arbeit gewonnenen Formeln an zur Berechnung eines mehrfachen Integrals über $f(z)$ als linearer Funktion der Funktionswerte $f(z_\nu)$. Durch geeignete Wahl der Interpolationsstellen ergeben sich zur numerischen Berechnung brauchbare Formeln. Es wird die Anwendung der gewonnenen Ergebnisse zur numerischen Integration von Differentialgleichungen $w' = f(z, w)$ und $w'' = f(z, w, w')$ auseinandergesetzt und schließlich ein für die Integration von Gleichungen $w'' = f(z, w)$ besonders geeignetes System von Näherungsausdrücken angeführt. *G. Feldmann.*

Krylov, V. I.: Approximate evaluation of integrals in the case of rapidly oscillating factors in the integrand. Doklady Akad. Nauk SSSR 108, 1014—1017 (1956) [Russisch].

Die Quadratur schnell oszillierender Funktionen wird für den Spezialfall behandelt, daß sich der Integrand als Produkt einer hinreichend glatt verlaufenden Funktion f und einer schnell oszillierenden g darstellen läßt, welche in eine Summe $g = \psi + \varphi$ zerlegt wird mit glattem ψ und oszillierendem φ mit „schneller“ jedoch „geringer“ Schwankung um Null. Es wird ein bequem zu quadrierender Hauptteil von einem Rest mit geringem Anteil und oszillierendem Integranden abgesondert. Mit letzterem analog verfahren wird im Ergebnis schrittweise die Darstellung

$$\int_a^b f g dx = c_0 \int_a^b f dx + \sum_{k=1}^{n-1} c_k [f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)] + \int_a^b f^{(n)} g_n dx$$

mit der rekurrenten Koeffizienten- und Restgliedbestimmung $g_0(x) = g(x)$,

$g_k(x) = \int_a^b [c_{k-1} - g_{k-1}(t)] dt$, $c_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b g_k dx$ gewonnen. Mit Hilfe Bernoullischer Polynome und deren Fourierreihenentwicklung wird außerdem eine explizite Darstellung hergeleitet mit einer Restgliedabschätzung

$$\left| \int_a^b f^{(n)} g_n dx \right|^2 \leq \int_a^b [f^{(n)}]^2 dx \cdot \int_a^b g_n^2 dx$$

für Funktionen der Klasse $f^{(n)} \in L_2$. Besonders übersichtlich wird die Restgliedabschätzung für eine in $[a, b]$ periodische Funktion g . *G. Feldmann.*

Luke, Yudell L.: Evaluation of an integral arising in numerical integration near a logarithmic singularity. Math. Tables Aids Comput. 10, 14—21 (1956).

Die Koeffizienten $\gamma_{jr}^{(n)}$, die in der Beziehung

$$I = \int_0^{rh} x^{-1} dx \int_0^x f(u) du = \frac{rh}{D_n} \sum_{j=0}^n \gamma_{jr}^{(n)} f_j + R_{nr}$$

auftreten, werden für $n = 1(1)10$ und $r = 1(1)n + 1$ mitgeteilt, wobei $D_n =$

$\sum_{j=0}^n \gamma_{jr}^{(n)}$ von r unabhängig ist. Damit ist $I_1 = \int_0^y f(x) \log x dx$ berechenbar,

da mit $I_2 = \log y \int_0^y f(x) dx$ gilt: $I = -I_1 + I_2$. I_2 kann aber mit den herkömmlichen Methoden berechnet werden. Die Ermittlung des Restgliedes $R_{nr} =$

$\int_0^c G_{nr}(s) f^{(n+1)}(s) ds$ mit $c = \max(nh, rh)$ erfolgt nach Milne (W. E. Milne, Numerical calculus, Princeton 1949, p. 108—116). Genauere Untersuchungen befassen sich mit der Definitheit von $G_{nr}(s)$, die für das Restglied die Darstellung $R_{nr} = E_{nr} f^{(n+1)}(\xi)$ mit $E_{nr} = \int_0^c G_{nr}(s) ds$ zuläßt. Dabei wird die

Arbeit von W. Barrett (vgl. dies. Zbl. 47, 115) herangezogen. Schließlich folgt eine kritische Gegenüberstellung zur Arbeit von E. L. Kaplan (vgl. dies. Zbl. 46, 132).

H. Unger.

Moran, P. A. P.: The numerical evaluation of a class of integrals. Proc. Cambridge philos. Soc. 52, 230—233 (1956).

Aus der leicht beweisbaren Identität

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \{P(ax)\}^n dx = \sqrt{\pi} (2\pi)^{-n/2} \sqrt{|A|} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{y}' A \mathbf{y} \right\} dy_1 \dots dy_n,$$

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \int_0^{\infty} \exp \left(-\frac{1}{2} t^2 \right) dt$$

mit n -spaltigem Zeilenvektor $y = (y_1, \dots, y_n)$, $n \times n$ -Covarianzmatrix seiner Komponenten

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} l & m & \dots & m \\ m & l & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ m & \cdot & \dots & l \end{pmatrix}$$

und Korrelationen $\varrho = m/l = a^2/(2 + a^2)$ folgt die Möglichkeit, das Integral

$$\int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

über jede n -dimensionale Normalverteilung f mit konstanter (bzw. höchstens durch zeilen- und spaltenweisen Vorzeichenwechsel veränderter) Korrelation

$$\varrho_{ij} = \varrho \quad (i \neq j = 1, 2, \dots, n)$$

als ein einfaches Integral der Form I auszudrücken. Im Anschluß an E. T. Goodwin (dies. Zbl. 33, 70) gibt Verf. eine genaue Abschätzung des Fehlers, der dadurch entsteht, daß I durch eine Summe ersetzt wird.

M. P. Geppert.

Das, S. C.: The numerical evaluation of a class of integrals. II. Proc. Cambridge philos. Soc. 52, 442—448 (1956).

Anknüpfend an Methode und Bezeichnungsweise von Moran (vgl. vorstehendes Referat), behandelt Verf. den Fall $n = 2$ ausführlicher und zeigt sodann, wie sich das Integral über einen n -dimensionalen normalverteilten Spaltenvektor u mit beliebiger Covarianzmatrix L_n

$$(2\pi)^{-n/2} |L_n|^{-1/2} \int_{a_1}^{\infty} \dots \int_{a_n}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{u}' L_n^{-1} \mathbf{u} \right\} d\mathbf{u}$$

zurückführen läßt auf ein $k (< n)$ -faches Integral

$$(2\pi)^{-k/2} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n P \left\{ a_i + \sum_{j=1}^k b_{ij} z_j \right\} \exp \left(-\frac{1}{2} \mathbf{z}' \mathbf{z} \right) d\mathbf{z}$$

mit \mathbf{z} = Spaltenvektor k standardisierter, unkorrelierter, normal verteilter Variablen, sofern der Gleichung

$$L_n = I_n + B_k B_k' \quad (I_n = \text{Einheitsmatrix})$$

eine reelle $n \times k$ -Matrix $B_k = \{b_{ij}\}$ als Lösung genügt. Aus der Identität

$$P(t) = t g(t) \int_{-\infty}^{\infty} g(x) (t^2 + x^2)^{-1} dx; \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},$$

gewinnt Verf. für den Fall $n = 1$ Approximation von $P(x)$ durch Reihen der Form

$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp [-\frac{1}{2} (j h + a)^2] / [t^2 + (j h + a)^2]$, deren Darstellung als Fourier-Reihe

mit Periode h zu Ungleichungen für $P(x)$ führt.

M. P. Geppert.

Wunderlich, W.: Eine neue Näherungsformel für den Ellipsenumfang. Z. angew. Math. Mech. 36, 465—466 (1956).

Verf. geht unter dem Integral für die Bogenlänge des Ellipsenquadranten

$$u = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

zu dimensionslosen Größen über. Die so folgende Beziehung

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + 2\xi\eta \cos 2\varphi} d\varphi = \frac{\pi}{2}$$

stellt in dem rechtwinkligen (ξ, η) -Koordinatensystem eine zur η -Achse symmetrische Kurve dar, die bei $\xi = 0$, $\eta = 1$ einen Scheitel hat. Der in diesem Scheitel sechspunktig berührende Schmiegekegelschnitt approximiert die Kurve vorzüglich und liefert eine einfache und sehr genaue Näherung für u , die auch — etwas modifiziert — für das vollständige elliptische Integral II. Gattung verwendbar ist. Eine Umformung ermöglicht eine gleichfalls sehr einfache Nomogrammdarstellung.

H. Tolle.

Chisnall, G. A.: A modified Chebyshev-Everett interpolation formula. Math. Tables Aids Comput. 10, 66—73 (1956).

Die Everettsche Interpolationsformel wird umgeschrieben als Reihe passender Tschebyscheffscher Polynome, wobei die neuen Koeffizienten wesentlich kleinere Beträge haben als bei der ursprünglichen Everettschen Formel, so daß man zur Erzielung einer vorgeschriebenen Genauigkeit im allgemeinen weniger Glieder braucht als bei der Everettschen Formel. Zahlenbeispiel.

L. Collatz.

Krejnes (Kreines), M. A., I. A. Vajnštejn (Wainstein) and N. D. Ajzenštat (Eisenstadt): Nomograms for functions given on a net. Doklady Akad. Nauk SSSR 111, 941—944 (1956) [Russisch].

Verf. behandeln geradlinige Netztafeln und geben einen Satz an über zwei Quintupel von je 5 Geraden und in einem weiteren Satz die Bedingungen, die die Skalen und zulässigen Geraden einer Netztafel erfüllen müssen, wenn $z = f(x, y)$ in einem Rechteck R_{xy} nomographierbar sein soll.

R. Ludwig.

Krejnes (Kreines), M. A., I. A. Vajnštejn (Wainstein) and N. D. Ajzenštat (Eisenstat): A device for construction of approximate nomograms. Doklady Akad. Nauk SSSR 110, 922—925 (1956) [Russisch].

Verff. entwickeln ein Verfahren und beschreiben eine einfache mechanische Vorrichtung, die es häufig gestattet, für eine in rechteckigem Gebiet nach beiden Argumenten streng monotone Funktion $z = f(x, y)$ ein Nomogramm durch eine Näherungsfunktion $z = N(x, y)$ zu gewinnen. Es werden die Bedingungen angegeben, für welche im ganzen Gebiet $|f(x, y) - N(x, y)| < \varepsilon$ gilt.

G. Feldmann.

Hastings jr., Cecil, Jeanne Hayward and James P. Wong jr.: Approximations in numerical analysis. A report on a study. Proc. Sympos. appl. Math. 6, 77—81 (1956).

Referat über Arbeiten zur Gewinnung einfacher analytischer Ausdrücke für die Darstellung von Funktionen in digitalen programmgesteuerten Rechenautomaten.

J. Heinhold.

Belevitch, V. et F. Storrer: Le calcul numérique des fonctions élémentaires dans la machine mathématique IRSIA-FNRS. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 42, 543—578 (1956).

Die Maschine IRSIA-FNRS verfügt über 15 dezimale Mantissenstellen und 2 Exponentenstellen, Komma vor der ersten Mantissenstelle. Vorgesehen sind Befehle für Gleitkommaaddition, -subtraktion und -multiplikation mit Normalisierung, Unterprogramme für Kehrwert, Quadratwurzel und die elementaren transzendenten Funktionen. — Die Vorteile der Gleitkommarechnung, wie großer Bereich für die

Größenordnung der Zahlen, Darstellung mit kleinem relativen Fehlerbetrag usw. werden auseinandergesetzt. Elementare Funktionen werden so berechnet, daß der Betrag des relativen Fehlers unter 10^{-14} bleibt. Unzweckmäßig ist z. B. die Berechnung von $\cos x$ für x in der Nähe von $\pi/2$ nach der Maclaurinschen Reihe. Relativer Fehler kann beliebig groß werden. Besser ist es, $\cos x$ durch $\sin(\frac{1}{2}\pi - x)$ zu berechnen. Bei Funktionen mit Nullstellen werden die Entwicklungen um diese Stellen bevorzugt. Weitere Beispiele: 10^x im Intervall $0 \dots x \dots 1$, 10^x für kleine x wieder großer relativer Fehler, deshalb Berechnung von $10^x - 1$ und Ermittlung von 10^x durch Addition von 1; Berechnung von $e^x - 1$ und $e^{-x} - 1$ an Stelle von e^x und e^{-x} , wenn man die Berechnung von $\operatorname{sh} x$ mit berücksichtigt. — Bei Approximationen elementarer Funktionen mit vorgeschriebenen relativen Fehlern werden gut konvergierende Maclaurinsche Reihen wie diejenigen für $\sin x$ und e^x und schlecht konvergierende wie diejenigen für $\log(1+x)$ und $\operatorname{arctg} x$ betrachtet. Im ersten Falle wird die Ökonomisierung der gegebenen Reihen mit Tschebyscheffschen Polynomen ausführlich besprochen. Approximation von $f(x)/x$ an Stelle $f(x)$, wenn $f(0) = 0$. Im Falle langsam konvergierender Reihen wird nach Einführung von $h \cos \vartheta = x$ die Funktion $f(h \cos \vartheta)$ nach Fourier entwickelt. Anschließend werden die Tschebyscheffschen Polynome eingeführt. Nach einigen Beispielen für derartige Fourierentwicklungen wird auf die Rundungsfehler bei der Berechnung von Polynomen eingegangen. Es werden Formeln für den Betrag des relativen Fehlers angegeben. Schließlich werden die Rundungsfehler in den Koeffizienten berücksichtigt. Ausführlich besprochen werden die Reihenentwicklungen für die Berechnung von $1/x$, \sqrt{x} , $\sin x$, $\operatorname{arctg} x$, 10^x bzw. $10^x - 1$, $\log(1+x)$. — Am Schluß der Arbeit sind die zur Berechnung der aufgeführten elementaren Funktionen notwendigen Konstanten mit einer solchen Genauigkeit mitgeteilt, daß bei der Berechnung der Betrag des relativen Fehlers unter der oben angegebenen Schranke bleibt. *H. Unger.*

● **Oppelt, Winfried: Kleines Handbuch technischer Regelvorgänge.** 2. neu bearb. und erweiterte Aufl. Weinheim/Bergstr.: Verlag Chemie GMBH 1956. 555 S. mit 471 Abb., 127 Tafeln, 3 Tabellen. Ganzleinen DM 36,40.

W. Oppelts „Kleines Handbuch technischer Regelvorgänge“ liegt in einer 2. neubearbeiteten und erweiterten Auflage zwei Jahre nach Erscheinen der 1. vor. Der Verf. beabsichtigt mit seinem kleinen Handbuch dem Leser einen Überblick über die Regelungstechnik zu geben und ihn dabei zu einer mittleren Höhe zu führen. In anschaulicher Art werden an Hand von vielen Bildern und Tafeln dem Leser die Kenntnisse vermittelt. Dem Verf. ist es in einer glücklichen Art gelungen, die physikalisch-technischen Grundlagen der Regelungstechnik und die unerläßliche Theorie so gegeneinander abzuwiegen, daß der Fachmann wie der interessierte Wissenschaftler eines anderen Fachgebietes einen guten Einblick in Aufgaben und Lösungen der Regelungstechnik bekommt. Auf neuestem Stand befindliche Literaturangaben machen das Buch wertvoll. In einem besonderen Abschnitt sind erstmalig die nichtlinearen Regelvorgänge zusammengefaßt, wobei die Verfahren der Beschreibungsfunktion und der Phasenebene neu aufgenommen wurden. Die Analogierechenmaschinen, die für die Regelungstechnik ganz besondere Bedeutung gewinnen, sind kurz erläutert. Der Verf. hat versucht, alle Gebiete der Regelungstechnik zu erfassen und den Interessierten einen Einblick zu geben. Leider sind dabei die mathematischen Grundlagen sehr kurz weggekommen, so daß sich der ernsthaft Interessierte die Grundlagen aus Lehrbüchern der Laplace-Transformation vermitteln muß. Der reine Praktiker vermißt technische Ausführungsformeln von Reglern und Listen von Lieferfirmen, die auch in einem kleinen Handbuch in einem Appendix aufgeführt sein könnten. Auch die elektronischen Regelanlagen technischer und wissenschaftlicher Art, z. B. registrierende Spektralphotometer aller Wellenlängen, sind für ein kleines Handbuch zu kurz oder gar nicht behandelt worden. Es wäre wünschenswert, daß diese Lücken in einer 3. Auflage vom Verf. geschlossen werden.

G. Wallis — G. Schreiber.

● Dekanosidze, E. N.: *Tafeln der Zylinderfunktionen von zwei Veränderlichen.* (Akademie der Wissenschaften der UdSSR. Rechenzentrum. Mathematische Tafeln.) Moskau: Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR 1956. 494 S. R. 50.— [Russisch].

Die Lommelschen Funktionen

$$U_n(w, z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{w}{z}\right)^{n+2m} J_{n+2m}(z),$$

$$V_n(w, z) = U_{-n+2}(w, z) + \cos\left(\frac{1}{2}w + \frac{1}{2}z^2 w^{-1} + \frac{1}{2}n\pi\right)$$

werden für $n = 1$ und $n = 2$ mit 6 Dezimalen für folgende Argumentwerte mitgeteilt:

$w = 0,50(0,02) 1,20(0,05) 4,00(0,1) 6,2$ und $z = w(0,01) w^*$ mit $w^* \leq 4\sqrt{w}$,
 $w = 6,3(0,1) 10,0$ und $z = w(0,01) 10,00$. In der Einleitung werden Reihenentwicklungen, insbesondere auch asymptotische Entwicklungen, Rekursionsformeln mit Besselschen Funktionen $J_n(z)$ und Beispiele mitgeteilt. *H. Unger.*

Geometrie.

Grundlagen. Nichteuclidische Geometrie:

Ehrlich, Gertrude: *Characterization of a continuous geometry within the unit group.* Trans. Amer. math. Soc. 83, 397—416 (1956).

Pour une variété linéaire dont l'anneau d'endomorphismes n'est pas de caractéristique 2, la géométrie projective des sous-espaces est déterminée, à un isomorphisme ou à un anti-isomorphisme près, par le groupe des éléments non singuliers de l'anneau d'endomorphismes. Le but principal de ce mémoire est de montrer qu'un résultat analogue est valable dans le cas des géométries continues de von Neumann et des anneaux continus associés et de donner une caractérisation des isomorphismes du groupe des éléments non singuliers d'un anneau continu analogue à celle du cas projectif. D'une façon précise, ce second résultat s'énonce de la manière suivante: Soit G_1 et G_2 les groupes des éléments non singuliers de deux anneaux continus R_1 et R_2 qui ne sont pas de caractéristique 2; un isomorphisme σ de G_1 sur G_2 peut être mis d'une manière unique sous la forme $\sigma = \sigma'' \sigma'$, où σ'' est un automorphisme singulier (de la forme $x \rightarrow z_x x$, l'élément z_x étant un élément du centre du groupe G_1 dépendant de x), et σ' un isomorphisme induit (par un isomorphisme de R_1 sur R_2).

R. Croisot.

Benedicty, Mario: *Piani grafici e questioni connesse.* Archimede 8, 49—54 (1956).

Nach einer kurzen Zusammenstellung der Axiome und wichtigsten Eigenschaften der allgemeinen (nicht notwendig reellen) projektiven Ebenen, bei der insbesondere auf die Bedeutung der Sätze von Pappos-Pascal und Desargues hingewiesen wird, formuliert der Verf. in systematischer Weise mögliche Verallgemeinerungen der Axiome, z. B.: „A(n): Zu zwei verschiedenen Punkten gibt es genau (oder wenigstens oder höchstens) n Geraden, die sie enthalten“. Für solche verallgemeinerten Ebenen (zu denen z. B. auch die Punkte und Großkreise auf der Kugel gehören) ist in natürlicher Weise der Begriff des Homomorphismus erklärt als eine Abbildung der Punkte und Geraden einer verallgemeinerten Ebene auf die Punkte und Geraden einer anderen verallgemeinerten Ebene, die mit der Inzidenzrelation verträglich ist. Zur Beleuchtung der vorgetragenen Gedanken referiert Verf. dann kurz das Axiomensystem und die Haupteigenschaften der vom Ref. (dies. Zbl. 57, 126) eingeführten projektiven Ebenen mit Nachbarelementen. *W. Klingenberg.*

Karzel, Helmut: *Über eine Anordnungsbeziehung am Dreieck.* Math. Z. 64, 131—137 (1956).

In der Theorie der von Sperner eingeführten Ordnungsfunktionen für eine Menge von Punkten und Geraden (dies. Zbl. 30, 60) zeigt man ohne Mühe, daß die Geradenrelation (zitiert a. a. O.) die Dreiecksrelation zur Folge hat: Sind α, β, γ drei nicht kollineare Punkte, (α, β) , (α, γ) , (β, γ) deren Verbindungsgeraden und a, b, c drei Geraden derart, daß (α, β) , a, b , bzw. (α, γ) , a, c bzw. (β, γ) , b, c einen Punkt $\neq \alpha, \beta, \gamma$ gemein haben, so gilt $a(\beta) a(\gamma) b(\alpha) b(\gamma) c(\alpha) c(\beta) = 1$. Verf. zeigt umgekehrt, daß in einer projektiven Ebene, in der der kleine Satz von Desargues gilt und in der eine Gerade mehr als drei Punkte trägt, aus der Dreiecksrelation die Geradenrelation folgt. Letzteres gilt nicht für alle projektiven Ebenen, denn in der projektiven Ebene mit 7 Punkten und Geraden ist die Dreiecksrelation trivialerweise für jede Ordnungsfunktion erfüllt, nicht aber stets die Geradenrelation.

R. Lingenberg.

Baer, Reinhold: Die Bewegungsgruppe der Euklidischen Ebene. S.-Ber. Berliner math. Ges. 1954/55, 1955/56, 45—47 (1956).

An affine Fano-plane is said to possess a „separation“ if every point on a line divides the line into two rays and every line divides the plane into two half-planes such that the natural separation-properties for parallel lines, intersecting lines, and betweenness of three collinear points are satisfied. A „flag“ is a pair consisting of a ray and one of its half-planes. Theorem: A group Γ of separation-preserving affine motions is simply transitive on all flags if and only if: (1) Γ is transitive on all lines, (2) if σ in Γ has a fixed point and a fixed line, then $\sigma^2 = 1$, (3) if the order of $\sigma = 2$, then σ is a point-reflection or a line-reflection, (4) to every line there is one and only one line-reflection in Γ . (1) to (4) do not refer to the separation of the plane. Hence consider now a motion-group of an affine Fano-plane satisfying (2) to (4). If the line l is fixed under the reflection at the line h , we say that h and l are perpendicular. This relation satisfies all formal properties to be expected. Theorem: To every pair of intersecting lines exists a reflection that interchanges these two lines (an „angular bisector“) if and only if: (a) Γ is transitive on all lines, (b) Γ is generated by its reflections, (c) the product of three concurrent line-reflections is a line-reflection. Under these conditions the plane is a plane over a commutative Pythagorean field, and perpendicularity is given by a bilinear form. (No proofs.) *A. Cronheim.*

Scott, Dana: A symmetric primitive notion for Euclidean geometry. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 59, 456—461 (1956).

Beth, Evert W. and Alfred Tarski: Equilaterality as the only primitive notion of Euclidean geometry. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 59, 462—467 (1956).

Tarski, Alfred: A general theorem concerning primitive notions of Euclidean geometry. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 59, 468—474 (1956).

Die vorliegenden drei Abhandlungen sind der Untersuchung der Frage gewidmet, welche Grundbegriffe ausreichen, um die Geometrie des n -dimensionalen reellen Euklidischen Raumes zu begründen ($1 < n$). [Es liegt nahe zu vermuten, daß ein beträchtlicher Teil der vorliegenden Untersuchungen auch für allgemeinere Klassen von Geometrien gültig bleibt.] Es ist seit langem bekannt, daß sowohl der Begriff der Abstandsgleichheit wie auch der des Senkrechtstehens von Geraden ausreicht; und Pieri hat das Ausreichen der Relation $I(x, y, z)$ [= der Punkt x hat von den Punkten y und z gleichen Abstand] erwiesen. In der ersten Abhandlung dieser Reihe wird gezeigt, daß die in den drei Variablen symmetrische Beziehung $S(x, y, z)$ [= das von den Punkten x, y, z gebildete Dreieck ist rechtwinklig] ebenfalls ausreicht; in der zweiten Abhandlung wird bewiesen, daß der Begriff des gleichseitigen Dreiecks dann und nur dann ausreicht, wenn $2 < n$ ist. In der dritten Abhandlung wird die in der zweiten Abhandlung benutzte Methode allgemein dargestellt: es wird zunächst festgestellt, daß sich von zwei Begriffs- und Relationensystemen dann und nur dann dieselben Theorien ableiten lassen, wenn sie zu derselben Automorphismengruppe führen. Identifiziert man dann [was man kann] die Euklidische Ebene mit der

Ebene der komplexen Zahlen, ist weiter $R(x, y, z)$ eine Relation zwischen komplexen Zahlen, die zur Begründung der ebenen Euklidischen Geometrie ausreicht, sind schließlich a und b zwei verschiedene komplexe Zahlen und C die Gesamtheit der komplexen Zahlen c , für die $R(a, b, c)$ gilt, so erzeugt C den ganzen Körper der komplexen Zahlen, hat also insbesondere die Mächtigkeit des Kontinuums. Aus dieser notwendigen Bedingung folgt eine Reihe interessanter Kriterien für die Unzulänglichkeit gewisser Grundbegriffe.

R. Baer.

• Norden, A. P. (Redaktion und Einführung von): **Über die Grundlagen der Geometrie. Sammlung von klassischen Arbeiten zur Lobačevskischen Geometrie und der Entwicklung seiner Ideen.** (Klassiker der Naturwissenschaften. Mathematik, Mechanik, Physik, Astronomie.) Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1956. 528 S. R. 18.70 [Russisch].

Bereits im Jahre 1893 hatte die Kasaner Physikalisch-Mathematische Gesellschaft eine Sammlung klassischer Schriften und Belegstellen über den gleichen Gegenstand veröffentlicht. Demgegenüber ist die vorliegende Neuauflage aber erheblich verbessert und erweitert worden. Nach einer Einleitung von Norden folgt der Abdruck der klassischen Arbeiten und Belegstellen. Dieser ist in drei Teile gegliedert: I. Die Geometrie Lobačevskis. II. Anfangsgründe der Flächentheorie und Deutungen der Lobačevskischen Geometrie. III. Weiterentwicklung der Ideen Lobačevskis. Im Teil I befinden sich zuerst drei Teilstücke aus folgenden Werken von Lobačevski selber: „Über die Anfangsgründe der Geometrie“ (1830), „Imaginäre Geometrie“ (1835) und „Neue Anfangsgründe der Geometrie mit vollständiger Parallelen-theorie“ (1835–38). Dann folgen der Appendix von J. Bolyai zum Tentamen seines Vaters und die entscheidenden Briefstellen und Notizblätter von Gauß zur Parallelen-theorie. Der Teil II beginnt mit der klassischen Arbeit von Gauß über die Flächentheorie (1827), einigen Arbeiten von Minding, der sich an Gauß anschloß, und darauf der klassischen Arbeit von Beltrami „Saggio d'interpretazione della geometria non-euclidea“ (1868). Es folgt eine Notiz von Hilbert über Flächen negativen Krümmungsmaßes (1903) sowie die entscheidenden Stellen aus den Arbeiten von Cayley, Klein und Poincaré über nichteuklidische Maßbestimmungen. Der Teil III bringt zuerst die klassische Arbeit von Riemann „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen“ (1868) mit dem Weylschen Kommentar und darauf die ganz ähnlich betitelte von Helmholtz aus dem Jahre 1868 mit der Kritik von S. Lie, worauf bekanntlich die Fragestellung des Helmholtz-Lieschen Raumproblems zurückgeht. Darauf ist das Kleinsche Erlanger Programm (1872) abgedruckt mitsamt einigen entscheidenden Gutachten von Poincaré und Klein über die Arbeiten von Lie und Hilbert. Von Arbeiten unseres 20. Jahrhunderts ist dann nur ein von Kagan aus dem Jahre 1905 stammendes Axiomensystem der euklidischen Geometrie wiedergegeben sowie die auch schon klassisch gewordene Arbeit: E. Cartan, „La théorie des groupes et la géométrie“, Enseignement math. 26, 200–205 (1927). Den Beschluß bilden einige bibliographische Bemerkungen von Bronstein. Alle nicht original russischen Stücke sind durchweg ins Russische übersetzt worden, so daß sich in dem Werk Übersetzungen aus fünf verschiedenen Sprachen finden (lateinisch, französ., deutsch, engl., ital.).

W. Burau

Rozenfel'd, B. A.: **Interpretationen der Lobačevskischen Geometrie.** Istorikomat. Issledovanija 9, 169–208 (1956) [Russisch].

In der vorliegenden Arbeit wird ein interessanter Überblick über die wichtigsten aller bisher vorliegenden Interpretationen der Lobačevskischen Geometrie gegeben. Dabei wird unter Interpretation eine Deutung der Grundbegriffe wie Punkte, Geraden usw. der NE-Geometrie durch die Begriffe eines anderen mathematischen Bereichs verstanden. In § 1 wird zunächst geschildert, wie nahe Lobačevski selber, der die Ähnlichkeit zwischen den trigonometrischen Formeln seiner und der sphärischen

Geometrie bemerkte, bereits der Interpretation seiner Geometrie auf einer Kugel von imaginären Radius war. Es folgt dann eine Beschreibung der bekannten Interpretationen von Beltrami (1868) auf Flächen konstanten negativen Krümmungsmaßes und von Cayley-Klein aus den Jahren 1859 und 1891 durch die projektive Maßbestimmung. Von Poincaré werden zwei Interpretationen beschrieben, außer der bekannten im Innern eines Kreises der Gaußschen Ebene noch eine zweite weniger bekannte. Diese besteht darin, die Mittelpunktskegelschnitte einer Quadrik Q_2 des affinen R_3 als Geraden zu interpretieren mit einer Längen- und Winkelmetrik, die unter Heranziehung der auf Q_2 liegenden Geraden und deren Fernpunkten leicht auf Logarithmen von Doppelverhältnissen zurückgeführt werden kann. Im Falle der Lobačevskischen Geometrie ist Q_2 ein zweischaliges Hyperboloid. Diese Interpretation ist gleichwertig damit, die NE-Geometrie auf einer Kugel vom Radius ri im pseudoeuklidischen Raum zu deuten. Dabei ist pseudoeuklidisch ein solcher Raum, wo die Vektorlängen durch $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$ gemessen werden. Durch Projektion der Q_2 aus dem Mittelpunkt oder aus einem auf Q_2 liegenden Punkt erhält man aus der zweiten Poincaréschen Interpretation entweder die Cayley-Kleinsche oder die erste Poincarésche Interpretation. Es sei noch erwähnt, daß Verf. das Äußere eines Kegelschnittes in der Cayley-Kleinschen Auffassung Lobačevskische Ebene positiver Krümmung nennt; die Geraden derselben sind vermöge Polarisierung am Maßkegelschnitt den Punkten der Lobačevskischen Ebene positiver Krümmung, d. h. den Punkten des Innern zuzuordnen. Durch die tetrazyklischen Koordinaten nach Darboux (1873) wird weiterhin die Gesamtheit der reellen Kreise der euklidischen Ebene R_2 auf die Punkte eines Lobačevskischen Raumes L_3 positiver Krümmung in dieser Sprechweise abgebildet, wobei die Punktkreise des R_2 die Rolle des Absoluten spielen. Diese sog. Darboux'sche Interpretation läßt sich auch auf den Lobačevskischen L_4 mittels der Kugelgeometrie übertragen, ihr zweidimensionales Analogon ist das Hessesche Übertragungsprinzip der Punktepaare einer Geraden auf die Punkte einer Ebene. Im § 6 wird dann die sog. Interpretation von Kotjelnikov beschrieben. Es handelt sich dabei um die Abbildung der orientierten Geraden des Lobačevskischen L_3 auf die Punkte einer Sphäre des komplexen R_3 . Diese Abbildung wurde durch Kotjelnikov im Jahre 1899 gefunden, aber unabhängig davon durch Study (s. Study, Geometrie der Dynamen, Leipzig 1901). Eng verwandt damit ist die bekannte Fubinische Abbildung der orientierten Geraden des elliptischen R_3 auf die Punktepaare zweier reeller Kugeln (1879). Zum Schluß werden die Kaganschen Interpretationen aus dem Jahre 1949 erwähnt (dies. Zbl. 39, 364). Diese ergeben eine unendliche Reihe von Interpretationen im Einheitskreise, wovon die Cayley-Kleinschen und die Poincaréschen nur Sonderfälle sind, sonst aber Kurven beliebiger Ordnung und auch transzendente Kurven als Bilder der Geraden auftreten können.

W. Burau.

Ewald, Günther: Axiomatischer Aufbau der Kreisgeometrie. Math. Ann. 131, 354—371 (1956).

Unter der (Möbiusschen) Kreisgeometrie versteht man das System der Kreise auf der reellen Sphäre S^2 im euklidischen Raum R^3 . Die Kreise entsprechen eindeutig denjenigen Ebenen im Raum, die die Sphäre in mehr als einem Punkt schneiden. Faßt man den euklidischen Raum als Teil des projektiven Raums auf und führt homogene Koordinaten so ein, daß die Koordinaten (x_i) der Punkte der Sphäre durch $(*) -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ gegeben sind, so sind die Koordinaten (x_i) der Punkte eines Kreises auf der Sphäre durch die Gleichungen $(*)$ und $(**) x_0 u_0 + x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0$ gegeben. Durch $(-u_0, u_1, u_2, u_3)$ sind, nach Darboux, die tetra-zyklischen (homogenen) Koordinaten eines Kreises der Kreisgeometrie definiert. Es liegt nahe, nach einer Verallgemeinerung der Kreisgeometrie zu fragen, bei der an die Stelle des reellen projektiven Raumes der projektive Raum über einem allgemeineren, nicht notwendig kommutativen, Körper tritt und an

Stelle der durch die Sphäre im reellen Fall vermittelten hyperbolischen Polarität eine allgemeinere Polarität in diesem Raum. Die Menge der Punkte, die mit ihrer Bildebene inzidieren, nennen wir Quadrik; sie übernimmt die Rolle der Sphäre im reellen Fall. Eine verallgemeinerte Kreisgeometrie wird man nun etwa unter den ebenen Schnitten einer solchen Quadrik zu suchen haben. Untersuchungen von Blaschke, Reidemeister, Hesselbach und anderen lassen erwarten, daß bei einer Charakterisierung von verallgemeinerten Kreisgeometrien durch Axiome über Inzidenz und eventuell Orthogonalität von Punkten und Kreisen zwei Schließungssätze, der Satz von Miquel und der Büschelsatz, eine besondere Rolle spielen werden. In der Tat haben van der Waerden-Smid (dies. Zbl. 10, 268) eine, von der oben angegebenen etwas verschiedene, Verallgemeinerung der Kreisgeometrie axiomatisch unter wesentlicher Verwendung des Satzes von Miquel gekennzeichnet; dabei spielt der Satz von Miquel eine ähnliche Rolle wie sie der Satz von Pappos-Pascal für die Charakterisierung der projektiven Ebene über einem kommutativen Körper spielt. Der Koordinatenkörper der van der Waerden-Smidschen verallgemeinerten Kreisgeometrie ist kommutativ. Verf. macht in der vorliegenden Arbeit einen Ansatz, die Bedeutung des Büschelsatzes für eine verallgemeinerte Kreisgeometrie zu klären. Er formuliert ein Axiomensystem, das eine Reihe von Forderungen an die Grundobjekte, Punkte und Kreise und an die Grundrelationen, Inzidenz und Orthogonalität, enthält sowie den Büschelsatz (in einer speziellen Form; die allgemeine Form wird daraus hergeleitet). Es folgt, daß die Punkte und Kreise sich als Punkte und ebene Schnitte einer Quadrik im oben angegebenen Sinne darstellen lassen. Es bleibt offen, welche besonderen Eigenschaften der Koordinatenkörper und die Quadrik bzw. die durch sie vermittelte Polarität besitzen; es ist zu vermuten, daß hier weitgehende Einschränkungen zu machen sind. So gibt z. B. Verf. kein Beispiel einer dem Axiomensystem genügenden Geometrie an, bei dem der Körper nicht kommutativ ist oder bei dem die Polarität nicht durch eine symmetrische Form vermittelt wird.

W. Klingenberg.

Ewald, Günther: Über den Begriff der Orthogonalität in der Kreisgeometrie. Math. Ann. 131, 463—469 (1956).

Verf. zeigt, daß man sein früher aufgestelltes Axiomensystem für eine verallgemeinerte Kreisgeometrie (siehe vorstehendes Referat), das die Grundrelationen inzident und orthogonal enthielt, durch ein gleichwertiges ersetzen kann, in dem nur die Grundrelation inzident vorkommt. Orthogonal wird folgendermaßen definiert: Ein Kreis k heißt zu einem Kreis k' orthogonal, wenn er durch die Berührungspunkte dreier sich in verschiedenen Punkten zu je zweien berührender Kreise, zu denen k' gehört, hindurchgeht.

W. Klingenberg.

Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

Brauner, H.: Über die Projektion mittels der Sehnen einer Raumkurve 3. Ordnung. Monatsh. Math. 59, 258—273 (1955).

Die vorliegende Arbeit behandelt den „allgemeinen Fall“ einer schon in der älteren Literatur gelegentlich zur Diskussion der kubischen Raumkurven benutzten eindeutigen Punkttransformation auf eine Bildebene π : Jedem Raumpunkt P wird der Schnittpunkt P^s der ihn enthaltenden Sehne einer vorgegebenen Raumkurve 3. Ordnung c mit π als Bild zugeordnet. Die geschickt projektiv normierten Abbildungsgleichungen 4. Grades werden zur Vereinfachung noch einer quadratischen Cremona-Transformation von π auf sich unterworfen und führen so auf eine bei Reye (Die Geometrie der Lage II, Stuttgart 1907, S. 191) erwähnte quadratische Abbildung. Nach Diskussion der Singularitäten beider Abbildungen wird vornehmlich die letztere auf die wesentlichen Objekte der analytischen Geometrie — Geraden, Ebenen, Kurven, Flächen (Umrißbestimmung), Gewinde und Gewindebüschel —

angewandt. Am Rande ergeben sich einige hübsche Sätze über Schließungskegelschnitte. Den Schluß der Untersuchung bildet eine Bemerkung zur Abbildung der automorphen Kollineationen von c . Als Bild erhält man ebene nichteuklidische Bewegungen; durch Umkehrung der Abbildung läßt sich demzufolge in der Sehnenkongruenz von c ein räumliches Modell einer ebenen nichteuklidischen Geometrie erklären. Leider verzichtet Verf. gänzlich auf eine Diskussion der Hauptmerkmale der Entartungsfälle. — Zur Fortsetzung dieser Arbeit s. folgendes Referat.

H. Germer.

Brauner, H.: Konstruktive Durchführung der durch die Sehnens einer Raumkurve 3. Ordnung vermittelten Abbildung des Raumes auf eine Ebene. Monatsh. Math. 60, 231—248 (1956).

Verf. entwickelt einen metrischen Spezialfall der von ihm früher (s. vorstehendes Referat) behandelten Transformationen unter darstellend-geometrischen Gesichtspunkten. Die Konstruktion gestaltet sich durch die — für den Leser zunächst etwas unмотivierte — Einführung besonders geeigneter Hilfs-„Risse“ überraschend einfach. So gelingt es mit verhältnismäßig geringem Aufwand, fast alle Fragen der eingangs zitierten Arbeit aufzugreifen. Neue Ergebnisse liefern dabei vor allem die Abschnitte „Umkehraufgaben“ (räumliches Urbild zu gegebenem Bild) und „Abbildung der Gewinde“ (wobei die „Zentralkubik“ c als Gewindekurve vorausgesetzt wird).

H. Germer.

Germer, Henning: Einige kubische und quadratische Transformationen im projektiven R_n . Math. Nachr. 15, 299—338 (1956).

Im projektiven n -dimensionalen Raum über dem Körper der komplexen Zahlen sei eine Kollineation $x' = \mathcal{A}x$ ($\mathcal{A} \neq \varrho \mathbb{E}$) und eine Korrelation $\eta^T \mathbb{R} x = 0$ gegeben. Die Geraden $\eta = \lambda x + \mu x'$, die jedem bei der Kollineation nicht invarianten Punkt x eindeutig zugeordnet sind, bilden das begleitende Strahlensystem der Kollineation. Die zu x gehörende Gerade des Systems schneidet die x durch die Korrelation zugeordnete Hyperebene im Punkt $\eta = (x^T \mathbb{R} x) x' - (x^T \mathbb{R} x') x$. Die hierdurch definierte rationale Abbildung $\eta = \mathfrak{T}(x)$ des projektiven n -dimensionalen Raumes auf sich oder auf einen Unterraum wird vom Verf. untersucht. Es ergeben sich (außer linearen) kubische und quadratische Transformationen mit k -deutiger Umkehrung ($k \leq n$). Im besonderen findet man kubische Cremona-Transformationen, deren Umkehrungen einen Grad $\leq 2n - 1$ und quadratische Cremona-Transformationen, deren Umkehrungen einen Grad $\leq n$ haben. Die Fundamentalmannigfaltigkeiten der Transformationen werden untersucht.

W. Engel.

Algebraische Geometrie:

Segre, Beniamino: Invarianti topologico-differenziali, varietà di Veronese e moduli di forme algebriche. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 41, 113—138 (1956).

Es liege eine differenzierbare Mannigfaltigkeit W der Dimension d vor, die in einen projektiven Raum S_q eingebettet sei. Die Umgebung eines Punktes P von W kann durch gewisse Differential-Invarianten gegenüber allen in dieser Umgebung umkehrbar eindeutigen Transformationen, die genügend hoch differenzierbar sind, topologisch charakterisiert werden. Insbesondere nennt Verf. die Mannigfaltigkeit W „ n -regulär in P “, wenn W in P einen in n -ter Ordnung oskulierenden Tangentialraum S_r der regulären Dimension $r = \binom{n+d}{d} - 1$, ($q \geq r$) besitzt, oder m. a. W. wenn W in der Umgebung von P keiner partiellen Differentialgleichung einer Ordnung $\leq n$ genügt. Verf. beweist folgenden wichtigen Satz: Ist W in P n -regulär, so können genügend kleine Umgebungen von P auf W angegeben werden derart, daß p beliebige, voneinander verschiedene Punkte dieser Umgebung immer linear unabhängig sind ($d \geq 1$, $2 \leq p \leq n + 1$); läßt man diese p Punkte nach irgendeinem

Gesetz gegen P konvergieren, so haben die von ihnen aufgespannten S_{p-1} Häufungsräume S_{p-1}^0 , die sämtlich im oskulierenden Raum $(p-1)$ -ter Ordnung von W in P liegen. Damit ist ein von G. Tibiletti (dies. Zbl. **45**, 103) für $d=1$ gewonnenes Ergebnis verschärft und verallgemeinert. Insbesondere ist eine Veronesesche Mannigfaltigkeit $V_d^{(m)}$, das ist die Bildmannigfaltigkeit aller Formen des Grades m im S_d , in jedem ihrer Punkte n -regulär ($m \geq n$ vorausgesetzt). Verf. empfiehlt, die Untersuchung und Ermittlung der topologischen Differentialinvarianten einer vorgelegten Mannigfaltigkeit W nicht an dieser direkt, sondern an ihrem birationalen Bild auf einer Veroneseschen $V_d^{(m)}$ durchzuführen. Das Studium der algebraischen Mannigfaltigkeiten des S_d kann so mit Vorteil auf dasjenige aller ihnen birational entsprechenden Untermannigfaltigkeiten einer Veroneseschen $V_d^{(m)}$ genügend hoher Stufe m übertragen werden. Die letzten Teile der Arbeit stehen in enger Nachbarschaft zu den idealtheoretischen Entwicklungen in homogenen Polynomringen: Es handelt sich hier um Sätze über Hauptklassenideale (f_1, f_2, \dots, f_k) und deren Hilbertfunktionen; für jedes derartige Hauptklassenideal gelten die Beziehungen:

$$\text{und} \quad \begin{aligned} & (f_1, f_2, \dots, f_{k-1}) : f_k = (f_1, f_2, \dots, f_{k-1}) \\ & (f_1, \dots, f_h) \cap (f_{h+1}, \dots, f_k) = (f_1, \dots, f_h) (f_{h+1}, \dots, f_k). \end{aligned}$$

Auch für die Berechnung der Hilbertfunktion von Segreschen und Veroneseschen Mannigfaltigkeiten, sowie derjenigen von birational transformierten oder Veronesesch transformierten Idealen gibt es in der Idealtheorie bereits sehr spezialisierte Formeln (vgl. Goddard, dies. Zbl. **29**, 413; Gröbner, dies. Zbl. **57**, 367). Zuletzt behandelt Verf. sehr interessante Verallgemeinerungen des Noetherschen Fundamentalsatzes zur Beantwortung der Frage, wann eine Form F in einem Hauptklassenideal (f_1, f_2, \dots, f_k) enthalten ist, d. h. welchen lokalen Bedingungen F in den gemeinsamen Nullstellen der Formen f_i genügen muß, damit eine Darstellung $F = g_1 f_1 + \dots + g_k f_k$ mit passenden Formen g_k existiert ($2 \leq k \leq d$). Es werden hinreichende Bedingungen angegeben. Auch hier laufen idealtheoretische Arbeiten parallel [vgl. H. Gligl, Monatsh. Math. **60**, 198—204 (1956)], die wertvolle Ergänzungen zu den geometrischen Überlegungen liefern könnten.

W. Gröbner.

Weil, André: The field of definition of a variety. Amer. J. Math. **78**, 509—524 (1956).

Es sei V eine über einem Körper K definierte Mannigfaltigkeit, und es sei k ein Teilkörper von K , über dem K separabel ist. Verf. gibt Bedingungen dafür an, daß es eine über k definierte Mannigfaltigkeit V_0 gibt, welche über K birational (bzw. biregulär) zu V äquivalent ist. Diese Bedingungen sind elementarer Natur und beziehen sich auf das Verhalten von V bei den Isomorphismen von K über k ; dabei werden die Fälle einer endlich-algebraischen Erweiterung K/k und einer endlich-regulären Erweiterung K/k getrennt behandelt. Die Resultate des Verf. gestatten es, manche Schlüsse in der bisherigen Literatur über algebraische Gruppen zu systematisieren und zu vereinfachen; vgl. dazu insbesondere die folgende Literatur: W. L. Chow, dies. Zbl. **64**, 276; S. Lang, dies. Zbl. **64**, 39; A. Weil, dies. Zbl. **65**, 142.

P. Roquette.

Wallace, Andrew H.: Tangency and duality over arbitrary fields. Proc. London math. Soc., III. Ser. **6**, 321—342 (1956).

Dans la géométrie algébrique sur corps de caractéristique $\neq 0$, les faits nouveaux (par rapport au cas classique) suivants se présentent. Une courbe plane absolument irréductible peut avoir toutes ses tangentes multiples, avec des points de contact distincts. Si V' est la variété des hyperplans tangents d'une variété V , on n'a pas forcément $(V')' = V$. L'hyperplan tangent générique d'une variété V peut avoir sur V comme lieu des points de contact une sous-variété non linéaire. Ces faits restreignent, en particulier, la possibilité d'utiliser la forme de Bertini pour la représentation d'une variété algébrique (voir B. Segre, ce Zbl. **42**, 395) au cas de caractéristique

téristique nulle. L'A. fait l'étude algébrique des causes de ces anomalies en considérant dans le cas général le critère jacobien pour le théorème d'existence des fonctions implicites.

G. Ancochea.

Deodò, Modesto: Analisi e costruzione effettiva dei gruppi continui di trasformazioni di de Jonquières. Atti Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 21, 71—79 (1956).

Etant donnés dans un plan, un point O et $n - 1$ points K_i si l'on considère les transformations de de Jonquières J de centre O telles que les K_i soient fondamentaux pour J et J^{-1} et telles que les points fondamentaux conjugués des K_i soient ceux de l'inverse distincts des K_i , la totalité de ces transformations forme un groupe G continu. Si n est impair et si les K_i sont en position générique, le groupe continu G se construit comme transformé du groupe ∞^6 des projectivités laissant O fixe par une transformation de de Jonquières de centre O et ayant les points K_i comme points fondamentaux de son inverse. Si n est pair et les K_i génériques, G est le transformé du groupe ∞^6 des transformations quadratiques qui conservent deux faisceaux de droites de sommets O et Q par une transformation de de Jonquières de centre O qui porte un des K_i en Q et a les autres points K_i pour fondamentaux de son inverse. Si les K_i , au lieu d'être génériques appartiennent à un monoïde d'ordre $< \frac{1}{2}(n - 1)$ le groupe G est le transformé des transformations de de Jonquières qui ont tous leurs points fondamentaux dans le voisinage du premier ordre de O par une transformation de de Jonquières de centre O et qui a les points fondamentaux de son inverse dans le plus grand nombre possible de K_i . Le maximum de dimension d'un tel groupe est $n + 5$. Une représentation analytique simple de ces différents cas est également donnée.

B. d'Orgeval.

Lluis, Emilio: Über die bei der Projektion algebraischer Mannigfaltigkeiten auftretenden Singularitäten. Bol. Soc. mat. Mexicana, II. Ser. 1, 1—9 (1956) [Spanisch].

Dans cette Note l'A. étudie les singularités qui se présentent dans la projection d'une variété sans points multiples d'un espace projectif sur un autre, et applique les résultats obtenus pour transformer birationnellement une variété de dimension quelconque sans singularité en une hypersurface avec singularités les plus simples.

M. Piazzolla Beloch.

Monk, D.: Jacobians of linear systems on an algebraic variety. Proc. Cambridge philos. Soc. 52, 198—201 (1956).

Verf. leitet für das Jacobische System von k linearen Systemen $|S_i|$, $i = 1, \dots, k$, von Hyperflächen auf einer irreduziblen singularitätenfreien V_a , $\dim |S_i| = r_i$, $\sum r_i = h + 1$, die Äquivalenz ab: $J_h(S_1, \dots, S_k) \equiv K_h[II(1 + S_i)^{r_i+1}]$, womit eine von Severi (dies. Zbl. 45, 106) angegebene Formel verallgemeinert wird. Der Beweis stützt sich auf die von J. A. Todd (dies. Zbl. 22, 392) entwickelte Methode.

W. Gröbner.

Godeaux, Lucien: Construction de surfaces algébriques dont le diviseur de Severi est quelconque. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 26, 10—17 (1956).

Rappel de la démonstration donnée par l'A. [Sur certaines surfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité; Bull. Acad. Soc. Cracovie 1914, 263—368 (1914)] de la propriété de la surface f image d'une involution cyclique d'ordre p premier sans points unis sur une surface algébrique F de diviseur 1, d'avoir (en général) le diviseur égal à p ; il en résulte une construction de surfaces de diviseur différent de 1, en engendrant sur une surface de diviseur 1 une involution d'ordre p à l'aide d'une homographie cyclique de période p de l'espace ambiant S^R convenablement choisie. L'application à $p = 2$, $R = 6$ permet d'obtenir à partir de la surface de Steiner (en remplaçant dans son équation les coordonnées par des formes indépendantes de degré 2) une surface de diviseur 2 et de caractères $p_a = p_g = 3$, $p^{(1)} = 9$; si $p = 2$,

$R = 8$ on obtient par la même méthode une autre surface de diviseur 2 et caractères $p_a = p_g = 55$, $p^{(1)} = 9 \times 2^5 + 1$ à partir de la surface de Véronèse.

B. d'Orgeval.

Burniat, Pol: Modèles simples de surfaces irrégulières à système canonique dégénéré. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **42**, 145—152 (1956).

L'A. construit deux cônes doubles par la donnée des courbes de diramation et obtient des surfaces irrégulières dont le système canonique a une partie variable composée au moyen d'un faisceau de courbes de genre 2 ou 3. *L. Godeaux.*

Gallarati, Dionisio: Una proprietà caratteristica delle rigate algebriche. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **21**, 55—56 (1956).

En utilisant la formule de Picard-Alexander $\varrho + \varrho_0 = I + 4q + 2$, où ϱ est le nombre-base d'une surface algébrique, ϱ_0 le nombre de ses intégrales doubles de seconde espèce linéairement indépendantes, I l'invariant de Zeuthen-Segre, q l'irrégularité, l'A. montre qu'une surface de S_3 dont l'ordre et la classe sont égaux, est une réglée de genre q . *L. Godeaux.*

Godeaux, Lucien: Sur une surface du cinquième ordre possédant une droite double tacnodale. I, II. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **42**, 884—896, 897—905 (1956).

La surface F d'équation: $a_1 x_1^4 x_2 + a_2 x_2^4 x_3 + a_3 x_3^4 x_1 + a_4 x_4^5 + a_5 x_1 x_2 x_3 x_4^2 = 0$ est transformée en elle-même par l'homographie $x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 : e x_2 : e^{10} x_3 : e^8 x_4$ ($e^{13} = 1$). L'involution d'ordre 13 engendrée par cette homographie sur F possède trois points unis auxquels correspondent des points de diramation sur la surface f image de l'involution, points dont on peut étudier la structure. Une représentation de f est donnée par la surface du cinquième ordre; $X_1 X_2 X_3 X_4^2 + G^5 = 0$ [$G = a_5^{-1} (a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4)$] possédant dans la droite $X_4 = 0$, $G = 0$ une droite double tacnodale g . Etude des systèmes canoniques et pluricanoniques de f , d'où se déduisent les caractères $p_a = p_g = P_2 = 1$, $P_3 = P_4 = 2$, $P_5 = 4$, $P_6 = 5$, $P_7 = 8$. Dans le plan $X_4 = 0$, il y a deux droites doubles infiniment voisines et une autre droite simple infiniment voisine qui est courbe canonique de degré virtuel -1 , mais que l'A. démontre ne pas être exceptionnelle. Détermination du système 13-canonique d'où résulte que $P_{13} = 17$. *B. d'Orgeval.*

Severi, Francesco: Frammenti ricomposti e integrati. I. Le caratteristiche delle coniche nello spazio. Revista Un. mat. Argentina **17**, 251—264 (1956).

Es ist das Verdienst des Verf., die Methode der Charakteristiken in der abzählenden Geometrie, die im vergangenen Jahrhundert schrittweise und auf mehr induktivem Wege geschaffen worden war (Jonquières, Chasles, Halphen, Clebsch, Schubert, Zeuthen u. a.), von einwandfreien theoretischen Grundlagen abgeleitet, bedeutend erweitert und durch Berücksichtigung von Ausartungsmannigfaltigkeiten verschärft zu haben (Grundlagen der abzählenden Geometrie, dies. Zbl. **37**, 222). In derselben grundlegenden Arbeit wurde auch die Charakteristikentheorie der Kegelschnitte der Ebene vollständig aufgebaut. In der vorliegenden Arbeit werden einige Ergebnisse der Charakteristikentheorie der Kegelschnitte des Raumes S_3 mitgeteilt, und zwar mit Beschränkung auf die einfachen (d. i. eindimensionalen) Bedingungen und ohne Ausschließung der zerfallenden Kegelschnitte. Zunächst werden zwei Modelle für die Mannigfaltigkeit Σ der Kegelschnitte des S_3 besprochen: das erste Modell ist eine Segresche Mannigfaltigkeit $M = S_3 \times S_5$, deren Punkte ausnahmslos eineindeutig den Kegelschnitten von Σ zugeordnet sind, die aber den Nachteil hat, nicht linear zu sein; das zweite Modell kann mit Hilfe der Cayleyschen Form (Cayley 1860) der assoziierten Form (Severi 1915) oder der zugeordneten Form (van der Waerden und Chow 1937) konstruiert werden; es ist komplizierter, nicht singularitätenfrei und steht auch nicht in ausnahmslos eineindeutiger Korrespondenz zu den Kegelschnitten von Σ , weshalb es im folgenden nicht mehr berücksichtigt wird. — Verhältnismäßig leicht gelingt die Angabe der Basis für die Hyperflächen auf M (vgl. die allgemeine

Lösung des Basisproblems auf Segreschen Mannigfaltigkeiten bei Severi, Fondamenti per una teoria generale dei connessi, dies. Zbl. **37**, 226); sie ist eine zweigliedrige Minimalbasis und besteht aus einer Hyperfläche I , der Bildmenge aller Kegelschnitte des S_3 , die durch einen festen Punkt gehen, und J , der Bildmenge aller Kegelschnitte des S_3 , die eine feste Gerade treffen. Diesen entsprechen die Charakteristiken μ und ν , daß ein Kegelschnitt des S_3 durch einen festen Punkt gehe, bzw. eine feste Gerade treffe. Schließlich bestätigt eine kurze Rechnung, daß der Bedingung ν^8 , nämlich acht feste Gerade zu berühren, 92 irreduzible Kegelschnitte des S_3 genügen (Lüroth 1868, Hierholzer 1870, Schubert 1879). *W. Gröbner.*

Spampinato, Nicolò: La V_5 di S_3 determinata dalle coniche osculatrici una curva algebrica piana prolungata nel campo tripotenziale. Ricerca, Rivista Mat. pur. appl., II. Ser. **7**, Nr. 1, 43—58 (1956).

Eine tripotentiale Ebene ist der Ort aller tripotentiale Punkte mit den homogenen Koordinaten $\mu_j = a_j u + b_j v + c_j w$ ($j = 1, 2, 3$), wo a_j, b_j, c_j komplexe Zahlen bedeuten und u, v, w die Einheiten einer tripotentiale Algebra sind; die

betreffende Multiplikationstafel ist $\begin{vmatrix} u & v & w \\ v & w & 0 \\ w & 0 & 0 \end{vmatrix}$. Dem Punkte μ_j läßt Verf. die Ver-

bindungsebene der drei Punkte eines Raumes S_8 : $P(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3)$, $Q(0, a_1, b_1, 0, a_2, b_2, 0, a_3, b_3)$, $R(0, 0, a_1, 0, 0, a_2, 0, 0, a_3)$ entsprechen. Solche Ebenen bilden im S_8 eine Ebenenkongruenz 1. Ordnung, die hier in ihren Einzeleigenschaften beschrieben wird. Es wird dann die Abbildung der ∞^1 Punkte einer algebraischen tripotentiale Kurve $f(\mu_j) = 0$ untersucht; die Bildmannigfaltigkeit besteht aus

∞^1 Ebenen, welche die V_5 mit den folgenden Gleichungen $f(x_j) = 0$, $\sum \frac{\partial f}{\partial x_j} y_j = 0$,

$\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} z_i + \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} y_i y_j = 0$ erfüllen, wo x_j, y_j, z_j die Koordinaten im S_8 bedeuten. Es erweist sich als vorteilhaft, gleichzeitig mit der obigen Darstellung auch eine ähnliche Abbildung der bidualen Punkte der Ebene $a_j u + b_j v$ auf Geraden eines Raumes S_5 des S_8 einzuführen. Solche zwei gleichzeitigen Abbildungen können mit den Zweigen $x_j = a_j + b_j \varrho$, $x_j = a_j + b_j \varrho + c_j \varrho^2$, die eine ebene Kurve C bzw. berühren oder oskulieren, in Verbindung gesetzt werden; z. B. oskuliert $x_j = a_j + b_j \varrho + c_j \varrho^2$ die Kurve C dann und nur dann, wenn der tripotentiale Punkt $a_j u + b_j v + c_j w$ auf der tripotentiale erweiterten Kurve C liegt.

E. G. Togliatti.

Galafassi, Vittorio Emanuele: Classici e recenti sviluppi sulle superficie algebriche reali. Centre Belge Rech. math., Colloque Questions Réalité en Géométrie, Liège du 23 au 26 mai 1955, 131—147 (1956).

Conférence de caractère expositif dédiée fondamentalement à l'oeuvre, dans ce domaine, de A. Comessatti. L'A. considère aussi des résultats plus récents obtenus par lui-même concernant les surfaces réglées abstraites et le théorème de Harnack (ce Zbl. **49**, 111). *G. Ancochea.*

Rosina, Bellino Antonio: Sul numero dei circuiti dispari delle curve algebriche reali situate sopra superficie algebriche d'ordine dispari prive di singolarità. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **11**, 419—421 (1956).

Dans cette Note, l'A. donne l'extension d'un résultat de M. Piazzolla Beloch et A. Comessatti, et précisément démontre que le nombre des cycles d'ordre impair d'une courbe algébrique réelle d'ordre quelconque, sans points multiples située sur une surface algébrique réelle d'ordre impair sans singularités est \leq l'ordre de connexion de la partie impaire de la surface. *M. Piazzolla Beloch.*

Vektor- und Tensorrechnung. Kinematik:

• **Golańb, Stanisław:** Tensorrechnung. (Biblioteka Mat. T. 11,) Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe 1956. 309 S. [Polnisch].

Ein gründlicher Vortrag der Tensorrechnung samt ihrer geometrischen Anwendungen. Der erste Teil ist der Tensoralgebra gewidmet. Das erste Kapitel hat einen einleitenden Charakter. Dann werden die Begriffe des geometrischen Objektes, des Vektors und Affinors eingeführt und die invarianten algebraischen Operationen für die Affinoren angegeben. Der zweite Teil enthält die Tensoranalysis. Verf. entwickelt die Übertragungslehre, führt die Krümmungs- und Torsionstensoren, die Metrik im Raume, einige besondere Räume, die Differentialoperatoren und die Integralsätze ein. Der letzte (dritte) Teil enthält die Anwendungen der Tensorrechnung für die Betrachtung des eingebetteten Raumes.

W. Wrona.

Gheorghiu, O. Em.: Spezielle geometrische Objekte mit projektivem Transformationsgesetz. Academia RPR, Baza Cerc. sti. Timișoara, Lucrările Consfătuirii de Geometrie Diferențială 9—12 Iunie 1955, 201—208 (1956) [Rumänisch].

Verf. sucht die (nicht rein differentiellen) geometrischen Objekte z zweiter Klasse von einer Komponente im eindimensionalen Raum, die eine Transformationsformel der Gestalt $\bar{z} = [a_{11}(x, \bar{x}, \bar{x}', \bar{x}'')z + a_{12}(x, \bar{x}, \bar{x}', \bar{x}'')]/[a_{21}(x, \bar{x}, \bar{x}', \bar{x}'')z + a_{22}(x, \bar{x}, \bar{x}', \bar{x}'')]$ haben. Er findet zwei Typen von Objekten, deren Formeln zu verwickelt sind, um hier wiedergegeben werden zu können. Der skizzierte Beweis beruht auf verschiedenen Spezialisierungen des Funktionalgleichungssystems

$$A(x_1, x_3, y_1 z_1, y_2 z_1 + z_2 y_1^2) = A(x_2, x_3, z_1, z_2) A(x_1, x_2, y_1, y_2) \\ \left[A(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} a_{11}(x_1, x_2, y_1, y_2) & a_{12}(x_1, x_2, y_1, y_2) \\ a_{21}(x_1, x_2, y_1, y_2) & a_{22}(x_1, x_2, y_1, y_2) \end{pmatrix} \right],$$

die nicht immer einleuchtend sind. Es sei bemerkt, daß die Lösung von $d(yz) = d(y)d(z)$ [vgl. (16) S. 204] statt (17) $d(y) = y^m$ richtig $d(y) = \begin{cases} |y|^m \\ (\text{sign } y |y|)^m \end{cases}$ geschrieben werden sollte, da y auch negativ und m beliebig reell sein kann. J. Aczél.

Reade, Maxwell O.: On newtonian vector functions. Math. Scandinav. 4, 153—156 (1956).

Die Eigenschaften $\text{div } v = 0$ und $\text{rot } v = 0$ eines stetigen Vektorfeldes $v(x)$ werden aus den Bedingungen

$\lim_{r_k \rightarrow 0} \frac{1}{r_k^5} \int_{|\xi - \xi_k| \leq r_k} (\xi - \xi_k) v(\xi) dV_\xi = 0$ und $\lim_{r_k \rightarrow 0} \frac{1}{r_k^5} \int_{|\xi - \xi_k| \leq r_k} (\xi - \xi_k) \times v(\xi) dV_\xi = 0$ für jede konvergente Punktfolge $\{\xi_k\}$ abgeleitet und umgekehrt. Zur Beweistechnik vgl. eine frühere Note des Verf. (dies. Zbl. 71, 285). Cl. Müller.

Marsicano, Fèlix Roberto: Die Poinset-Kegel, die der Bewegung des Kreuzes bei der Cardan-Kupplung entsprechen. Atti Sem. mat. fis. Univ. Modena 7 (1953—54), 22—27 (1956) [Spanisch].

Rosenauer, N.: Synthesis of four-bar linkages with prescribed reduction ratio limits: application of complex variables. Austral. J. appl. Sci. 7, 1—9 (1956).

Verf. löst mit Hilfe der komplexen Darstellung die Aufgabe, ein Gelenkviereck zu entwerfen, für welches die größte und die kleinste Winkelgeschwindigkeit des Abtriebes bekannt sind, zunächst allgemein und erläutert dann das Verfahren an einem Zahlenbeispiel. W. Meyer zur Capellen.

Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

Wintner, Aurel: On Weyl's imbedding problem. Proc. nat. Acad. Sci. USA 42, 157—160 (1956).

Weyl conjectured, that any metric with continuous positive Gaussian curvature and C^1 components may be realized as Euclidean metric on a convex surface. The author disproved this conjecture (this Zbl. 70, 167). Nirenberg proved the imbedding theorems for C^r ($r > 4$) metrics (this Zbl. 51, 124). Here it is proved for C^4

metrics. The metric is approximated together with its derivatives up to the second order by analytic metrics. For analytic metrics, the imbedding problem is solved. The vector functions, giving the surfaces with the approximating metrics satisfy, together with its first and second partial derivatives, Hölder conditions valid for all surfaces at once. Hence there is a subsequence which converges in a Tonelli metric of second order. The Hölder conditions in question are Weyl's and Nirenberg's a priori estimates. Because of the use of Weyl's inequality, this method breaks down for $r < 4$.

H. Guggenheimer.

Minagawa, Takizo: Remarks on the infinitesimal rigidity of closed convex surfaces. *Kōdai math. Sem. Reports* 8, 41—48 (1956).

Beweis des Satzes: Eine glatte geschlossene konvexe Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$, konvex in dem allgemeinen Sinne, daß sie die Begrenzung eines konvexen Körpers darstellt, ist starr, wenn sie aus einer endlichen Zahl zweimal stetig differenzierbarer Stücke aufgebaut ist; darunter dürfen Stücke mit der Gaußsschen Krümmung 0 vorkommen; die Starrheit erstreckt sich aber nicht auf etwa vorhandene ebene Teilstücke; vom Transformationsvektor $\mathfrak{z}(u, v)$ wird nur einmalige Differenzierbarkeit gefordert. — Benutzt wird die vom Verf. gemeinsam mit Rado aufgestellte Verbiegungstheorie. Sie betrachtet statt der Fläche \mathfrak{x} eine aus ihr durch projektive Transformation mit Projektionszentrum in einem Punkt P positiver Krümmung von \mathfrak{x} gewonnene unendliche Fläche, die über einer Ebene einwertig ist, $z = z(x, y)$, und verwendet eine der Blaschkeschen Formel analoge Integralformel. Die Starrheit von \mathfrak{x} folgt aus der von $z(x, y)$ nach einer Idee von Darboux. In P wird $\mathfrak{z} = 0$, $d\mathfrak{z} = 0$ angenommen. Dann kann auf einem etwas mühsamen Weg mit gewissen Integralrelationen gezeigt werden, daß auf der ganzen Fläche z mit Einschluß etwaiger ebener Stücke für den Deformationsvektor (X, Y, Z) von z die Formeln $X + z_x Z = 0$, $Y + z_y Z = 0$ bestehen und auf den nichtebenen Teilen $Z = 0$ gilt. Bei der Voraussetzung dreimaliger Differenzierbarkeit von \mathfrak{x} und \mathfrak{z} ist der Satz früher in wenigen Zeilen bewiesen worden. (Efimow, Flächenverbiegung im Großen, Deutsche Übersetzung, Berlin 1957, § 33, S. 77).

E. Rembs.

Ryžkov (Ryzkov), V. V.: On the order of applicability of surfaces with corresponding conjugate systems. *Doklady Akad. Nauk SSSR* 110, 338—340 (1956) [Russisch].

Die Ordnung einer Abbildung zwischen n -dimensionalen Flächen im R_N bestimmt sich aus der Ordnung derjenigen verallgemeinerten Christoffelsymbole (Skalarprodukte der höheren Ableitungen des die Fläche beschreibenden Vektors nach den Parametern), welche bei der Abbildung ungeändert bleiben; eine Abbildung erster Ordnung ist also insbesondere eine Isometrie. Es werden Bedingungen dafür angegeben, daß zwei Flächen $x(u^\alpha; v^k)$, $y(u^\alpha; v^k)$ ($1 \leq \alpha \leq p$, $1 \leq k \leq q$) bei Erhaltung der Konjugiertheitsbeziehung der u -, v -Untermannigfaltigkeiten Abbildungen der Ordnung r gestatten.

D. Laugwitz.

Pan, T. K.: Centers of curvatures of a vector field. *Proc. Amer. math. Soc.* 7, 292—298 (1956).

Given a unit vector field v on a surface S in three dimensional euclidean space, several curvatures of v with respect to a given curve C of S have been defined (Graustein, this Zbl. 5, 119; Pan, this Zbl. 47, 404). In this paper, the corresponding centers of curvature and their properties are investigated.

L. A. Santaló.

Pinl, M.: Zur Integration der isotropen Komplexe in R_5 . *Monatsh. Math.* 60, 298—312 (1956).

In Fortsetzung seiner Untersuchungen über die Möglichkeit integralloser Darstellungen isotroper Mannigfaltigkeiten zeigt Verf., indem er sich einer transzendenten Darstellung der ∞^6 vollisotropen Ebenen des euklidischen R_5 bedient, daß es 1. möglich ist, die einfach isotropen Kurven $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t)$ des R_5 (mit $\mathfrak{x}^2 = 0$) explizit als Gratlinien einparametrischer vollisotroper Ebenenscharen zu gewinnen,

wobei vier analytische Funktionen eingehen, die bis auf eine differentielle Relation (Nebenbedingung) willkürlich sind; ferner ist es 2. möglich, die allgemeinen hyper-sphärischen isotropen Kurven $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t)$ des R_5 (mit $\mathfrak{x}^2 = r^2$ und $\dot{\mathfrak{x}}^2 \equiv 0$) in gleicher Weise, aber mit zwei Nebenbedingungen darzustellen, und zwar auch auf isotropen Hyperkegeln ($\mathfrak{x}^2 \equiv 0$). Deutet man 3. die Ortsvektoren der zuletzt genannten Kurven als Normalenvektoren einer einparametrischen isotropen R_4 -Schar von R_5 , so gewinnt man durch deren Gratlinien eine explizite Darstellung der zweifach isotropen Kurven $\eta = \eta(t)$ des R_5 (mit $\dot{\eta}^2 = 0$ und $\ddot{\eta}^2 \equiv 0$). Die genauere Diskussion der auftretenden (differentiellen) Nebenbedingungen zeigt die Möglichkeit, diese Darstellung in jedem Falle sogar integrallos zu gestalten. Als im Hilbertschen Sinne „diskriminierende“ Lösungen treten stets nur isotrope Geraden auf.

K. Strubecker.

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Sancho de San Román, J.: Kurven konstanter Affinbreite. Collect. Math. 8, 85—98 (1956) [Spanisch].

If $C(x = x(s))$ and $C_1(x_1 = x_1(s_1))$ are two curves in three dimensional space, and the parameters s, s_1 are the corresponding affine lengths, then the affine distance from x to x_1 is defined by the triple scalar product $V(s, s_1) = (x', x'_1, x_1 - x)$, where $x' = dx/ds$, $x'_1 = dx_1/ds_1$. The paper deals with the pairs of curves for which $\max V$ (for $s_1 \in C_1$) does not depend on s (pairs of affine equidistant curves). Essentially the properties given are the following: a) Such pairs are characterized by the conditions $(x', x'_1, x_1 - x) = 0$ and $(x'', x'_1, x_1 - x) = 0$; b) For every C there are infinite C_1 which form with C an affine equidistant pair. If C and C_1 coincide, the curve is said to be of constant affine width and the properties above apply. L. A. Santaló.

Blaschke, Wilhelm: Zur Affingometrie der Eiliniien und Eiflächen. Math. Nachr. 15, 258—264 (1956).

Eiliniien mit einer eingliedrigen geschlossenen Schar größter einbeschriebener Vierecke heißen P -Linien, solche mit Mittelpunkt R -Linien. P -Linien sind dadurch gekennzeichnet, daß sie Paare „konjugierter Durchmesser“ haben, deren einer beliebig wählbar ist. R -Linien, die zuerst J. Radon behandelt hat [Ber. Verhdl. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig, math.-phys. Kl. 68, 123—128 (1916)], sind die Eiliniien, welche durch eine Korrelation in sich übergehen, deren Quadrat die Spiegelung an einem Punkt ist. — Mit Hilfe der vom Verf. schon mehrfach bewiesenen Kennzeichnung des Ellipsoids als Eifläche mit ebenen Schattengrenzen bei Parallelbeleuchtung, für die hier ein neuer Beweis gegeben wird, lassen sich die Ellipsoide auch als solche Eiflächen charakterisieren, deren ebene Schattenbilder bei Parallelbeleuchtung stets von einer R -Linie berandet werden.

W. Süss.

Fernández, Germán: Affine Differentialgeometrie der Hyperflächen. Revista Un. mat. Argentina 17, 29—38 (1956) [Spanisch].

The author gives the essentials of the affine differential geometry of hypersurfaces by means of the notation and methods of E. Cartan. After the equations of Frenet, the following integral formula is proved: Let H_k be the affine mean curvature of order k ($k \leq n-1$) of a closed orientable hypersurface S at a point P , $d\Omega$ the element of affine area at P and w the affine distance from a fixed point O contained in the interior of S to P . Then $\int H_k d\Omega = \int H_{k+1} w d\Omega$, formula which generalizes to the affine geometry a well known result of the metric case.

L. A. Santaló.

● Centro Internazionale Matematico Estivo (C. I. M. E.): Geometria proiettivo-differenziale. (5° Ciclo. Pavia-Università degli Studi, 26 sett., 5 ott. 1955.) Roma: Istituto Matematico dell'Università 1956. 193, 44 p.

Die Arbeiten werden in diesem Zbl. einzeln angezeigt.

Villa, Mario: Progressi recenti nella teoria delle trasformazioni puntuali. Conferenze Sem. Mat. Univ. Bari 10, 17 p. (1956).

Sintesi di risultati precedenti concernenti le trasformazioni puntuali fra piani e precisamente: approssimazione dell'intorno del 2° ordine di una t. p. mediante trasformazioni quadratiche; riferimenti intrinseci; corrispondenza linearizzante di due t. p.; corrispondenze linearizzanti di Čech del 2° e 3° ordine. *P. Buzano.*

Picasso, Ettore: Una proprietà delle linee di Segre e di Darboux. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari 26, 79—82 (1956).

L'A. considère le tétraèdre $x x_u x_v X$ attaché à un point d'une surface, X étant le point où la normale projective coupe la seconde fois la quadrique normale. En nous déplaçant sur la surface au point $x + dx$, les faces correspondantes des deux tétraèdres se coupent le long des droites (D_1) , (D_2) , (D_3) , (D_4) . A l'aide de ces quatre droites on trouve d'intéressantes propriétés géométriques. On considère les points où les droites (D_2) et (D_3) coupent respectivement les deux tangentes asymptotiques; la droite qui joint ces deux points rencontre D_4 sur $x_u x_v$ quand $x + dx$ appartient à l'une des trois directions Segre, et réciproquement. L'A. donne une propriété analogue pour les lignes de Darboux. Il fait encore des considérations analogues quand le point X est un point quelconque de l'espace extérieur au plan tangent en x à la surface.

Gh. Th. Gheorghiu.

Picasso, Ettore: Sopra una generalizzazione della conica di Kommerell cui da luogo un sistema planare di curve su una superficie di S_4 . Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 11, 31—37 (1956).

L'A. considera un riferimento locale che in un generico punto $x(u, v)$ di una superficie di S_4 è determinato da un assegnato sistema planare di curve: presi due qualunque iperpiani coordinati relativi al punto (u, v) e i corrispondenti relativi al punto $(u + du, v + dv)$, i piani ad essi comuni, al variare di du e dv inviluppano una quadrica di cui viene determinata l'equazione. Variando la coppia prescelta di iperpiani coordinati si ottengono in tal modo 10 quadriche: di esse l'A. studia le coniche intersezioni col piano d'appoggio del sistema planare, stabilendo le condizioni perchè talune di esse risultino degeneri.

P. Buzano.

Jonas, Hans: Zur Theorie der Flächen mit Gewindekurven als Asymptotenlinien der einen oder der beiden Scharen. Math. Nachr. 15, 209—239 (1956).

Nach A. Terracini [Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur. 59, 441—461 (1924)] kann man die Flächen, deren Asymptotenlinien einer Schar Gewindekurven sind (in linearen Komplexen liegen), mittels asymptotischer Transformation aus Regelflächen gewinnen, wobei die Erzeugenden in Gewindekurven (Asymptotenlinien) übergehen. Die Flächen, deren Asymptotenlinien beider Scharen Gewindekurven sind, zerfallen in drei große Klassen; sie lassen sich nach K. Strubecker (dies. Zbl. 35, 236) als Cliffordsche Schiebflächen in einem elliptischen, quasielliptischen oder isotropen Raume erzeugen (Flächen $\Phi_I, \Phi_{II}, \Phi_{III}$); diese Erzeugungsweise führt auch zu einer einfachen integrallosen Darstellung dieser Flächen. — Verf. stellt den Zusammenhang dieser Ergebnisse mit einigen seiner früheren Untersuchungen her [A. Jonas, Ber. Berlin. math. Ges. 22, 49—63 (1923); dies. Zbl. 44, 174]. Er gibt zuerst kennzeichnende Bedingungen für die Flächen mit einer Schar von Gewindekurven als Asymptotenlinien und konstruiert dann die Flächen nach Terracini aus den Regelflächen. Er wendet sich dann zu den Flächen mit zwei Scharen von Gewindekurven als Asymptotenlinien, die nach Terracini aus Quadriken durch asymptotische Transformation gewonnen werden, behandelt jedoch weiterhin nur den Haupttypus Φ_I dieser Flächen, der den Bianchischen Flächen der Absolutkrümmung Null in einem elliptischen Raume äquivalent ist. Nachdem verschiedene Eigenschaften dieser Flächen (insbesondere ihr Zusammenhang mit den Biegungsflächen vom Typus des Weingartenschen Drehparaboloids) hergeleitet sind, gelingt es, auch ihre einfache, von K. Strubecker angegebene,

integralfreie Darstellung zu gewinnen und Regelflächen zu konstruieren, aus denen sie durch asymptotische Transformation abgeleitet sind. Schließlich wird die Tetraedrafläche $x^{2/3} + y^{2/3} - z^{2/3} = 1$, deren Asymptotenlinien beider Scharen kubische Raumkurven sind, aus den Blickpunkten der dargelegten Methoden studiert.

K. Strubecker.

• **Finikov, S. P.: Theorie der Kongruenzenpaare.** Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1956. 444 S. R. 15.15 [Russisch].

The book deals with the theories of stratifiable pairs of rectilinear congruences, T configurations of Finikof, θ configurations of Popof, triply conjugate systems of surfaces in ordinary projective space, etc. by exposing both projective and metric properties of these entities. The classical theorem of Bianchi, known as Theorem of Permutability, is the origin of the developments established early in the first quarter of the 20th century by Moscow school, and it is mainly due to Finikof and his pupils that the stratifiable pair of congruences has led to such many remarkable and important configurations and their natural and fruitful generalizations to the theory of rectilinear complexes and to spaces of higher dimensions. The contents are composed of twenty-seven chapters with an introduction as well as a literature list of 125 papers and reference books of 50 authors. Contents. I. Analytic preliminaries. II. Stratifiable pairs of congruences. III. Existence theorem for a stratifiable pair of congruences. IV. Conjugate pairs. V. Projective deformation of conjugate pairs. VI. Parabolic pairs. VII. Transformations of parabolic pairs. VIII. Stratifiable quaternaries. IX. Classes of conjugate quaternaries. X. Conjugate quaternaries of Pantazi. XI. Continuation of conjugate quaternaries. XII. Transformation of Calapso. XIII. Pair of T configurations. XIV. Pairs θ of Popof. XV. Transformation of T configurations. XVI. Theorem of permutability and transformation P of stratifiable pairs. XVII. Affinity of Jonas nets. XVIII. Pairs T of complexes. XIX. Involutive systems of complexes. XX. Stratifiable pair of curves. XXI. Twodimensional systems W with solid correspondences of lines. XXII. System W with functional arbitrariness. XXIII. Transformations of triply conjugate system R and stratifiable pairs of complexes. XXIV. Problem of stratifications of pairs of complexes. XXV. Problem of stratifications in P_n . XXVI. Metric theory of stratifiable pairs. XXVII. Symmetric stratifiable pairs.

Su Buchin.

Backes, Fernand: Recherches de géométrie anallagmatique. Acad. roy. Belgique, Cl. Sci., Mém., Coll. 8° 29, fasc. 8, 36 p. (1956).

Nach Ribaucour sind Weingarten-Flächen $f(R_1, R_2) = 0$ durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß ihre Normalen eine W -Kongruenz erzeugen (die Asymptotenlinien der Brennflächen entsprechen sich). Es wird hier zunächst die folgende Kennzeichnung der W -Flächen bewiesen: Beschreibt man über den auf den Normalen n einer Fläche Φ zwischen den Hauptkrümmungsmitten liegenden Segmenten $M_1 M_2$ die Kugeln σ , so schneidet die Verbindungsgerade g der Berührungspunkte $[B_1 B_2]$ dieser Kugeln mit ihrer Hüllfläche dann und nur dann die Flächennormale n , (oder n und g liegen dann und nur dann in einer Ebene) wenn die Fläche Φ eine W -Fläche ist. Das gilt auch noch, wenn man die doppelt so große Kugel \varkappa mit der Mitte auf n zeichnet, welche die beiden Hauptkugeln \varkappa_1, \varkappa_2 (mit den Mitten M_1, M_2) berührt. Dies führt in § 1 dazu, den Begriff der W -Flächen kugelgeometrisch dadurch zu verallgemeinern, daß man die Normale n durch einen flächennormalen Kreis k ersetzt und verlangt, daß Kugeln \varkappa , welche die Hauptkrümmungskugeln \varkappa_1 und \varkappa_2 in ihren Schnittpunkten mit k berühren, ihre Hüllfläche in solchen Punkten B_1, B_2 berühren, die mit k auf einer Kugel liegen (kosphärisch sind). Wenn dabei die Kreise k ein zyklisches System im Sinne von A. Demoulin [Mém. Soc. Roy. Sci. Liège, III. Sér. 11, 16—19 (1921)] bilden, so heißt Φ eine W_a -Fläche (= „anallagmatische W -Fläche“). Es werden zunächst analytische Kennzeichen der W_a -

Flächen hergeleitet; alle isothermen Flächen gehören dazu. — In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **67**, 137) hat Verf. eine kugelgeometrische Verallgemeinerung der Asymptotenlinien A einer Fläche Φ gegeben, bei der das System der Tangentenebenen τ durch ein System von Kugeln κ mit beliebigem Radius ρ ersetzt wird; die verallgemeinerten Asymptotenlinien A_ρ sollen dabei die Kugeln κ als Schmiegekugeln besitzen, und die beim Fortschreiten längs A_ρ entstehenden Hüllkreise (Charakteristiken) sollen die Kurven A_ρ berühren. Es wird dann in § 2 die allgemeinste Kreiskongruenz betrachtet, deren erzeugende Kreise Fokalkugeln besitzen, auf deren vier Brennflächen sich die Kurven A_ρ entsprechen. Die so entstehenden „ W -Kreise“ sind analytisch dadurch gekennzeichnet, daß ihre zehn Kreiskoordinaten einer Laplaceschen Gleichung genügen. In § 3 wird der Fall behandelt, daß die W -Kreise der Fläche Φ ein zyklisches System bilden. Ihre Orthogonalflächen sind dann W_a -Flächen. Schließlich wird in § 5 gezeigt: sind die einer W_a -Fläche zugehörigen zyklischen Kreise k zu einer festen Kugel orthogonal, so sind die Normalflächen dieser zyklischen Kreise notwendig W_a -Flächen. K. Strubecker.

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Leichtweiss, Kurt: Das Problem von Cauchy in der mehrdimensionalen Differentialgeometrie. III. Natürliche Gleichungen. Math. Ann. **132**, 201—245 (1956).

(Teil I, II s. dies. Zbl. **71**, 150.) Diese Arbeit zeigt, daß für jede analytische Untermannigfaltigkeit des n -dimensionalen euklidischen Raums natürliche Gleichungen gebildet werden können, d. h. daß irgendeine Untermannigfaltigkeit V_m durch derartige natürliche Gleichungen (d. h. Beziehungen zwischen geometrischen Invarianten der V_m und speziellen Parametern) eindeutig charakterisiert werden kann. Die Beweismethode, die Bezeichnungsweise und die verwandten Hilfssätze stammen aus Teil I dieser Arbeit). Erstens beweist der Verf. den Satz (Satz 10): Jede Hyperfläche V_m eines Raums R_{m+1} mit Riemannscher Metrik kann durch Vorgabe einer linear gebrochenen Funktion der elementarsymmetrischen Funktionen D_a ($a = 1, 2, \dots, m$) ihrer Hauptkrümmungen $1/R_a$ mit konstanten Koeffizienten in Abhängigkeit von geodätischen Parallelkoordinaten p^a — d. h.

$$\left(\sum_{a=1}^m \alpha_a D_a + \alpha \right) \left(\sum_{a=1}^m \beta_a D_a + \beta \right)$$

gleich der vorgegebenen beliebigen, im Nullpunkt analytischen Funktion $\varphi(p^a)$ — und durch einen Anfangsstreifen charakterisiert werden, wobei

$$\prod_{a=1}^m \left(y - \frac{1}{R_a} \right) = y^m - D_1 y^{m-1} + \dots + (-1)^m D_m = \|y g_{ab} - A_{ab}\|/g$$

($g = \|g_{ab}\|$, g_{ab} und A_{ab} sind die erste und zweite Grundform der V_m). Zweitens wird dieser Satz auf Hyperflächen in der Relativgeometrie [siehe E. Müller, Monatsh. Math. Phys. **31**, 3—19 (1921) und W. Süss, Japanese J. Math. **4**, 57—75 (1927)] verallgemeinert. Genauer: sei $\mathfrak{r}(u^a)$ eine Hyperfläche und $\mathfrak{e}(u^a)$ eine auf sie durch gleiche Parameterwerte bezogene Eichhyperfläche des $(m+1)$ -dimensionalen affinen Raums A_{m+1} , wobei die Tangentialhyperebenen von \mathfrak{r} und \mathfrak{e} in entsprechenden Punkten parallel sind und überall $F \equiv \|e, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \dots, \mathfrak{r}_m\| > 0$ gilt ($\mathfrak{r}_a \equiv \partial \mathfrak{r} / \partial u^a$). Außerdem soll überall $A \equiv \|A_{ab}\| \neq 0$ sein, wenn $A_{ab} \equiv \|\partial x_a / \partial u^b, \mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_m\|$ ist. Dann ist $G_{ab} = A_{ab}/A$ der erste Grundtensor für das Hyperflächenpaar, dagegen ist der zweite Grundtensor durch $B_{ab} \equiv \|e_{a,b}, \mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_m\|/F$ gegeben, während $e_{a,b}$ die zweite kovariante Ableitung von e in bezug auf den Tensor G_{ab} bedeutet. An Stelle von D_a stehen die als Koeffizienten des Polynoms $\|y G_{ab} - B_{ab}\|/G$ auftretenden elementarsymmetrischen Funktionen S_a ($a = 1, 2, \dots, m$) der sog. Relativhauptkrümmungen von \mathfrak{r} . Dann wird der Satz 11 bewiesen: Jedes Hyperflächenpaar kann durch Vorgabe einer vorgegebenen linear gebrochenen Funktion der S_a mit konstanten Koeffizienten und von r_a/r_e in

Abhängigkeit von relativgeodätischen Parallelkoordinaten p^a und durch einen Anfangsstreifen charakterisiert werden, wobei r_e und r_a der sog. Relativabstand des Ursprungs von ξ bezüglich e und der Affinabstand des Ursprungs von ξ bzw. sind. Durch Spezialisierung des Satzes, d. h. durch Setzung $r_a/r_e = 1$ bzw. $r_e = 1$ (aus der Beziehung $r_e = 1$ folgt $B_{ao} = G_{ab}$ und $S_1(p^a) = m$), lassen sich entsprechende Resultate für die Blaschkesche affine Differentialgeometrie (W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie II, Berlin 1923) bzw. für die Salkowskische gewinnen (Satz 12 und 13). Als Korollar folgt die Lösung des auf die affine Differentialgeometrie verallgemeinerten Problems von Björling. Drittens zeigt der Verf., daß man zur Bildung von natürlichen Gleichungen eines Hyperflächenpaares ξ, e in der relativen Differentialgeometrie auch die Picksche Invariante $J = \frac{1}{m(m-1)} A_{abc} A^{abc}$

an Stelle von r_a/r_e heranziehen kann, wobei $A_{abc} = ||\xi_{a,b,c}, \xi_1, \dots, \xi_m||/F$ und $\xi_{a,b,c}$ die dreifache kovariante Ableitung von ξ in bezug auf den Tensor G_{ab} bedeutet. Dabei müssen wir aber ξ, e durch einen Hyperflächenpaarstreifen zweiter Ordnung eindeutig festlegen (Satz 14). Weiter wird im Anschluß an C. Burstin und W. Mayer (Lehrbuch der Differentialgeometrie II, Berlin 1930) ein unabhängiges und vollständiges Invariantensystem einer V_m im euklidischen R_n definiert, aus dem natürliche Gleichungen der V_m gebildet werden können (Satz 15, 16 und 17). Dieses reduziert sich auf die Casorati-Krümmung [Acta math. 14, 95—110 (1890)]. Schließlich läßt sich ein Zusammenhang zwischen den Invarianten und der Einbettungszahl e von V_m angeben (Satz 18). Daraus folgt, daß das Verschwinden aller Invarianten dieses Systems die linearen Mannigfaltigkeiten charakterisiert. Auch die Beziehungen zwischen V_m und ihrer Untermannigfaltigkeit $V_{m'}$ ($m' < m$) lassen sich darstellen mittels der Invariantensysteme der beiden Mannigfaltigkeiten.

A. Kawaguchi.

Stojanović, Rastko: Some theorems on intransitive groups of motions. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. 10, 97—100 (1956).

Starting from a theorem of L. Bianchi and a theorem of G. Fubini on intransitive groups of motions in Riemannian spaces V_n the author demonstrates the theorems: 1. If a Riemannian space V_n admits a family of geodesically parallel hypersurfaces V_{n-1} of constant curvature, then V_n admits an intransitive group G_r of motions, $r = \frac{1}{2}n(n-1)$, for which the hypersurfaces V_{n-1} are the minimum invariant varieties. 2. If a Riemannian space of constant curvature V_n admits an intransitive group of motions G_{r_k} , where $r_k = \frac{1}{2}(n-k+1)(n-k)$ is the order of the group, the minimum invariant varieties of the group G_{r_k} are subspaces V_{n-k} of constant curvature and geodesically parallel with respect to some enveloping subspaces V_{n-k+1} of V_n , which are also of constant curvature. 3. The group G_{r_k} from the theorem 2 is the group of stability of a $(k-1)$ -dimensional total by geodesic subspace V_{k-1} of V_n .

V. Dumitraş.

Varga, O.: Eine Charakterisierung der Kawaguchischen Räume metrischer Klasse mittels eines Satzes über derivierte Matrizen. Publ. math., Debrecen 4, 418—430 (1956).

Verf. zieht einen Kawaguchischen Raum in Betracht, der dadurch festgelegt ist, daß das Oberflächenelement einer p -dimensionalen Mannigfaltigkeit durch $dO = L(x^1, \dots, x^n; [dx^{i_1}, \dots, dx^{i_p}])$ bestimmt ist, wobei $p < n$. $[dx^{i_1}, \dots, dx^{i_p}]$ bedeuten dabei Komponenten des tangierenden einfachen p -Vektors im Punkt x^i der Mannigfaltigkeit. Die Funktion $L(x; q)$, die für alle reellen Zahlen n -tupel x^i und für $N (= \binom{n}{p})$ nicht sämtlich verschwindende reelle Zahlen $q^{i_1 \dots i_p}$ an Stelle der p -Vektor-Komponenten definiert ist, soll stets positiv, genügend oft stetig differenzierbar nach allen Argumenten und positiv-homogen von erster Dimension in den Argumenten (q) sein. Die N Veränderlichen $q^{i_1 \dots i_p}$ bedeuten dabei nicht

unbedingt die Komponenten eines einfachen p -Vektors, hingegen stets die Komponenten eines p -Vektors. (Vgl. A. Kawaguchi, dies. Zbl. 14, 322.) Indem man $\frac{1}{2} L^2$ zweimal nach den $g^{i_1 \dots i_p}$ differenziert, erhält man den Tensor $g_{i_1 \dots i_p; j_1 \dots j_p}$ der in bezug auf die Indizes i_1, \dots, i_p bzw. j_1, \dots, j_p schiefssymmetrisch ist. Der Kawaguchische Raum heißt von metrischer Klasse, falls die Beziehung

$$g_{i_1 \dots i_p; j_1 \dots j_p} = p! g_{[i_1 j_1} g_{i_2 j_2} \dots g_{i_p j_p]}$$

erfüllt ist, d. h. die von $g_{i_1 \dots i_p; j_1 \dots j_p}$ gebildete quadratische Matrix $G^{(p)} = ||g_{i_1 \dots i_p; j_1 \dots j_p}||$ N -ter Ordnung die p -te Derivierte einer gegebenen Matrix $||g_{ij}||$ n -ter Ordnung ist. (Vgl. R. Debever, dies. Zbl. 35, 106.) Verf. gibt eine etwas modifizierte Definition des Kawaguchischen Raumes metrischer Klasse, aber diese ist im wesentlichen dieselbe wie die Debeversche. Hauptziel dieser Arbeit ist, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufzustellen, daß ein Kawaguchischer Raum von metrischer Klasse ist (vgl. D. E. Rutherford, dies. Zbl. 42, 13). Die Bedingungen bestehen aus den folgenden vier Gruppen von Relationen:

$$(B_1) \quad a_{[j_1 \dots j_p}^{k_1 \dots k_p} a_{s_1 \dots s_p}^{k_1 \dots k_p} = 0$$

(nach den gleichen oberen Indizes nicht summieren), mit $a_{j_1 \dots j_p}^{k_1 \dots k_p} = g_{k_1 \dots k_p; j_1 \dots j_p}$.

$$(B_2) \quad a_{[i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_p} a_{j_1 j_2 \dots j_p}^{s_1 \dots s_p} = -a_{[i_1 \dots i_p}^{k_1' \dots k_p'} a_{j_1 j_2 \dots j_p}^{s_1' \dots s_p'}, \quad n \geq p + 2,$$

wobei die Indexserien k_1, \dots, k_p und s_1, \dots, s_p in $p - 2$ Zahlen übereinstimmen, während die Zahlenpaare k_i, k_i' bzw. s_j, s_j' voneinander verschieden sind. k_1', \dots, k_p' und s_1', \dots, s_p' sind dabei diejenigen Indexserien, die durch Vertauschung von einem der Indizes k_i, k_i' mit einem der Indizes s_j, s_j' aus k_1, \dots, k_p und s_1, \dots, s_p entstehen.

(B₃) Für M der einfachen p -Vektoren aus der Reihe der p -Vektoren ($a_{j_1 \dots j_p}^{1 \dots p}, \dots, a_{j_1 \dots j_p}^{n-p+1 \dots n}$) (die oberen Indizes dienen nur zur Unterscheidung der p -Vektoren) bilden wir nach folgender Vorschrift ihr alternierendes Produkt: treten bei einem p -Vektor etwa h obere Indizes auf, die in der angeschriebenen Reihenfolge der p -Vektoren als obere Indizes schon vorkommen, dann sollen bei diesem p -Vektor h der unteren Indizes bei der Bildung der Alternation ausgeschlossen werden. Dieses Verfahren wird bei jedem weiteren p -Vektor wiederholt. Sind unter den oberen Indizes der M p -Vektoren gerade $m \leq n$ verschiedene Indizes vorhanden, dann stellt das alternierende Produkt bei Festhaltung der ausgeschlossenen Indizes einen einfachen m -Vektor dar. Bildet man auf dieselbe Art aus einer anderen Reihe von einfachen p -Vektoren das alternierende Produkt, wobei jetzt auch die Anzahl der p -Vektoren nicht mit derjenigen der früheren übereinstimmt, dann stimmen die beiden einfachen m -Vektoren bis auf einen Faktor überein, falls die beiden Reihen von m verschiedenen Indizes, in beiden Produkten, abgesehen von einer Permutation, identisch sind. — (B₄) Bilden wir nach (B₃) dadurch n verschiedene einfache $(n-1)$ -Vektoren, daß in der Reihe der verschiedenen oberen Indizes sämtliche der Zahlen von 1 bis n , mit Ausnahme von stets je einer, vorkommen, dann ist die aus diesen $(n-1)$ -Vektoren als Spalten oder Zeilen gebildete Matrix regulär. Die Beweismethode ist rein algebraisch. Bemerkung des Ref.: Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen sind vom Ref. und K. Tandai in anderen Formen aufgestellt worden (A. Kawaguchi und K. Tandai, dies. Zbl. 49, 236). A. Kawaguchi.

Papy, Georges: Sur la définition intrinsèque des vecteurs tangents à une variété de classe C^r lorsque $1 \leq r < \infty$. C. r. Acad. Sci., Paris 242, 1573—1575 (1956).

Dans Theory of Lie groups (p. 76, Princeton 1946), Chevalley a donné une définition intrinsèque des vecteurs tangents à une variété analytique réelle et la même définition a été utilisée par S. S. Chern (Topics in differential geometry, Princeton 1951, p. 14—15) puis par Ambrose et Singer (ce Zbl. 52, 180) dans le cas d'une variété différentiable C^∞ . L'A. montre ici que pour une variété de classe C^r ($1 \leq r < \infty$), les vecteurs tangents au sens de Chevalley-Chern engendrent un espace de dimension infinie. Le véritable espace vectoriel tangent peut être obtenu

par un passage convenable au quotient. Un résultat identique, basé sur une technique différente, vient d'être signalé par A. G. Walker. *A. Lichnerowicz.*

Schouten, J. A.: **On currents and their invariant derivatives. I.** Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **59**, 371—380 (1956).

Extension aux courants (au sens de G. de Rham, Variétés différentiables, ce Zbl. **65**, 324) de formules et de calculs tensoriels. *P. Lelong.*

Slebodziński, W.: **Sur l'équivalence des formes différentielles extérieures du second degré.** Rozprawy mat. **11**, 32 p. (1956).

Es handelt sich um das Problem der Äquivalenz zweier kovarianter Bivektorfelder in X_n . Für $n = 4$ ist die Lösung gegeben durch Yen Chih Ta (dies. Zbl. **34**, 199), aber seine Methode ist nicht verallgemeinerungsfähig. Im ersten Abschnitt wird das vollständige Invariantensystem eines Systems S von zwei Bivektorfeldern bestimmt. Im Falle, daß die skalaren Invarianten des Systems S unabhängig sind, läßt sich das Problem der Äquivalenz zweier Systeme S lösen. Es wird auch gezeigt, wie ein System S verbunden ist mit einer affinen Übertragung in X_n . Im zweiten Abschnitt wird gezeigt, wie mit einem Bivektorfeld Ω stets ein anderes Bivektorfeld existiert, das zusammen mit Ω ein System S bildet. Mit Hilfe des Resultats des ersten Abschnittes wird das Äquivalenzproblem gelöst außer in den Ausnahmefällen. Im dritten Abschnitt wird eine andere Methode angewandt, die für alle Fälle gilt. Es wird gezeigt, wie jedes Bivektorfeld invariant verbunden ist mit einer symplektischen Übertragung ohne Krümmung, und mit Hilfe dieser Übertragung wird das Problem gelöst unter Hinzuziehung der Cartanschen Theorie der Systeme Pfaffscher Formen in Involution. *J. A. Schouten.*

Graeub, Werner und Rolf Nevanlinna: **Zur Grundlegung der affinen Differentialgeometrie.** Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A. I **224**, 23 S. (1956).

Die Grundlagen der Theorie des affinen Zusammenhangs und der kovarianten Differentiation werden in der indexfreien Schreibweise entwickelt, die der zweite Verf. neuerdings einzuführen bestrebt ist. *D. Laugwitz.*

Vranceanu, Georges: **Les transformations crémoniennes entières et les espaces à connexion affine.** C. r. Acad. Sci., Paris **243**, 1997—1999 (1956).

Let u^i , $i = 1, \dots, n$ be cartesian coordinates in a Euclidean space E_n and (1) $u^i = u^i(x)$, $x = (x^1, \dots, x^n)$ a regular (invertible) transformation. The fundamental equations of an affine connection $\partial^2 u^i / \partial x^j \partial x^k = -\Gamma_{jk}^i \partial u^i / \partial x^s$, $\Gamma_{jk}^i(u)$ holomorphic functions, determine a locally euclidean space A_n which is globally equivalent to E_n . If the u^i 's are polynomials an Engel-B. Segre theorem shows that $\Delta = \text{Det.}(\partial u^i / \partial x^j) = \text{a constant} \neq 0$ is the necessary and sufficient condition that (1) is an entire Cremona transformation (x^i polynomials of the u^i 's); in this case the Γ_{jk}^i are also polynomials and $\Gamma_k = \Gamma_{jk}^j = 0$. It follows that an entire Cremona transformation determines a locally euclidean affinely connected space A_n , globally equivalent to E_n , with $\Gamma_k = 0$ and viceversa. Examples of entire Cremona transformations and of their connections are also given. *E. Bompiani.*

Sulanke, Rolf: **Anmerkung zu der Arbeit: Die eindeutige Bestimmtheit des von Hanno Rund eingeführten Zusammenhangs in Finsler-Räumen.** Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin, math.-naturw. R. **5** (1955/56), 269 (1956).

In the paper referred to in the title (cf. this Zbl. **66**, 402) the author derived the connection coefficients of a Finsler space (originally due to E. Cartan) by means of three postulates imposed upon the corresponding parallel displacement. It is shown that for the purpose of the present derivation only two of these postulates are essential. *H. Rund.*

Širokov, A. P.: **Berichtigung zu der Arbeit „Projektiv-Euklidische symmetrische Räume“.** Trudy Sem. vektor. tenzor. Analizu **10**, 309—310 (1956) [Russisch].

Berichtigung zu der in dies. Zbl. **40**, 93 besprochenen Arbeit.

Bochner, Salomon: Curvature and Betti numbers in real and complex vector bundles. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. **15**, 225—253 (1956).

This paper is an analysis of „Bochner's Lemma“ (cf. Yano and Bochner, Curvature and Betti Numbers, this Zbl. **51**, 394) within the framework of the author's theory of tensors regarded as vectors in an appropriate matrix structure (cf. Bochner, this Zbl. **45**, 431). The first part of the paper is an exposition of this theory from the analytical point of view, the translation into the language of fiber spaces is only alluded to. In the second part, Bochner's Lemma is proved within the framework of this theory for compact manifolds, for open manifolds and tensors with vanishing boundary values, and for almost automorphic tensors (cf. Bochner and Yano l. c. last chapter) on open manifolds. It is then shown that all known versions and generalizations of Bochnerian theorems on „Curvature and Betti Numbers“ are consequences of the Lemma so enunciated.

H. Guggenheimer.

Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

Haupt, Otto: Sur quelques problèmes de la théorie des ordres géométriques. Centre Belge Rech. math., Colloque Questions Réalité en Géométrie, Liège 23—26 Mai 1955, 59—76 (1956).

Bericht und Literaturverzeichnis über bisherige Ergebnisse und noch offene Probleme bei der Untersuchung von Kontinuen, speziell Kurven und Flächen, im R_n unter dem Gesichtspunkt der geometrischen Ordnung; Existenz ordnungshomogener Bogen, regulärer und (elementarer und nicht elementarer) singulärer Punkte gegebener Ordnungen; Zusammenhang mit Vierscheitelsatz, Satz von Juel-Stenfors und ähnlichen Sätzen; ordnungsfeste Erweiterung von Bogen; Klassifizierung der singulären Punkte einer Kurve im R_n nach der gegenseitigen Lage der vorderen und hinteren k -dimensionalen Tangentialschmieghalbräume ($1 \leq k \leq n$) mittels der „signierten Permutationen“ und deren Zusammenhang mit der „kombinatorischen Mindestordnung“ eines Punktes (dies. Zbl. **24**, 283); Zusammenhang der geometrischen Ordnung mit einer Verallgemeinerung der Dupinschen Indikatrix auf $(n-1)$ -dimensionale Flächen.

H. Künnet.

Marchaud, André: Propriétés différentielles des courbes et des surface d'ordre borné. Centre Belge Rech. math., Colloque Questions Réalité en Géométrie, Liège 23—26 Mai 1955, 39—76 (1956).

Bericht über die tiefgehenden, ordnungsgeometrischen Untersuchungen des Verf. betreffend vor allem Flächenstücke (abgekürzt FS) und Flächen (kurz F) 3. Ordnung im projektiven R_3 . [Von einigen Bemerkungen abgesehen (vgl. etwa Seite 53, Zeile 9 v. u. ff. bis Seite 54, Zeile 4) sind die Ergebnisse bereits veröffentlicht.] Der Bericht gliedert sich so: I. Kontinua im R_n , insbesondere im R_2 bzw. R_3 , von beschränkter Ordnung insbesondere von 2. und 3. bzw. von 3. und 4. Ordnung bezüglich des Systems der Hyperebenen. [Vgl. Acta math. **55**, 67—115 (1930).] — II. Fundamentaltheorem über Paratingent (faisceau des tangentes) und Kontingent (faisceau dérivé) eines FS $z = f(x, y)$, wobei f stetig und etwa über einer abgeschlossenen Kreisscheibe definiert ist. [Vgl. etwa Ann. Sci. Écol. norm. Sup., III. Sér. **69**, 303—370 (1952); dies. Zbl. **48**, 163.] — III. Differentielle Eigenschaften 1. Ordnung von FS $z = f(x, y)$, die lokal von beschränkter Ordnung k im weiteren Sinne sind; darunter wird verstanden, daß zum jeweils betrachteten Punkt des FS eine Umgebung auf dem FS gehört, die von jeder Geraden, die keine Strecke mit dem FS gemeinsam hat, in maximal k Punkten getroffen wird. (Vgl. l. c., dies. Zbl. **48**, 163.) — IV. Differenzierbarkeitseigenschaften der geschlossenen Flächen 2. und 3. Ordnung, insbesondere der geradlinigen und der nirgends konvexen. [Vgl. etwa dies. Zbl. **23**, 67; sowie J. Math. pur. appl., IX. Sér. **31**, 319—340 (1952); dies. Zbl. **48**, 163.]

Otto Haupt.

Picone, Mauro: Il parametro monormale di una varietà regolare dello spazio euclideo. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fiz. mat. natur., VIII. Ser. 20, 705—711 (1956).

Généralisation au cas de variétés euclidiennes régulières de dimension quelconque, de classe deux et de base convexe, de ce que l'A. et G. Fichera avaient défini dans leur „Trattato di Analisi matematica“, vol. II. (Rome, 1956) no 58 sous le nom de „paramètre tubulaire“ pour les courbes de R^3 . „Paramètre monormal“ est une abbréviation pour „paramètre d'unicité du segment normal“. A. Revuz.

Harrold jr., O. G.: A theorem on disks. Proc. Amer. math. Soc. 7, 153—154 (1956).

Soit J_1 une courbe fermée simple dans l'espace R^3 ; supposons qu'il existe sur J_1 un arc limité par les points a, b tel que, sur cet arc, l'une des coordonnées s'exprime en fonction d'un paramètre par une fonction à variation bornée; dans ces conditions, on peut trouver un disque plan D_1 „transverse“ à J_1 au sens suivant: $D^1 \cap J^1$ se réduit à un seul point de l'arc ab , intérieur à D_1 et le bord de D^1 enlace J^1 .

R. Thom.

Fort jr., M. K.: A geometric problem of Sherman Stein. Pacific J. Math. 6, 607—609 (1956).

Let R_2 be the Euclidean plane. The main result is the following theorem, suggested by Research problem 25, Bull. Amer. math. Soc. 61, 465 (1955). Theorem: If $J \subset R_2$ is a Jordan curve, and H is an uncountable set of rotations about some one point such that for each $R \in H$ there is a translation T such that $(TRJ) \cap J$ has a nondegenerate component, then J contains an arc of a circle. The proof is based upon the interesting Lemma: If A and B are topological arcs in R_2 and A contains an infinite number of subarcs, each of which is congruent to B , then B is either an arc of a circle or a segment of a straight line. Implicitly, the following question is raised: Let $J \subset R_2$ be a rectifiable Jordan curve, with the property that for each rotation R , there is a translation T , depending on R , such that $(TRJ) \cap J$ has a nonzero length. Must there exist a circle C such that $C \cap J$ has nonzero length? (An example is given of such a J such that for no C does $C \cap J$ contain a nondegenerate component.)

S. Stein.

Nasu, Yasuo: On angular measure in a metric space. Tôhoku math. J., II. Ser. 8, 1—12 (1956).

This paper is concerned with the study of a certain type of metric spaces, namely the so-called G -spaces, which were studied systematically for the first time by Busemann [Trans. Amer. math. Soc. 56, 200—274 (1944)]. An angular measure Ψ is introduced for 2-dimensional G -spaces by means of postulates similar to those proposed by Busemann (this Zbl. 33, 102; this paper is not mentioned by the author). Using Ψ , the excess F of a triangle may be defined in the usual manner. This leads to a definition of the generalised Gaussian curvature, provided that Ψ be continuous and F be of bounded variation. For a G -space of constant curvature (in the sense of Busemann, first reference) the classification and the definitions of an earlier paper of the author (this Zbl. 70, 174) are used, and a Gauss-Bonnet theorem with respect to so-called „normal“ triangles is given for such spaces. In this connection, however, the following references to the work of Busemann should have been made: this Zbl. 40, 241; Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 4, 256—269 (1955); The geometry of geodesics, New York 1955.

H. Rund.

Strel'cov, V. V.: Über eine Abbildung einer Fläche negativer Krümmung. Izvestija Akad. Nauk Kazach. SSR, Ser. Mat. Mech. 5 (9), 29—44 (1956) [Russisch].

Das wesentliche Ergebnis der vorliegenden Arbeit ist der Beweis des folgenden Satzes: Jede einer Kreisscheibe homöomorphe Fläche F mit nirgends positiver Krümmung und bei der jeder Bogen des Randes eine π nicht überschreitende positive geodätische Abweichung hat, kann man stetig so auf die Ebene abbilden, daß 1. die

Abbildung auf dem Rande längentreu ist, 2. die geodätischen Abweichungen (d. h. die Verallgemeinerungen der Integrale über die Krümmung) der den Randbogen AB von F zugeordneten ebenen Randstücke $A_0 B_0$ nicht negativ und gleich dem positiven Teil der Abweichung von AB sind, 3. die Längen beliebiger Kurven in der Ebene nicht größer sind als die ihrer Urbilder auf F . Der Beweis dieses Satzes erfordert einigen Aufwand. Zunächst wird gezeigt, daß auf F durch zwei Punkte nicht mehr als eine Kürzeste geht und daß man von jedem Punkt in jeder Richtung solche Kürzesten ziehen kann. Geodätische Linien auf F , die Randpunkte A, C und B, D verbinden, deren Winkel mit dem Rande an A und B sich zu π ergänzen, heißen parallel, und aus solchen Parallelen und den dazwischenliegenden Randstücken werden sog. Trapeze auf F begrenzt. Der erwähnte Satz wird dann zunächst für solche Trapeze und danach für die Reststücke, in die F nach Herausnahme eines Trapezes zerfällt, bewiesen, worauf er dann für ganz F sich als gültig erweist. Die Voraussetzungen und Begriffsbildungen sind die in der Schule von A. D. Aleksandrov üblichen (vgl. Aleksandrov, Innere Geometrie konvexer Flächen; dies. Zbl. 38, 352; 65, 151).

W. Burau.

● **Pogorelow, A. W.: Die eindeutige Bestimmung allgemeiner konvexer Flächen.** (Schriftenreihe des Forschungsinstituts für Mathematik bei der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Heft 3.) Berlin: Akademie-Verlag 1956. 79 S. DM 5,50.

Das russische Original der vorliegenden Übersetzung ist im Jahre 1952 in Kiev erschienen. Derselbe Verf. hatte aber bereits unter fast dem gleichen Titel 1949 eine Schrift veröffentlicht (dies. Zbl. 41, 508). Auf das dazu gegebene ausführliche Referat kann auch bei der vorliegenden Arbeit in vielen Einzelheiten verwiesen werden. Inhaltliche Überschneidungen gibt es auch mit der weiteren Schrift von Pogorelov, Verbiegung konvexer Flächen, dies. Zbl. 45, 425. Wesentlich gegenüber den älteren Arbeiten ist jedoch die zentrale Rolle, die jetzt die sog. Kurven beschränkter Schwenkungsvariationen spielen, mit denen sich Zalgaller erstmals ausführlich beschäftigt hat (dies. Zbl. 39, 181). Unter Schwenkungsvariation (Ref. hatte früher statt Schwenkung Abweichung gesagt) $\omega(\gamma)$ eines Kurvenbogens γ auf der stetigen Fläche F wird dabei der obere Limes der Außenwinkelsummen aller γ einbeschriebenen geodätischen Polygone verstanden, und Kurven mit endlichem $\omega(\gamma)$ erweisen sich als brauchbarer Ersatz der differenzierbaren Kurven. Solche Kurven besitzen nämlich überall rechte und linke Halbtangenten, die bis auf höchstens endlich viele Stellen zusammenfallen. Diese Kurven werden zunächst in R_3 definiert, für Kurven γ auf der konvexen Fläche F sind zwei Schwenkungsvariationen von γ nach verschiedenen Seiten zu unterscheiden. Dabei hat man keine einbeschriebenen geodätischen Polygonzüge zu wählen, sondern solche, die mit γ zusammen nach der einen oder anderen Seite einen dem Kreis homöomorphen Bereich begrenzen. Der Hauptzweck der Schrift ist der Beweis des Satzes, daß geschlossene, konvexe und isometrische Flächen, über die nur Stetigkeitsannahmen gemacht werden, kongruent sind. Der Beweis dafür findet sich erst am Schluß, aber der Weg dahin ist recht mühsam. Aus der erst am Schluß zum Widerspruch geführten Annahme, daß es zwei isometrische, aber nicht kongruente, konvexe Flächen F_0 und F_1 gebe, werden über große Teile des Büchleins hindurch viele Folgerungen gezogen. Vor allem wird gezeigt, daß es dann auch eine stetige Schar isometrischer, nicht kongruenter Flächen gibt, d. h. daß man F_0 und F_1 beliebig wenig voneinander verschieden wählen kann. Eine besonders wichtige Bildung ist dann die Flächenschar $F_\lambda = \lambda F_0 + (1 - \lambda) F_1$. Man versteht dabei unter F_λ den Ort aller Punkte, die die Verbindungsstrecke isometrisch zugeordneter Punkte aus F_0 und F_1 im Verhältnis $\lambda:(1 - \lambda)$ teilen. Für genügend benachbarte F_0, F_1 und λ, μ , die hinreichend wenig von $\frac{1}{2}$ verschieden sind, erweisen sich auch F_λ und F_μ als isometrisch. Zur analytischen Behandlung wird eine (x, y) -Ebene eingeführt, bezüglich der sich F_0 und F_1

kanonisch verhalten, d. h. auf die sie eindeutig projiziert werden können und mit der ihre Stützebenen Winkel bilden, die $< \vartheta < \frac{1}{2}\pi$ sind. Isometrisch zugeordnete Kurven γ_0 und γ_1 heißen dann abstandsgleich, wenn entsprechende Punkte gleiche z -Koordinate haben; ferner heißen sie normal, wenn sie beschränkte Schwenkungsvariation besitzen, keine konischen Punkte enthalten und höchstens solche Kantenpunkte, in denen sie nicht die Kante berühren. Schließlich soll in entsprechenden Punkten von γ_0 und γ_1 die Stützebene an F_0 mit der (xy) -Ebene einen größeren Winkel bilden als die Stützebene an F_1 . Ein wesentliches Ergebnis der sehr mühevollen Betrachtungen und Abschätzungen ist dann der Nachweis, daß es keine geschlossenen, abstandsgleichen Normalkurven geben kann. Zum Schluß werden dann zwei geschlossene normale, abstandsgleiche Kurven auf F_0 und F_1 konstruiert, womit die Annahme der Isometrie von F_0 und F_1 , ohne daß die Flächen kongruent sind, zum Widerspruch geführt wird.

W. Burau.

Rešetnjak, Ju. G.: Über eine Verallgemeinerung der konvexen Flächen. Mat. Sbornik, n. Ser. **40 (82)**, 381—398 (1956) [Russisch].

A closed subset M of E^n (euclidean n -space) is said to be an O_δ -set if to any point $X \in M$ there is attached a system of „supporting“ solid spheres $\mathfrak{S}_\delta(X)$ through X of radius $\delta > 0$ such that (i) no interior point of a supporting sphere belongs to M , (ii) the intersection of the system of supporting spheres at X contains an interior point, (iii) if $X_m \in M$ and S_m a supporting sphere at X_m , and if $X_m \rightarrow X_0$ whereas $S_m \rightarrow S_0$, then S_0 is a supporting sphere at X_0 . A surface in E^n is by definition the homeomorphic image of an $(n-1)$ -cube. The author shows that an O_δ -surface M is locally representable as the difference of two convex functions, i. e. in a certain neighbourhood U of any preassigned point $\in M$ there is a cartesian coordinate frame such that $x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1}) - h(x_1, \dots, x_{n-1})$, with g and h convex functions, represents M in U . Further it is shown that the geodesics on such a surface are of bounded curvature.

W. T. van Est.

Lumer, G.: Polygone, die konvexen Kurven einbeschreibbar sind. Revista Un. mat. Argentina **17**, 97—102 (1956) [Spanisch].

The author proves: a) Besides the circle there exist other convex curves in which an inscribed square can be rotated of 360° ; b) The only polygons which can be rotated of 360° keeping the vertices on a convex curve are those inscribable in a circle; c) The area of the convex curve in which a polygon can be rotated, can be less than the area of the circumscribed circle.

L. A. Santaló.

Pucci, Carlo: Sulla inscrivibilità di un ottaedro regolare in un insieme convesso limitato dello spazio ordinario. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **21**, 61—65 (1956).

Zu jeder beschränkten, offenen, konvexen Punktmenge K im E^3 gibt es ein reguläres Oktaeder, dessen Ecken auf der Begrenzung von K liegen. Der Beweis benutzt das Haarsche Maß auf der Gruppe der Drehungen, einen Satz von E. E. Floyd [Proc. Amer. math. Soc. **6**, 957—959 (1955)] und den allgemeinen Satz, daß es zu jeder beschränkten offenen konvexen Punktmenge K im E^n und zu einem vorgegebenen orthogonalen Koordinatensystem einen n -dimensionalen Rhombus gibt, dessen n Achsen zu den Koordinatenachsen parallel sind und dessen $2n$ Ecken auf der Begrenzung von K liegen.

G. Aumann.

Hadwiger, H.: Über einen Satz Hellyscher Art. Arch. der Math. **7**, 377—379 (1956).

Verf. beweist den Satz: Es sei $k \geq 2$. Werden je $k+1$ Körper einer (1) abzählbar unendlichen Menge im k -dimensionalen euklidischen Raum (2) disjunkt liegender (3) kongruenter und (4) eigentlicher (d. h. innere Punkte enthaltender) Eikörper von einer geeigneten Geraden getroffen, so gibt es eine Gerade, die alle Körper der Menge trifft. Durch Beispiele wird gezeigt, daß keine der vier einschränkenden Voraussetzungen entbehrlich ist.

H. Gericke.

Masotti Biggiogero, Giuseppina: *La geometria integrale.* Rend. Sem. mat. fis. Milano **25**, 164—231 (1956).

A very complete exposition of the fundamental concepts and results on which the integral geometry in the plane and in the space is based, with a short account of the recent developments of the theory. The paper is mainly expository though it contains some new integral formulas of the author referring to convex domains on the plane and on the space. The paper ends with an almost exhaustive bibliography on the subject.

L. A. Santaló.

Topologie :

● **Martinelli, Enzo:** *Lezioni di topologia.* Vol. I. (Anno accademico 1955—56.) Roma: Istituto Matematico dell'Università 1956. 162 p.

Grundbegriffe der mengentheoretischen Topologie und der kombinatorischen Topologie der Polyeder. Eulersche Charakteristik. Klassifikation der geschlossenen Flächen.

H. Freudenthal.

Banaschewski, Bernhard: *Local connectedness of extension spaces.* Canadian J. Math. **8**, 395—398 (1956).

Complément à un précédent Article (ce Zbl. **70**, 395) au compte-rendu duquel nous renvoyons pour les définitions. L'A. énonce: Soit E^* une extension de E , telle que les filtres $\mathfrak{S}(u)$ induits sur E par les filtres des voisinages des $u \in E^* - E$ soient connexes. Alors, E^* est localement connexe si et seulement si E est localement connexe et si chacun des filtres $\mathfrak{S}(u)$ a une base formée d'ouverts connexes. Applications: Si E n'est pas localement connexe, la plus grande extension séparée κE , l'extension $\alpha' E$ d'Alexandroff (E régulier, les $\mathfrak{S}(u)$ sont les filtres réguliers maximaux), et la compactification de Čech βE ne sont pas localement connexes. Même résultat pour κE , si E contient une suite d'ouverts deux à deux disjoints et pour $\alpha' E$ et βE si E contient une suite d'ouverts d'adhérences deux à deux disjointes et de réunion fermée. En particulier, si E est localement compact dénombrable à l'infini, aucune des extensions κE , $\alpha' E$, βE n'est localement connexe.

A. Revuz.

Rudin, Mary Ellen: *A separable normal nonparacompact space.* Proc. Amer. math. Soc. **7**, 940—941 (1956).

L'A. donne un exemple d'espace normal dans lequel il existe un ensemble dénombrable partout dense, mais qui n'est pas un espace de Lindelöf ni un espace paracompact (en fait, l'espace contient un sous-espace fermé qui est identique à l'espace usuel des ordinaux dénombrables, lequel n'a aucune des deux propriétés précédentes).

J. Dieudonné.

Chan' Chen Gon (Khan Khen Gon): *On certain classes of topological spaces.* Doklady Akad. Nauk SSSR **111**, 959—961 (1956) [Russisch].

Let n be a cardinal number. A cover γ of a topological space S is said to be a L_n -cover, provided for every point x of S there exists a vicinity $V(x)$ of x intersecting less than n terms of γ . E is of the class T_n (resp. of the class R_n) provided E has an open basis which is the union of $< n$ of L_n -covers (resp. of L_{\aleph_0} -covers). For every regular $n \geq \aleph_0$ and every T_n -space the following properties 1—6 are pairwise equivalent (Th. 1): 1. The weight of the space is $< n$. 2. Every strictly decreasing sequence of F -sets is $< n$; 3. Every strictly increasing sequence of F -sets is $< n$; 4. Every disjointed system of open sets is $< n$; 5. Every open cover is reducible to a subcover of cardinality $< n$; 6. Every open cover of cardinality n is reducible to a subcover of cardinality $< n$. A normal topological space is a R_n -space if and only if it is a uniform space whose uniform weight is $< n$ (uniform weight of a uniform space X is the infimum of the cardinalities of subsystems Y of the uniform structure of X such that Y be cofinal with X).

G. Kurepa.

Kasahara, Shouro: Note on the Lebesgue property in uniform spaces. II. Proc. Japan Acad. 32, 248—254 (1956).

Let E be a Hausdorff uniform space. In this note the author continues an earlier investigation (this Zbl. 66, 411) on the Lebesgue property in E . Among others the following results are proved: (1) E has the Lebesgue property if and only if E is countably paracompact normal and every continuous mapping of E into any separable uniform space is uniformly continuous: (2) if E has the countable Lebesgue property then the completion \hat{E} of E has also the countable Lebesgue property if and only if \hat{E} is countably paracompact and normal. M. M. Peixoto.

McAuley, Louis F.: A relation between perfect separability, completeness, and normality in semi-metric spaces. Pacific J. Math. 6, 315—326 (1956).

Une semi-distance sur un ensemble E est une fonction $d(x, y) \geq 0$ définie dans $E \times E$ et telle que $d(y, x) = d(x, y)$, et que $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$; pour tout $x \in E$ et $r > 0$, $U_r(x)$ est l'ensemble des $y \in E$ tels que $d(x, y) < r$; la semi-distance d est compatible avec une topologie sur E si pour tout $x \in E$ les $U_r(x)$ forment un système fondamental de voisinages de x ; un espace topologique pour lequel il y a une semi-distance compatible avec la topologie est dit semi-métrisable. L'A. donne d'abord une condition suffisante pour qu'un espace semi-métrisable E soit métrisable: E est supposé en outre régulier „fortement complet“ au sens suivant: toute suite décroissante (M_n) d'ensembles fermés telle que M_n soit contenu dans un $U_{1/n}(p_n)$, a une intersection non vide, — et enfin tout sous-espace de E contient une partie dénombrable partout dense (ce que l'A. exprime en disant que E est „héréditairement séparable“). Il compare ensuite les espaces réguliers semi-métrisables aux „espaces de Moore“, et donne un exemple d'un espace régulier et semi-métrisable, connexe, localement connexe, héréditairement séparable complètement normal et paracompact, mais qui n'est ni métrisable ni un espace de Moore. L'A. considère aussi une question posée par W. A. Wilson (ce Zbl. 1, 228), et une généralisation de la notion de „ p -séparabilité“ de Fréchet. Enfin, il donne des conditions topologiques pour qu'un espace soit semi-métrisable ou un espace de Moore (ces derniers étant semi-métrisables). J. Dieudonné.

Ginsburg, Seymour: Sets which are not homeomorphic by m -decomposition. Ann. of Math., II. Ser. 64, 447—449 (1956).

The notion of equivalence by m -decomposition [resp. by finite decomposition] (cf. e. g. W. Sierpinski, this Zbl. 56, 279) is generalized in following way. Two sets (spaces) X, Y are said homeomorphic by m -decomposition (resp. finite decomposition), provided there exist disjointed m -decompositions (resp. finite disjointed decompositions) $X = \bigcup_r X_r$, $Y = \bigcup_r Y_r$ in such a way that X_r, Y_r be homeomorphic for every r . In particular one considers the case that X, Y belong to a separable metric space of cardinality $c = 2^{\aleph_0}$ and that m is not cofinal with c and that $m < c$. Then in every such a space E there exists a set D of cardinality c so that no two subsets of D of cardinality c are homeomorphic (Th. 1). There exists a system F of cardinality 2^c of sets $\subseteq E$ of cardinality c each such that no two elements of F are homeomorphic by m -decomposition (Th. 2). E contains a set of cardinality c which is not homeomorphic by m -decomposition with E (Th. 3). G. Kurepa.

Nagata, Jun-iti: A theorem of dimension theory. Proc. Japan Acad. 32, 166—170 (1956).

The main theorem of this paper is as follows: In order that a T_1 -space R be a metrizable space with $\dim R \leq n$ it is necessary and sufficient that there exists a sequence $\mathfrak{B}_1 > \mathfrak{B}_2^* > \mathfrak{B}_2 > \mathfrak{B}_3^* > \dots$ of open coverings such that $\{S(p, \mathfrak{B}_m) \mid m = 1, 2, \dots\}$ is a basis of neighbourhoods at each point p of R and such that each set of \mathfrak{B}_{m+1} intersects at most $n + 1$ sets of \mathfrak{B}_m . Here $\dim R$ means the dimension of R defined by means of orders of finite open coverings or the one defined inductively by separation

of closed sets (the definitions are equivalent for metric spaces) and $\mathfrak{B}^* = \{S(V, \mathfrak{B}) \mid V \in \mathfrak{B}\}$. It is to be noted that on the basis of this theorem the author proved the existence of a very interesting relation between dimension and metrics of R in a later paper (this Zbl. **71**, 160). Further the author has shown in a later paper [Proc. Japan. Acad. **32**, 568—573 (1956)] that the above main theorem remains valid if the condition that each set of \mathfrak{B}_{m+1} intersects at most $n + 1$ sets of \mathfrak{B}_m is replaced by a condition that order $\mathfrak{B}_m \leq n + 1$ ($m = 1, 2, \dots$). A theorem closely related with this last theorem is also given by C. H. Dowker and W. Hurewicz (this Zbl. **70**, 180).

K. Morita.

Smirnov, Ju. M.: Die Geometrie unendlicher gleichmäßiger Komplexe und die δ -Dimension von Punktmengen. Mat. Sbornik, n. Ser. **40** (82), 137—156 (1956) [Russisch].

Verf. hat früher (dies. Zbl. **55**, 163) den Begriff der δ -Dimension für δ -Räume eingeführt und eine Reihe von Sätzen über sie angekündigt. Von den meisten dieser Sätze sind inzwischen die ausführlichen Beweise erschienen (vgl. dies. Zbl. **70**, 180). In der vorliegenden Arbeit beweist Verf. den folgenden seinerzeit angekündigten Satz über die δ -Dimension von Punktmengen A im euklidischen R^n : Dafür daß $A \subset R^n$ die δ -Dimension n hat, ist notwendig und hinreichend, daß eine Zahl $r > 0$ existiert, so daß für jedes $\varepsilon > 0$ im R^n eine Kugel vom Radius r existiert, in welcher A ein ε -Netz ist. — Beim Beweise spielen die sog. gleichmäßigen Komplexe $\subset R^n$ eine Rolle. Das sind solche, für welche die Abmessungen der Simplexe in gewisser Weise nach oben und unten beschränkt sind. Die geometrischen Eigenschaften dieser Komplexe werden untersucht.

E. Burger.

Waerden, B. L. van der: Berichtigung und Ergänzung zur Arbeit „Die Cohomologietheorie der Polyeder“. Math. Ann. Bd. **130**, S. 87 (1955). Math. Ann. **132**, 130—133 (1956).

(Voir ce Zbl. **65**, 161.) Cet article précise la définition de l'opérateur d'homotopie liant l'opérateur de subdivision barycentrique à l'identité; renonçant à une description explicite défectueuse, l'A. utilise ce qui, en terminologie moderne, s'appelle la méthode des „supports acycliques“. De même pour la démonstration de l'isomorphie de l'homologie des chaînes alternées et non alternées. Enfin, l'A. termine par une mise en garde relative à la topologie mise sur le polyèdre; la démonstration proposée ne vaut que pour la topologie „limite inductive“, ce qui n'introduit aucune restriction dans le cas où le polyèdre est localement fini.

R. Thom.

Bartholomay, Anthony F.: The Serre group $E_2^{p,q}$. Portugaliae Math. **15**, 31—34 (1956).

By the usual methods, the two well known standard alternative descriptions of the terms $E_2^{p,q}$ of a homology spectral sequence (E_r) are shown to be equivalent. (See, e. g., S. Eilenberg and H. Cartan, Homological Algebra, Princeton 1956. Ch. XV, § 1.)

W. H. Cockcroft.

Kudo, Tatsuji and Shôro Araki: On $H_*(\Omega^v(S^n); Z_2)$. Proc. Japan Acad. **32**, 333—335 (1956).

In dieser Note wird der Pontrjaginsche Ring $H_*(\Omega^N(S^n), Z_2)$ berechnet, wo $\Omega^N(S^n)$ der N -fach iterierte Schleifenraum von S^n ist. Verff. setzen voraus, daß $0 < N < n$. Die Verff. führen den Begriff eines H_m -Raumes ein, wofür der $(m + 1)$ -fach iterierte Schleifenraum eines metrischen Raumes ein typisches Beispiel ist. In einem H_m -Raum X können Homologieoperationen $Q_i: H_q(X, Z_2) \rightarrow H_{2q+i}(X, Z_2)$ für $0 \leq i \leq m$ definiert werden, die in gewissem Sinn dual zu den Steenrodschen Quadraten sind. Diese Operationen ermöglichen die Berechnung von $H_*(\Omega^N(S^n), Z_2)$ auf gleiche Weise, wie es J. P. Serre (dies. Zbl. **52**, 195) für den Cohomologiering $H^*(H, n; Z_2)$ mit Hilfe der Steenrodschen Quadrate durchgeführt hat: $H_*(\Omega^N(S^n), Z_2)$ ist ein Polynomring über Z_2 . Die Erzeugenden und ihre Grade werden explizit an-

gegeben. - Die vollständigen Beweise sollen in einer ausführlichen Arbeit veröffentlicht werden.

F. Hirzebruch.

Spanier, E. H.: Duality and S-theory. Bull. Amer. math. Soc. **62**, 194—203 (1956).

Cette introduction à la *S*-théorie (due à l'A. et J. H. C. Whitehead) expose les idées fondamentales de la théorie: A tout couple d'espaces X, Y est associé l'ensemble des *S*-classes d'applications de X dans Y : ce système des classes d'applications „stables par suspension“ forme un groupe abélien (X, Y) . Pour tout sous-polyèdre X de S^n , définissons le n -dual $D_n X = X^*$ comme un rétracte par déformation de $S^n - X$; si $X \subset Y$ sont deux sous-polyèdres de S^n alors on a une application duale $Y^* \rightarrow X^*$. Cette opération peut ensuite être définie pour toute application. L'A. montre alors comment cette opération D_n transforme isomorphiquement l'homologie en cohomologie, l'homotopie en cohomotopie. Ainsi le théorème classique de Hurewicz ($\pi_n(X) \cong H_n(X)$, si $H_i(X) = 0$ pour $i < n$), et le théorème de classification de Hopf ($(X, S^n) \cong H^n(X; Z)$ si $H^i(X) = 0$ pour $i > n$) se correspondent par cette dualité. La théorie se généralise aux CW-complexes; en définissant l'opération duale à l'adjonction d'une cellule, on peut même obtenir une théorie relative.

R. Thom.

Barratt, M. G. and J. H. C. Whitehead: The first non-vanishing group of an $(n+1)$ -ad. Proc. London math. Soc., III. Ser. **6**, 417—439 (1956).

Let $\mathfrak{X} = (X, X_1, \dots, X_n)$ be an $(n+1)$ -ad and put $X_\lambda = \bigcap_{j \in \lambda} X_j$, $\mathfrak{X}_\lambda = (X_\lambda, X_\lambda \cap X_{a_1}, \dots, X_\lambda \cap X_{a_l})$ for a subset $\lambda = (b_1, \dots, b_m) \subset [n]$, $(b_t < b_{t+1})$, $[n] = (1, \dots, n)$ where $(a_1, \dots, a_l) = [n] - \lambda = \mu$, $(a_s < a_{s+1})$. For $\alpha \in \pi_p(\mathfrak{X}_\lambda)$, $\beta \in \pi_q(\mathfrak{X}_\mu)$, a generalized Whitehead product $[\alpha, \beta] \in \pi_{p+q-1}(\mathfrak{X}_{\lambda \cap \mu})$ is defined and this product is shown to satisfy the familiar relations such as anti-commutativity, the Jacobi identity, distributivity and so on. As the authors have remarked, this product may be regarded as special case of the more general products defined by D. E. Cohen for the theory of carriers [Proc. London math. Soc., III. Ser. **7**, 219—248 (1957)]. Let \mathfrak{X} be a complete $(n+1)$ -ad („complete“ means that $X = \bigcup_s X_s$) and put $A_s = X_{(s)} = \bigcap_{t \neq s} X_t$, $C = \bigcap_j X_j$ where (s) denotes $[n] - s$, $(s = 1, \dots, n)$. Moreover, let $\Pi(\mathfrak{X}) = \pi_{q_1}(A_1, C) \otimes \dots \otimes \pi_{q_n}(A_n, C)$, $(q_t \geq 3)$ and $\Pi(\mathfrak{X})^r = \Pi(\mathfrak{X}) \otimes I_r$, where I_r is a free abelian group of rank $r = (n-1)!$. Using the above product, a homomorphism $\theta: \Pi(\mathfrak{X})^r \rightarrow \pi_q(\mathfrak{X})$ is defined where $q = q_1 + \dots + q_n - n + 1$, and it is proved that if \mathfrak{X} is a complete CW- $(n+1)$ -ad such that C is 1-connected and (A_t, C) is $(q_t - 1)$ -connected for each $t = 1, \dots, n$, then θ is an isomorphism onto. In particular, in case \mathfrak{X} is a complete CW-triad, further results on $\pi_q(\mathfrak{X})$ are obtained and as an application a generalization of the E, H, P sequence of G. W. Whitehead (this Zbl. **50**, 175) is obtained. *K. Morita.*

Hilton, P. J.: On divisors and multiples of continuous maps. Fundamenta Math. **43**, 358—386 (1956).

The notion of dependence of continuous maps introduced by Borsuk (this Zbl. **64**, 412) is slightly modified here as follows. Let X, Y be spaces with Y arc-wise connected. With respect to fixed reference points x_*, y_* in X, Y , the set of homotopy classes of maps $X, x_* \rightarrow Y, y_*$ will be denoted by $\pi(X, Y)$. Let X_0 be a compact space, Y_0 an arc-wise connected compact ANR and Y_1 an arc-wise connected compact ANR or polyhedra. Then an element $\beta \in \pi(X_0, Y_1)$ will be said to be dependent on a set of elements Φ of $\pi(X_0, Y_0)$ if for any compact space $X \supset X_0$ the existence of extensions of all maps in any element of Φ to $X \rightarrow Y_0$, will imply the existence of extensions of all maps in β to $X \rightarrow Y_1$. As a generalization of a theorem of Borsuk (loc. cit.), the elements of $\pi(X_0, Y_1)$ dependent on an $\alpha \in \pi(X_0, Y_0)$ are seen to be precisely the elements obtainable from $\alpha^* \pi(Y_0, Y_1)$ by applying the operations of $\pi_1(Y_1)$, where α^* is the natural correspondence of $\pi(Y_0, Y_1)$ in $\pi(X_0, Y_1)$

induced by α . The cases that $\pi(X, Y)$ may become a group and that $\alpha^*: \pi(Y_0, Y_1) \rightarrow \pi(X_0, Y_1)$ may be a homomorphism of groups are studied. The set of elements $\Sigma(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ of $\pi(X_0, Y_1)$ dependent on a finite set of elements $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \pi(X_0, Y_0)$ is also explicitly determined in certain cases. For example, let (a) X_0 be a suspension space or (b) $\dim X_0 \leq 2n - 2$ and $Y_0 = Y_1 = S^n$, so that $\pi(X_0, S^n)$ is a group (the track group of Barratt in case (a) and the Borsuk-Spanier cohomotopy group in case (b)). Then for $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \pi(X_0, S^n)$, $\Sigma(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ is the set $\sum_{i=1}^k r_i \alpha_i$

where (i) at most one r_i is non-zero if n is even; (ii) all linear combinations occur if $\pi_{2n+1}(S^{n+1})$ has an element of Hopf invariant 1; (iii) at most one r_i is odd if n is odd and $\pi_{2n+1}(S^{n+1})$ has no elements of Hopf invariant 1 (Cor. 4. 13). Variants of the notion of dependence of continuous maps are also introduced by considering free homotopy classes, or by restricting to special kinds of spaces $X \supset X_0$ in the definition, and their interrelations are studied. Wu Wen-tsun.

Atiyah, M.: On the Krull-Schmidt theorem with application to sheaves. Bull. Soc. math. France **84**, 307—317 (1956).

A generalisation of the Krull-Schmidt decomposition theorem for modules is proved for exact categories \mathfrak{A} (c. f. Buchsbaum, this Zbl. **65**, 255) which satisfy the following „chain“ condition. For any sequence of triples (A_n, i_n, p_n) such that $A_n \in \mathfrak{A}$, $n \geq 0$, with $i_n: A_n \rightarrow A_{n-1}$ a monomorphism ($n \geq 1$), and $p_n: A_{n-1} \rightarrow A_n$ an epimorphism ($n \geq 1$), there should exist N such that for all $n \geq N$, i_n and p_n are equivalences. Specifically, for every A in such an exact category there is a direct decomposition, written $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_m$ and defined by maps $i_r: A_r \rightarrow A$, $p_r: A \rightarrow A_r$ ($r = 1, 2, \dots, m$) such that (with the usual notation of categories) $p_r i_r = e_{A_r}$, $p_r i_s = 0$, $r \neq s$, and $\sum_r i_r p_r = e_A$, in which the A_r are indecomposable and not

equivalent to 0; and if $A = A'_1 \oplus A'_2 \oplus \dots \oplus A'_{m'}$, is another such decomposition then $m = m'$ and after a suitable reordering A_i and A'_i are equivalent. Two applications are given in the theory of coherent sheaves (cf. Serre, this Zbl. **67**, 162). Thus if \mathfrak{A} is the exact category of coherent sheaves on (i) a complete algebraic variety, or (ii) a compact complex manifold, then the above Krull-Schmidt theorem holds in \mathfrak{A} . Or again if ε is the class of vector bundles over (i) a connected complete algebraic variety, or (ii) a connected compact complex manifold, then the Krull-Schmidt theorem holds in ε . The completeness or compactness properties are seen from examples to be essential in these applications. W. H. Cockcroft.

Mostert, Paul S.: Sections in principal fibre spaces. Duke math. J. **23**, 57—71 (1956).

Es sei $\xi = (X, B, G)$ ein Prinzipal-Faserraum in folgendem Sinne: G operiert von rechts stetig auf dem Hausdorffschen Raum X . Für $(x, g) \in X \times G$ gilt $x = xg$ dann und nur dann, wenn g gleich dem Einselement von G ist. Jeder „Orbit“ unter G ist bezüglich der kanonischen Abbildungen homöomorph zu G . Schließlich ist B der Raum der Orbits bezüglich der Quotiententopologie und ist hausdorffsch. — Verf. studiert, unter welchen Bedingungen ξ lokale Schnitte besitzt, d. h. ein Prinzipal-Faserbündel ist. Er erinnert an die Arbeiten von Gleason [Proc. Amer. math. Soc. **1**, 35—43 (1950)], A. Borel [C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 1246—1248 (1950)], Serre (dies. Zbl. **36**, 127) und Mostert [Proc. Amer. math. Soc. **4**, 645—649 (1953)] und gibt gewisse Erweiterungen dieser Resultate an, insbesondere folgende: Wenn X eine lokal-kompakte topologische Gruppe, G eine abgeschlossene Untergruppe von X und $B = X/G$ endlichdimensional ist, dann hat (X, B, G) lokale Schnitte. Wenn B sogar null-dimensional ist, dann existiert ein globaler Schnitt. — Beim Beweis wird u. a. ein Resultat von Yamabe benutzt (dies. Zbl. **53**, 16). Als Anwendung erhält Verf. den folgenden Satz: Es sei X ein lokal-zusammenhängender, zusammenhängender, lokal-kompakter Hausdorffscher Raum endlicher Dimension,

der eine lokal-kompakte transitive Transformationsgruppe zuläßt, welche das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Dann ist X homöomorph zu dem Quotientenraum einer Lieschen Gruppe nach einer abgeschlossenen Untergruppe.

F. Hirzebruch.

Karpelevič, F. I.: Über die Faserung homogener Räume. *Uspechi mat. Nauk* 11, Nr. 3 (69), 131—138 (1956) [Russisch].

Das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit ist der Beweis des folgenden Satzes: Der Faktorraum G/H , wo G und H halbeinfache Gruppenräume sind, kann homogen gefasert werden. Dabei sind die Fasern Euklidische Räume, und die Basis ist ein Raum K/P , wobei K und P maximale kompakte Untergruppen je von G und H sind. Nach einigen mehr oder weniger naheliegenden Betrachtungen und Definitionen über die Faserung von Gruppenräumen wird der wesentliche Begriff des verallgemeinerten Grassmannschen Raumes eingeführt. Dies ist die Gesamtheit $\{S\}$ aller total geodätischen Mannigfaltigkeiten S eines symmetrischen Riemannschen Raumes E von nicht positiver Krümmung, wobei die S durch die Transformationen von E alle auseinander hervorgehen. Es wird nun gezeigt, daß man jeden homogenen Raum M mit halbeinfacher Bewegungsgruppe G homomorph auf einen solchen verallgemeinerten Grassmannschen Raum $\{S\}$ abbilden kann. Der zuerst genannte Satz folgt dann, im wesentlichen, nachdem zuvor gezeigt wurde, daß man $\{S\}$ in der geschilderten Weise fasern kann.

W. Burau.

Kervaire, Michel: Courbure intégrale généralisée et homotopie. *Math. Ann.* 131, 219—252 (1956).

Soit M^k une variété plongée dans R^{k+n} dont le fibré des vecteurs normaux est trivial; à tout champ (φ) de n -repères normaux se trouve associée une application φ de M^k dans la variété de Stiefel $V^{k,n}$ des n -repères dans R^{n+k} . Le degré $I(\varphi)$ de cette application est un entier pour k pair ou $n = 1$, un entier mod 2 pour k impair et $n > 1$. Un tel degré dépend en général du champ (φ) ; pour en tenir compte, on introduit l'application $f: S^{n+k} \rightarrow S^n$ canoniquement associée à φ . (M^k image inverse d'un point régulier de S^n). Soit dès lors $\chi^*(M^k)$ la „semi-caractéristique“ de M^k : $\chi^*(M^k) = \frac{1}{2} \chi(M^k)$ pour k pair, et $\chi^*(M^k) = \sum_{i=0}^r (-1)^i p_i(M^k)$ pour $k = 2r + 1$, $p_i(M^k)$ désignant le $i^{\text{ème}}$ nombre de Betti mod 2 de M^k . Le résultat essentiel est le suivant: la différence: $I(\varphi) - \chi^*(M^k) = \gamma(f)$ est un invariant de la classe d'homotopie de l'application f . Dans cette démonstration on utilise des lemmes assez profonds sur les variétés à bord, dont un exprime la caractéristique d'Euler $\chi(Q_{k+1})$ d'une variété à bord Q_{k+1} de bord M^k , $k = 2s - 1$, comme somme de la semi-caractéristique du bord M^k et de l'index de la forme quadratique définie par le cup-produit sur $H^s(Q, M)$. En cet article, l'A. conjecture que l'invariant γ n'est autre que l'invariant de Hopf, ce qu'il a démontré ultérieurement [*Amer. J. Math.* 79, 517—558 (1957), v. pp. 536—541]. L'article contient de nombreuses applications, dont la plus frappante est celle-ci: Pour qu'un produit de sphères $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_j$ soit parallélisable, il faut et il suffit que l'une des sphères S_i soit de dimension impaire. *R. Thom.*

Vesentini, Edoardo: Sugli jacobiani di funzioni meromorfe sopra una varietà complessa compatta. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. Ser. 19, 428—434 (1956).

Es sei X eine m -dimensionale kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, F ein komplex-analytisches Geradenbündel über X und T das Bündel der kovarianten Tangentialvektoren vom Typ $(1, 0)$ über X . Ferner soll die i -te Chernsche Klasse von X mit c_i und die erste Chernsche Klasse von F mit f bezeichnet werden ($c_i \in H^{2i}(X, \mathbb{Z})$, $f \in H^2(X, \mathbb{Z})$). Ferner sei $\mu(F)$ der Wert der m -ten Chernschen Klasse von $T \otimes F$ auf dem Fundamentalzyklus von X . Dann gilt

$$(*) \quad \mu(F) = \left(\sum_{j=0}^m (-1)^j f^{m-j} c_j \right) [X].$$

$\mu(F)$ ist gleich der „Anzahl“ der Nullstellen eines Schnittes von $T \otimes F$ (sofern dieser Schnitt isolierte Nullstellen hat). Verf. beweist (*) mit Hilfe einer Formel von Kündert (dies. Zbl. 43, 174). Man kann (*) einfacher aus der Formel für die Chernschen Klassen des Tensorproduktes zweier Vektorraum-Bündel erhalten (vgl. Ref., Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie, Seite 66/67; dies. Zbl. 70, 163). Verf. wendet (*) auf die folgende Situation an: g sei eine meromorphe Funktion auf X , die den folgenden Bedingungen genügt. I. Jede Niveauhyperfläche von g ist irreduzibel mit der Vielfachheit 1. II. Der Ort L der Unbestimmtheitsstellen von g ist eine singularitätenfreie $(m-2)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von X , die in der Umgebung jedes Punktes P von L durch $z_1 = z_2 = 0$ gegeben werden kann, wo z_1, \dots, z_m lokale Koordinaten mit P als Mittelpunkt sind. Die Funktion g soll dabei in der Umgebung von P von der Form $g = z_1/z_2$ sein. III. Unter einer Singularität von g werde ein Punkt P verstanden, in dessen Umgebung g sich nicht in der Form $g = g(P) + z_1$ oder $g = 1/z_1$ schreiben läßt (z_1, \dots, z_m sind immer geeignete lokale Koordinaten mit P als Mittelpunkt). Wenn P singular ist, dann soll P zu L gehören oder aber g in der Umgebung von P sich in der Form $g = g(P) + z_1^2 + \dots + z_m^2$ bzw. $1/g = z_1^2 + \dots + z_m^2$ (+ höhere Glieder) darstellen lassen. P heißt dann gewöhnlicher Doppelpunkt der durch P gehenden Niveauhyperfläche. IV. Jede Niveauhyperfläche von g hat höchstens einen Doppelpunkt (siehe III). Unter den Bedingungen I.—IV. läßt sich die (gewöhnliche) Anzahl ν der Niveauhyperflächen mit Doppelpunkt (d. h. die Anzahl der Doppelpunkte) ausrechnen. Schreibt man g lokal in der Form h_1/h_2 , wo h_1, h_2 holomorph und teilerfremd sind, dann bilden die lokalen Differentialformen $h_2^2 \cdot dg$ eine Verteilung von Formen, die einen Schnitt ϱ von $T \otimes S \otimes S$ liefert, wo S das Geradenbündel ist, das zum Poldivisor von g gehört. Der Schnitt ϱ verschwindet auf L und in den Doppelpunkten und nur dort. Es sei T' das Bündel der kovarianten Vektoren vom Typ $(1, 0)$ von L und S_L bezeichne die Beschränkung von S auf L . Unter Verwendung eines Schnittes ϱ' von $T' \otimes S_L \otimes S_L$, der isolierte Nullstellen habe, kann man ϱ in einer Tubenumgebung U von L so deformieren, daß es außerhalb U unverändert bleibt und innerhalb U isolierte Nullstellen hat, nämlich die Nullstellen von ϱ' . Man erhält jetzt die Anzahl ν , indem man (*) auf $F = S \otimes S$ und (bezüglich L) auf $F_L = S_L \otimes S_L$ anwendet: Bezeichnet man die erste Chernsche Klasse von S mit s , dann ergibt sich

$$\nu = \mu(F) - \mu(F_L) = \left(\sum_{j=0}^m (-1)^j (m-j+1) s^{m-j} c_j \right) [X].$$

Damit hat Verf. eine Formel der algebraischen Geometrie mit topologischen Methoden bewiesen und auf beliebige kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten verallgemeinert. Für $m = 2$ handelt es sich um eine klassische Formel, die vom Ref. für komplexe Mannigfaltigkeiten diskutiert wurde (dies. Zbl. 52, 198). Im Rahmen der algebraischen Geometrie wurde die vorstehende Formel für $m = 3$ von B. Segre und für beliebiges m von M. Eger und J. A. Todd erhalten. Verf. deutet andere Anwendungsmöglichkeiten seiner Methode an.

F. Hirzebruch.

Washnitzer, G.: The characteristic classes of an algebraic fiber bundle. I. Proc. nat. Acad. Sci. USA 42, 433—436 (1956).

„The aim of this note is to give a purely algebro-geometric definition of the characteristic classes of an algebraic fiber bundle with a vector space for fiber. The characteristic classes turn out to be rational equivalence classes on the base variety which is supposed to be free from multiple points and to admit a projective model — that is, the base variety is in biregular correspondence with a subvariety of some projective space. This last assumption is required solely because of current limitations of the theory of rational equivalence, which so far has been developed only on varieties which admit projective models. All varieties considered here are

defined with reference to a fixed algebraically closed field, and they are equipped with the Zariski topology.“ — Sein Ziel erreicht Verf. dadurch, daß er die folgende Charakterisierung der Chernschen Klassen auf den abstrakt-algebraischen Fall überträgt: Es sei W ein Vektorraum-Bündel über dem Raum X mit C^n als Faser und L das assoziierte Bündel mit dem komplexen projektiven Raum P_{n-1} als Faser. W ist ein Geradenbündel über L , dessen erste Chernsche Klasse mit x_1 bezeichnet werde, wo $x_1 \in H^2(L, \mathbb{Z})$. Dann gibt die Beschränkung von $-x_1$ auf die Faser P_{n-1} ein erzeugendes Element g der unendlich zyklischen Gruppe $H^2(P_{n-1}, \mathbb{Z})$ und g^{n-1} definiert die natürliche Orientierung von P_{n-1} . Es sei $\sharp: H^*(L, \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(X, \mathbb{Z})$ die Integration über die Faser bezüglich dieser Orientierung. Wenn X und L orientierte Mannigfaltigkeiten sind, so daß die Orientierungen von X und der Faser die von L induzieren, dann ist $\sharp = \mathfrak{D}_X \pi_* \mathfrak{D}_L^{-1}$, wo $\pi: L \rightarrow X$ die Projektion und \mathfrak{D}_L bzw. \mathfrak{D}_X den Übergang von einer Homologiekategorie zur dualen Cohomologiekategorie bezeichnet. Es gilt

$$((1 + x_1)^{-1})^\sharp = c^{-1} = (1 + c_1 + c_2 + \dots + c_n)^{-1}, \quad c_i \in H^{2i}(X, \mathbb{Z}),$$

wo c_i die i -te Chernsche Klasse von W ist. — Diese Definition der Chernschen Klassen wurde in einem Spezialfall von B. Segre benutzt [Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 35, 1 127 (1953)]. Eine andere Definition der Chernschen Klassen mit Hilfe von Integration über die Faser findet sich bei Chern (dies. Zbl. 51, 143; Theorem 6).

F. Hirzebruch.

Burdina, V. I.: Die reellen charakteristischen Zyklen der komplexen Mannigfaltigkeiten. Mat. Sbornik, n. Ser. 39 (81), 337—378 (1956) [Russisch].

Proofs of results announced earlier; see this Zbl. 57, 394. W. T. van Est.

Milnor, John: On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. Ann. of Math., II. Ser. 64, 399—405 (1956).

Les espaces fibrés de base S^4 , fibre S^3 , groupe de structure $SO(4)$, sont entièrement déterminés par deux entiers, par exemple l'invariant de Hopf γ et le nombre caractéristique de Pontrjagin $p_1(S^4)$. Si $\gamma = 1$, le fibré E_{p_1} correspondant est une sphère homologique; l'A. construit alors sur la variété différentiable E_{p_1} une fonction différentiable qui ne présente que deux points critiques quadratiques non dégénérés: par suite, en vertu d'un théorème de Reeb, E_{p_1} est homéomorphe à la sphère S^7 , l'homéomorphisme pouvant être pris différentiable partout à l'exception d'un point. Supposons alors que E_{p_1} soit différentiablement homéomorphe à S^7 : on peut alors former une variété différentiable C^8 de dimension 8 en ajoutant au „mapping cylinder“, A_{p_1} de E_{p_1} une boule B^8 de bord $S^7 = E_{p_1}$; dans C^8 , la formule de l'index donnera: $45\tau + (p_1)^2 = 7p_2$. Pour un choix convenable de p_1 , le premier membre ne sera pas divisible par 7; donc, pour une telle valeur, E_{p_1} n'est pas différentiablement isomorphe à S^7 . L'A. généralise son résultat en définissant pour toute variété orientée M^7 telle que $H^4(M^7; \mathbb{Q}) = 0$ un invariant $\lambda(M^7)$, entier mod 7, qui est un invariant de la structure différentiable, non topologique, de M^7 . Parmi les conséquences très surprenantes citées par l'A., donnons: Il existe un difféomorphisme de la sphère S^6 qui ne s'étend pas en un difféomorphisme de la boule B^7 . Les exemples présentés dans cet article, qui bouleversent toutes les idées antérieurement admises, sont appelés sans nul doute à devenir classiques.

E. Thom.

Weier, Joseph: Ein Satz aus der Topologie der Sphären. Collect. Math. 8, 213—220 (1956).

L'A. se propose le problème suivant: Etant données deux sphères $S^m, S^n, m > n$, et une classe H d'applications $f: S^m \rightarrow S^n$, peut-on trouver deux applications f_1, f_2 de H telles que l'équation $f_1(p) = f_2(p)$ n'ait aucune solution dans S^m . L'A. démontre (de façon relativement longue) la propriété pour $m = 3, n = 2$. Il semble au rapporteur que tout se ramène à la remarque suivante: Soit T le fibré de base S^m induit du fibré des vecteurs unitaires de S^n par l'application f ; si le fibré T admet une section,

δf , alors le problème admet la solution $g = f + \delta f$. De façon générale, l'obstruction à l'existence d'une section du fibré T est un élément de $\pi_{m-1}(S_{n-1})$; si ce dernier groupe est nul, alors le problème est toujours localement résoluble. Ce résultat, annoncé par l'A., fera l'objet d'une publication ultérieure.

R. Thom.

Jaworowski, J. W.: On antipodal sets on the sphere and on continuous involutions. *Fundamenta Math.* **43**, 241—254 (1956).

Using a Vietoris type homology theory with coefficients mod 2, the author first defines a (p, Φ) system. If M is a space, Φ a continuous involution on M , p a positive integer, then a (p, Φ) system $I_\Phi^p = (\gamma^{-1}, \chi^0, \gamma^0, \dots, \chi^p, \gamma^p)$ is a collection of chains χ^r and cycles γ^r satisfying $\partial \chi^r = \gamma^{r-1}$ and $\gamma^r = \chi^r + \Phi \chi^r$, $r = 0, 1, \dots, p$ (here γ^{-1} is the number 1). Now let α be the antipodal map of S^n , the n -dimensional sphere. A set $X \subset S^n$ is antipodal if $\alpha X = X$. A space is p -acyclic if the reduced mod 2 homology groups vanish in dimensions r , $0 \leq r < p$. We can now state the Main Theorem: Let $I_\alpha^p = (\gamma^{-1}, \chi^0, \gamma^0, \dots, \chi^p, \gamma^p)$ be a (p, α) system lying in a set $A \subset S^n$, and let $I_\alpha^{n-p-1} = (\delta^{-1}, \lambda^0, \delta^0, \dots, \lambda^{n-p-1}, \delta^{n-p-1})$ be an $(n-p-1, \alpha)$ system lying in a set $B \subset S^n$, with $A \cap B = \emptyset$. Then the cycles γ^p and δ^{n-p-1} are linked. A variety of theorems on antipodal sets follow from this result. For example, Theorem 3: If A and B are two disjoint antipodal subsets of S^n , such that A is p -acyclic and B is $(n-p-1)$ -acyclic, then A and B are linked in the dimensions $(p, n-p-1)$. This implies Cor. 4: An $(n-1)$ -acyclic subset of S^n disconnects S^n between any two antipodal points of its complement. For $n=2$, this is a theorem of Eilenberg. The technique of (p, Φ) systems is also applied to continuous functions defined on M . For example, Cor. 7: Let M be an n -acyclic space and Φ a continuous involution on M . Then for every continuous $f: M \rightarrow E_n$ there exists a point $x \in M$ such that $f(x) = f(\Phi(x))$. Relations to the partly overlapping recent work of C. T. Yang are pointed out.

S. Stein.

Berstein, I.: Remarques sur un théorème de F. J. Dyson relatif à la sphère. *Fundamenta Math.* **43**, 89—94 (1956).

Es sei E ein unikhärentes lokal-zusammenhängendes Kontinuum mit der Metrik ρ und T bezeichne eine fixpunktfreie involutorische topologische Abbildung $x \leftrightarrow x^*$ [$x, x^* \in E$] von E auf sich. Wegen der Kompaktheit von E ist $\inf \rho(x, x^*) = \sigma > 0$; σ heißt Durchmesser der Involution T . Verf. zeigt: Ist f eine über E definierte stetige reellwertige Funktion, so lassen sich zu einem beliebig im Intervall $0 < \Delta \leq \sigma$ gewählten Δ zwei Punkte $a, b \in E$ derart finden, daß einerseits $\rho(a, b) = \Delta$ und andererseits $f(a) = f(b) = f(a^*) = f(b^*)$ ausfällt. — Damit ist eine bemerkenswerte Verallgemeinerung des Theorems von F. J. Dyson (dies. Zbl. **45**, 29) und der von G. R. Livesay (dies. Zbl. **56**, 419) gefundenen Verschärfung gegeben.

H. Hadwiger.

Harary, Frank: Note on the Pólya and Otter formulas for enumerating trees. *Michigan math. J.* **3**, 109—112 (1956).

Die Formel von Otter (dies. Zbl. **32**, 126) zur Berechnung der Anzahl der topologisch verschiedenen Bäume aus der Anzahl der topologisch verschiedenen Setzbäume wird hier direkt aus den Gleichungen Polyas (dies. Zbl. **17**, 232) hergeleitet ohne Zuziehung weiterer Hilfsformeln. Bei Setzbäumen ist ein Punkt des Baumes als Wurzelpunkt besonders ausgezeichnet.

H. Künnet.

Theoretische Physik.

Kratzer, A.: Das Bild in der Physik. *Studium generale* **9**, 129—136 (1956).

Der Artikel gibt eine Übersicht über die Rolle der Bilder und der Abbildungen in der Physik. Als Bildelemente werden außer den Sinnesqualitäten die Begriffe der klassischen Mechanik zugelassen (also die Bewegungen eines Massenpunktes, eines starren Körpers und eines Kontinuums mit den Sonderfällen der Welle und des

Wirbels). Der Verf. erklärt, daß „anschaulich für uns nur etwas sein soll, was als Vorgang in Raum und Zeit Gegenstand der optischen Wahrnehmung sein könnte“. Danach enthält bereits die klassische Physik eine nichtanschauliche Theorie, nämlich die Elektrodynamik und die Maxwellsche Theorie des Lichtes. Im Hauptteil der Arbeit wird auseinandergesetzt, warum es nicht gelingt, sich von den Elementarteilchen ein Bild zu machen. Eine Abbildung des Geschehens auf mathematische Theorien dagegen ist möglich.

G. Süßmann.

● **Yiftah, Shimon: Constantes fondamentales des théories physiques.** (Les Grands Problèmes des Sciences, Vol. III.) Paris: Gauthier-Villars 1956. XII, 124 p. 2 Fig. 2.300 fr.

Vorliegende Schrift enthält eine Untersuchung über die Natur und die Beziehungen der verschiedenen bekannten fundamentalen Naturkonstanten untereinander. So werden im 1. Kapitel die verschiedenen Konstanten der Physik vom allgemeinen Standpunkt aus besprochen, wobei auch auf die Elementarlänge Bezug genommen wird. Im 2. Kapitel wird eine Ordnung der physikalischen Theorien nach den Fundamentalkonstanten gegeben, wobei besonders auf Probleme der Feldtheorie eingegangen wird. Im 3. Kapitel werden die drei dimensionslosen Konstanten hervorgehoben. Die Massenrelation Proton-Elektron, die Konstanten 137 und 10^{39} bilden dann den Inhalt der drei folgenden Kapitel. Der Verf. hat eine außerordentlich klare und gründliche Studie über diesen Gegenstand gegeben.

G. Kelbg.

● **Conn, G. K. T. and E. E. Crane: Some applications of the method of dimensions to atomic physics.** Amer. J. Phys. 24, 543–549 (1956).

Es wird an einigen Beispielen gezeigt, wie Dimensionsbetrachtungen mit den Größen, die in die Beschreibung eines Problems eingehen, zu den bekannten Gesetzen führen. Die Darlegungen sind elegant und können durch ihre Einfachheit verblüffen. Nach dem bekannten „Erhaltungssatz“ für die Schwierigkeit von Problemen, die man nicht forttransformieren kann, muß man aber mißtrauisch fragen, wo hierbei die Kompliziertheit verblieben ist? Zweifellos ist es wichtig, die Größen genau zu wissen, die im speziellen Fall eine Rolle spielen. Im Fall der Quantentheorie muß weiterhin die physikalische Natur der zugrunde liegenden Felder bekannt sein. Und am Beispiel des Wiedemann-Franzschen Gesetzes erkennt man, daß mitunter über die tiefliegenden Probleme hinweggegangen wird: bekanntlich spielt die Statistik der Leitungselektronen beim Verhältnis von thermischer und elektrischer Leitfähigkeit gerade keine Rolle. Der Ref. muß daher die These der Autoren bezweifeln, daß die Dimensionsanalyse für einen Lernenden bestens geeignet ist, ihn zu einem wirklichen Verständnis der erhaltenen Formeln zu führen.

W. Klose.

● **Picht, Johannes: Vorlesungen über Atomphysik. Band I.** Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1956. VIII, 238 S.

Dem Vorwort zufolge wird Band II die Wellen- und Quantenmechanik sowie Kern- und Feldtheorie enthalten. Daraus ist der Aufbau von Band I abzuleiten, der als Vorbereitung für Band II anzusehen ist. Verf. behandelt die Grundlagen der Statistik bis zur kanonischen Verteilung mit einer Reihe Anwendungen, daran anschließend die Grundgesetze der Mechanik bis zur Hamilton-Jacobi-Gleichung und kanonischen Transformation, um darauf die statistische Mechanik aufzubauen. Ein weiterer Teil des Buches befaßt sich mit Strahlungs- und halbklassischer Quantentheorie, die sehr weit ausgebaut wird und einen relativ großen Raum einnimmt. Auf dieser Grundlage werden dann die Quantenstatistiken begründet und angewendet. Den Abschluß bildet die prinzipielle These des Verf. (in der Fußnote jedoch selbst bezweifelt), daß das „elementare Energiequantum“ (mit Neutrinos in Verbindung gebracht), nicht aber das elementare Wirkungsquantum die beherrschende Größe der Strahlungstheorie sei, da die Wirkung gegenüber der Energie von sekundärer Natur sei. Auf diese „logische“ Folgerung möchte Ref. kritisch hinweisen.

E. Schmutzer.

Mechanik:

Liverani, Giovanni: Su un teorema di reciprocità per i sistemi a ritardo. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 11, 582—584 (1956).

Dans un système mécanique conservatif S , de Lagrange, à n libertés, l'on considère les petits mouvements autour d'une position d'équilibre stable et l'on donne une formule de réciprocité (1) reliant les cas où l'on change les forces additionnelles. L'on obtient un S à retardement en remplaçant t par $(t - \tau)$, où τ est une constante, dans certains termes des équations du mouvement. L'on vérifie sur un exemple et sous certaines hypothèses auxiliaires, que la formule (1) est valable dans le cas du retardement, ce qui arrive — selon l'A. — aussi en général. *A. Froda.*

Hirschfelder, Joseph O. and John S. Dahler: The kinetic energy of relative motion. Proc. nat. Acad. Sci. USA 42, 363—365 (1956).

Die kinetische Energie T eines Systems von N Massenpunkten läßt sich durch eine geeignete Transformation durch die halbe Summe von N reinen Quadraten der Zeitableitungen verallgemeinerter vektorieller Relativkoordinaten darstellen. Die erste Koordinate ist hierbei proportional dem Schwerpunktsvektor, so daß das erste Glied von T die „Schwerpunktenergie“, die Summe der übrigen Glieder die Energie der Relativbewegung gegen den Schwerpunkt beinhalten. Die Transformation auf die verallgemeinerten Relativkoordinaten wird durch eine unitäre, N -gliedrige Matrix vermittelt, deren Zeilenvektoren ein System von N aufeinander senkrecht stehenden Einheitsvektoren in einem N -dimensionalen Konfigurationsraum bilden. Der erste Vektor kann unmittelbar aus der Definition der ersten Koordinate ermittelt werden, die übrigen gewinnt man aus dem Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren. Mittels der Glieder der Matrix kann man leicht die verallgemeinerten Koordinaten durch die gewöhnlichen Ortskoordinaten der Massenpunkte darstellen. Mögliche Anwendungen sieht der Verf. bei Problemen molekularer Stöße und molekularer Rotationsschwingungen sowie bei der Vorherbestimmung des veränderten Ablaufs chemischer Reaktionen bei Verwendung von Isotopen. *G. Heinrich.*

Behrbohm, Hermann: Zur Herleitung der Eulergleichungen des brachystochronen endpunktgebundenen Steigfluges in vertikaler Ebene bei verschiedenen Endbedingungen. Z. Flugwiss. 4, 373—382 (1956).

Herleitung der Eulerschen Differentialgleichungen des folgenden Optimalproblems mit nichtholonomen Nebenbedingungen: Ein Flugkörper mit Strahlantrieb soll in einer vertikalen Ebene von einem gegebenen Anfangspunkt aus bei gegebener Anfangs-Geschwindigkeit, -Bahnneigung und -Masse in optimaler Zeit zu einem gegebenen Endpunkt gelangen. Angabe der Forderungen an die Endwerte der Lagrangeschen Multiplikatorfunktionen je nach den vorgeschriebenen Endwerten von Geschwindigkeit, Bahnneigung und Masse. Man vgl. Verf., dies. Zbl. 58, 179.

K. Nickel.

Cicala, Placido: Soluzioni discontinue nei problemi di volo ottimo. Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur. 90, 533—551 (1956).

Diskussion desselben Problems wie im vorstehenden Referat, falls die in den Eulerschen Differentialgleichungen auftretenden Funktionen oder ihre Ableitungen Unstetigkeitsstellen (Sprünge) besitzen (z. B. Knick in der Schub-Höhenkurve) oder falls einseitige Bindungen (z. B. beschränktes Lastvielfaches) auftreten. Beispiele. *K. Nickel.*

Aumann, Georg: Der Raumschlitten. Z. angew. Math. Mech. 36, 433—436 (1956).

Unter einem Raumschlitten wird ein starrer Körper verstanden, der sich so bewegt, daß die „absolute Geschwindigkeit“ eines körperfesten Punktes zu einer vorgegebenen körperfesten Richtung entweder stets senkrecht (Fall I, Scheibenkufe) oder stets parallel (Fall II, Nadelkufe) ist. Es werden die Bewegungsgleichungen für

einen solchen Raumschlitten aufgestellt, der keinen eingepprägten Kräften unterworfen ist, sondern nur unter dem Einfluß einer entsprechenden Zwangskraft an seiner Kufe steht. Die Bewegung wird für den Spezialfall, daß das Zentralträgheitsellipsoid des Körpers eine Kugel ist, diskutiert. Es wird gezeigt, daß, abgesehen von trivialen Geschwindigkeitsabläufen, im Fall I nur aperiodische, im Fall II auch periodische Geschwindigkeitsabläufe möglich sind.

K. Desoyer.

Chatterjee, P. N.: Analysis of two-dimensional footings having variable moments of inertia. *J. Technol.* **1**, 163—174 (1956).

An analytical and a numerical method of solution of two-dimensional footings having variable moments of inertia are presented in the paper. Zusammenfassg. des Autors.

Grammel, R. und H. Ziegler: Der kardanisch gelagerte schnelle symmetrische Kreisel mit Lagerreibung. *Ingenieur-Arch.* **24**, 351—372 (1956).

Die Reibung in den Kardanlagern zeitigt beim schnellen, symmetrischen Kreisel Effekte, deren vollständige qualitative Erfassung sich die Verfasser zum Ziele setzen. Eine genaue quantitative Theorie ist wegen der Unsicherheit bei der Berechnung der Lagerreibungsmomente nicht möglich. Daher wurde auch die Abhängigkeit des Reibungsmomentes von den Lagerdrucken nicht berücksichtigt. Die Verf. beschränken sich im wesentlichen auf die beim schnellen, symmetrischen Kreisel übliche Näherungstheorie, nur in den letzten Abschnitten werden strengere Ansätze diskutiert. Es wird ein schwerer Kreisel mit je einem reibungsbehafteten vertikalen und horizontalen Kardanlagerpaar und einer reibenden Figurenachse mit starren, trägheitslosen Kardanringen betrachtet, wobei die letztere Annahme nur bei nutationsfreier Bewegung gerechtfertigt erscheint. Als spezielle Reibungsgesetze werden flüssige Reibung mit linearer und potenzförmiger Abhängigkeit des Reibungsmomentes von der Drehgeschwindigkeit, sowie trockene Reibung mit konstantem Reibungsmoment der Rechnung zugrunde gelegt. Es ergibt sich bei der Behandlung der Bewegungsvorgänge eine große Anzahl von interessanten Sonderfällen, auf die hier im einzelnen nicht eingegangen werden kann. Ausgeschlossen bleiben jene Fälle, bei denen die Figurenachse in der Nähe der Vertikalen zu liegen kommt, da hier die Näherungstheorie versagt. Bei trockener Reibung können in einem oder in beiden Kardanlagerpaaren Sperrungen auftreten, die ebenfalls genau durchdiskutiert werden. Bei Hinzunahme weiterer, bisher vernachlässigter Drallglieder (Einfluß der äquatorialen Drehmasse), können noch spezielle Sperrungen behandelt werden, die aus der ersten Näherung nicht entwickelt werden können. Am Schluß wird der Einfluß der Nutationen aus den strengen Eulerschen Kreiselgleichungen diskutiert. Zur experimentellen Überprüfung der gewonnenen Ergebnisse wurde ein mit Bremsen versehener Kreisel angefertigt, der viele Resultate qualitativ bestätigte. Eingehende Versuche sollen noch durchgeführt werden.

G. Heinrich.

● **Bishop, R. E. D. and D. C. Johnson: Vibration analysis tables.** Cambridge: At the University Press 1956. VIII, 59 p. 10 s. 6 d. net.

Il volumetto è estratto da un'opera più ampia, degli stessi, dedicata alla Meccanica delle vibrazioni. In esso sono tabellate le ammettenze caratteristiche dei sistemi vibranti di maggior interesse nelle applicazioni, ad un numero finito od infinito di gradi di libertà, in svariate condizioni di vincolo. Vengono così esaminate le vibrazioni torsionali di sistemi di volani calettati su di un asse, le vibrazioni trasversali di un filo teso, quelle torsionali degli alberi circolari, le vibrazioni flessionali di una trave continua ecc. Sono anche tabellate le funzioni caratteristiche che in alcuni casi intervengono nella espressione della ammettenza, ed indicata l'equazione delle frequenze caratteristiche di sistemi complessi. — Il volumetto è compilato con estrema cura e chiarezza, appare di agevole e rapida consultazione, e riuscirà certo utilissimo in tutte le applicazioni in argomento. *T. Manacorda.*

Livesley, R. K.: The automatic design of structural frames. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **9**, 257—278 (1956).

Es wird die Frage der günstigsten Dimensionierung eines Trägers untersucht, welcher eine gegebene Lastengruppe aufzunehmen hat. Auf Grund der geometrischen Analogie und einer iterativen Methode entwickelt Verf. systematisch ein Lösungsprogramm, das auch für elektronische Rechenautomaten geeignet ist.

H. Neuber.

Elastizität. Plastizität:

Duffin, R. J.: *Analytic continuation in elasticity.* J. rat. Mech. Analysis **5**, 939—950 (1956).

Im Anschluß an seine Arbeit über das Reflexionsprinzip bei biharmonischen Funktionen (dies. Zbl. **64**, 352) untersucht Verf. die Fortsetzbarkeit von Lösungen der elastischen Grundgleichungen durch ein ebenes Randstück R hindurch. Er betrachtet dabei (a) die verschiebungslose, (b) die spannungsfreie, (c) gewisse gemischte Randbedingungen auf R . Die Resultate (Existenz der Fortsetzung sowie explizite Formeln für dieselbe) werden dadurch erhalten, daß die in Frage stehenden Größen durch gewisse harmonische Funktionen ausgedrückt werden, deren Fortsetzung mit Hilfe des Schwarzschen Spiegelungsprinzips erfolgt.

A. Huber.

Muster, D. F. and M. A. Sadowsky: *Bending of a uniformly loaded semicircular plate simply supported around the curved edge and free along the diameter.* J. appl. Mech. **23**, 329—335 (1956).

Within the limits of classical plate theory, a solution is obtained in series form for the problem of a uniformly loaded, semicircular plate, simply supported around the curved edge and free along the diameter. The solution, although singular at the corners, is otherwise analytic and amenable to numerical evaluation by electronic calculators. The solution results are compared to those obtained experimentally by Robinson and Huggenberger. The agreement is reasonable.

Zusammenfassg. des Autors.

Hoeland, G.: *Stützmomenteneinflussfelder durchlaufender elastischer Platten mit zwei drehbar gelagerten Rändern.* Ingenieur-Archiv **24**, 124—132 (1956).

Si dà un metodo per calcolare il campo d'influenza del momento sull'appoggio, relativo ad una piastra elastica continua semplicemente appoggiata su due bordi con appoggi intermedi di varia natura. Una formula di Pucher relativa al caso della semistriscia incastrata è il punto di partenza per gli altri casi. Essa fornisce la singolarità voluta, ma non verifica in generale le condizioni al contorno. Viene mostrato come a tale scopo basta aggiungere alla precedente una opportuna funzione biarmonica contenente delle costanti arbitrarie che si determinano in base alle predette condizioni. In tal modo è trattato il caso della piastra rettangolare con un appoggio intermedio rigido o elastico. Infine viene considerato il caso di più appoggi intermedi successivi.

L. Alfieri.

Bowie, O. L.: *Analysis of an infinite plate containing radial cracks originating at the boundary of an internal circular hole.* J. Math. Physics **35**, 60—71 (1956).

Mit Hilfe der Methode der komplexen Spannungsfunktion von Muschelisvili gelangt Verf. zu einer Lösung für den Spannungszustand in einer Scheibe mit einem Kreisloch, an dessen Rand radiale Risse in gleichem Abstände und von gleicher Länge vorhanden sind. Als äußere Belastung werden die beiden Fälle „allseitiger Zug“ und „Zug in einer Richtung“ in Betracht gezogen. Die Lösung führt auf eine unendliche Potenzreihe, für deren Koeffizienten sich ein System simultaner linearer Gleichungen ergibt. Die analog zur Bruchtheorie von Griffith kritische Last ist in Abhängigkeit von der Rißlänge in Tabellen und Diagrammen angegeben.

H. Neuber.

Boley, Bruno A.: *On thin-ring analysis.* J. aeronaut. Sci. **23**, 802—804 (1956).

Viene data una formula che esprime il momento flettente $M(s)$ in ciascun punto di un anello sottile piano soggetto ad una sollecitazione contenuta nel suo piano. Minimizzando l'energia di deformazione si consegue tale espressione, in cui interviene, accanto a parametri dipendenti dalla configurazione dell'anello, il momento $M_0(s)$

che si avrebbe ove l'anello fosse interrotto in un suo punto. In particolari condizioni di simmetria per la configurazione ed il carico tale espressione risulta particolarmente semplice. Il calcolo di $M_0(s)$ si effettua a partire dalle equazioni di equilibrio, le quali sono pure atte a dare gli sforzi normale e tangenziale quando sia noto $M(s)$.

L. Alfieri.

Sarkisjan, M. S.: Die Biegung eines Stabes von Doppel-T-Querschnitt. Akad. Nauk Armjan. SSR, Izvestija, Ser. fiz.-mat. estestv. techn. Nauk 9, Nr. 7, 61—77 (1956) [Russisch].

Bei der Bestimmung der Spannungsfunktion eines durch Querkraft und Biegung beanspruchten Doppel-T-Trägers kann man sich aus Symmetriegründen auf einen aus zwei Rechtecken bestehenden Bereich beschränken und zerlegt die Funktion für jedes Rechteck zweckmäßig in zwei Summanden. Diese werden durch geeignete Ansätze mit trigonometrischen Gliedern in Richtung von x bzw. y gelöst, deren Koeffizienten aus einem System von unendlich vielen Gleichungen mit beliebiger Genauigkeit bestimmt werden können. Wenn die Stegdicke gleich der Gurtbreite des Trägers genommen wird, geht die Spannungsfunktion für den Mittelstreifen in die bekannte Form für den Rechteckquerschnitt über. Die Formeln der Festigkeitslehre für Scherspannungen gelten mit genügender Genauigkeit nur für den Bereich des Steges.

A. Kuhelj.

Eubanks, R. A. and E. Sternberg: On the completeness of the Boussinesq-Papkovich stress functions. J. rat. Mech. Analysis 5, 735—746 (1956).

Der bereits mehrfach diskutierte Sachverhalt, daß von den vier beim räumlichen Dreifunktionenansatz der Elastizitätstheorie auftretenden harmonischen Funktionen eine Null gesetzt werden darf, ohne die Anwendbarkeit einzuschränken, wird in vorliegender Arbeit durch eine allgemeinere Beweisführung erhärtet.

H. Neuber.

Ling, Chih-Bing: Stresses in a circular cylinder having a spherical cavity under tension. Quart. appl. Math. 13, 381—391 (1956).

Mit Hilfe einer Integraldarstellung für die Spannungsfunktion des achssymmetrischen Spannungszustandes gelingt es Verf., von vornherein die Bedingungen der lastfreien Oberfläche des Zylinders mit Hilfe einer Fourier-Transformation zu erfüllen. Die hierbei auftretenden Bessel-Funktionen werden alsdann nach Übergang auf sphärische Koordinaten in Polynome von Legendreschen Funktionen entwickelt. Die Lösung wird anschließend den Bedingungen der lastfreien Oberfläche des symmetrisch angenommenen kugelförmigen Hohlraumes unterworfen, wobei sich ein System unendlich vieler linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten ergibt, das durch sukzessive Approximation behandelt wird. Zahlenmäßige Ergebnisse in zwei Tabellen.

H. Neuber.

Netrebko, V. P.: Gedrängte Torsion eines elastischen Parallelepipeds. Vestnik Moskovsk. Univ. 11, Nr. 6 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk 4), 11—26 (1956) [Russisch].

The paper presents the torsional problem of an elastic parallelepiped which one of two bases are forced to remain plane („averted torsion“) using the Castigliano's variational methods. First is assumed that the basis $z = 0$ is forced to remain plane (then the displacement components are $u = v = w = 0$) and that the law of the distribution of the shear stresses over the basis $z = h$ is known until the other four lateral sides of the parallelepiped are free of the forces (mixed problem of the classical theory of elasticity). The stress tensor is presented as the sum of the basic and the corrective tensor. The components of the second tensor are formed by means of the Morera's stress functions [Accad. naz. Lincei, Rend., V. Ser. 1, 137—141 (1892)] expressed by the cosine binom functions. To illustrate the procedure one numerical example is given and the stress diagrams are drawn. Further is treated the case when the basis $z = 0$ remains plane until the plane $z = h$ is subjected to the torsional moment acting in this plane which remains also plane (then is $w = 0$).

The same procedure is applied and one numerical example is discussed. In the conclusion is pointed that the distribution of the shear stresses in the cross sections which are enough distant from the bases is very few different from this obtained by means of the Saint Venant's formulae. The normal stresses produced in the fixed bases decrease very quickly because of they can be neglected in the cross sections enough distant from the bases. In this way it is conformed the use of the Castigliano's method in the space problems of the theory of elasticity.

D. Raškovič.

Linden, C. A. M. van der: Thermal stresses in a plate containing two circular holes of equal radius, the boundaries of which are kept at different temperatures. Appl. sci. Research, A 6, 117—128 (1956).

Mit Hilfe bipolarer Koordinaten wird die für die Lösung des Wärmespannungsproblems maßgebliche Spannungsfunktion aufgestellt. Ein Zahlenbeispiel, das sich auf ähnliche Verhältnisse bezieht, wie sie im Zylinderkopf einer Kraftmaschine auftreten können, ist durchgerechnet.

H. Neuber.

Trostel, R.: Instationäre Wärmespannungen in einer Hohlkugel. Ingenieur-Arch. 24, 373—391 (1956).

Si determina da prima lo stato termico in una sfera elastica cava, omogenea e ternicamente isotropa, nell'ipotesi che le generali condizioni assegnate inizialmente e sulle due superficie, interna ed esterna, consentano almeno un asse di simmetria al campo termico prodotto. Per la determinazione di tale campo si seguono classici e ben noti procedimenti. A tale campo termico resta associato uno stato di tensione termoelastica con lo stesso asse di simmetria. Supposto raggiunto lo stato di equilibrio elastico, si determina l'espressione degli sforzi termoelastici in funzione della temperatura T e del potenziale termoelastico F , ad essa legato dall'equazione di Poisson $\Delta F = k T$, con k coefficiente noto. Scritta una formale, particolare soluzione di questa equazione, se ne deducono le corrispondenti espressioni per gli sforzi. Viene esaminato il caso della simmetria sferica, dandone formule di valutazione approssimata. Viene pure accennato al problema dello stato di tensione termoelastica con un asse di simmetria, nel caso di strati sferici di spessore molto piccolo (gusci sferici).

G. Sestini.

Gasparjan, M. M.: Lösung des Temperaturproblems für eine längs der Kontur frei gestützte, konvexe Vielecksplatte bei linearer Verteilung der Temperatur nach der Dicke. Akad. Nauk Armjan. SSR. Izvestija, Ser. fiz.-mat. estestv. techn. Nauk 9, Nr. 9, 15—25 (1956) [Russisch].

As it is known (cf. Timoshenko, Plates and Shells, New York 1940) there is a complete mathematical analogy between the title problem and the problem of bending of a membrane or that of the torsion of a prismatical bar. The author solves the problem by applying the methods of the theory of complex functions (cf. e. g. Muschelishvili, Some basic problems of the mathematical theory of elasticity, this Zbl. 52, 414). Explicit solution in the form of a series is given for the case of a regular polygon and it is illustrated by a numerical example.

D. Radenković.

Koppe, Eberhard: Die Ableitung der Minimalprinzipien der nichtlinearen Elastizitätstheorie mittels kanonischer Transformation. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl., II a 1956, 259—266 (1956).

Die in der klassischen Elastizitätstheorie benutzte Ableitung des Minimalprinzips für die Spannungen (Prinzip von Castigliano) versagt bei nichtlinearem Elastizitätsgesetz und endlichen Formänderungen. Ausgehend vom Prinzip der virtuellen Arbeit, das auch in der nichtlinearen Elastizitätstheorie unmittelbar zum Minimalprinzip für die Verschiebungen führt, sind deshalb in der vorliegenden Arbeit das Minimalprinzip für die Spannungen und ein weiteres Minimalprinzip, bei dem sowohl Verschiebungen als auch Spannungen variiert werden, durch kanonische Transformation gewonnen worden. Diese Ableitung der Minimalprinzipien berücksichtigt die endliche Verformung des Körpers und bleibt auch bei nichtlinearem

Zusammenhang von Spannungen und Verschiebungsableitungen gültig. (Zusammenfassung des Autors.) *D. Radenković.*

Simons, Roger M.: A power series solution of the nonlinear equations for axi-symmetrical bending of shallow spherical shells. *J. Math. Physics* **35**, 164—176 (1956).

Viene considerato il problema del calcolo degli sforzi e delle deformazioni in una calotta sferica sottile soggetta ad una pressione normale uniforme, con due diversi tipi di condizioni al bordo: appoggio ed incastro. Il problema dipende dall'integrazione del seguente sistema di due equazioni differenziali non lineari nelle due incognite $F(x)$, $G(x)$ ($0 \leq x \leq 1$):

$$(1) \quad F'' + \frac{F'}{x} - \frac{F}{x^2} = -\mu^2 G + 2x + \gamma \frac{FG}{x}, \quad G'' + \frac{G'}{x} - \frac{G}{x^2} = \mu^2 F - \frac{\gamma F^2}{2x},$$

(γ, μ costanti), con le condizioni (2) $F(0) < \infty$, $G(0) < \infty$ e (3) $F'(1) + \nu F(1) = 0$, $G'(1) - \nu G(1) = 0$ (appoggio) oppure (4) $F(1) = 0$, $G'(1) - \nu G(1) = 0$ (incastro). Tenendo conto di (1), (2) si cerca la soluzione sotto la forma $F = \sum F_n x^n$, $G = \sum G_n x^n$ (n dispari); i coefficienti F_n , G_n sono determinati da formule ricorrenti che lasciano arbitrari F_1 , G_1 . Questi vanno determinati in base alle (3) o (4); ciò è estremamente complicato e perciò si propone un metodo di calcolo numerico approssimato. Sono dati tre metodi per avere una prima approssimazione $F_1^{(0)}$, $G_1^{(0)}$ di F_1 , G_1 ; dopo di che viene esposto un procedimento ricorrente per calcolare approssimazioni successive. Il metodo è illustrato da un esempio numerico che ne mostra l'efficacia. Infine si studiano le questioni di stabilità e si dà un procedimento per il calcolo approssimato del primo valore critico del parametro γ . *A. Ghizzetti.*

Rivlin, R. S.: Stress-relaxation in incompressible elastic materials at constant deformation. *Quart. appl. Math.* **14**, 83—89 (1956).

Inkompressible isotrope elastische Stoffe verhalten sich wesentlich wie ideale elastische Stoffe, wenn sie nur kurzfristig endlichen Deformationen ausgesetzt sind. Wenn sie aber langfristig in dem neuen Deformationszustand gehalten werden, zeigen sie ein Nachlassen der deformierenden Kräfte. Es wird gezeigt, daß sich die Theorie der endlichen Deformation eines inkompressiblen isotropen idealen elastischen Stoffes mit leichten Änderungen auf „spannungslockernde“ elastische Stoffe übertragen läßt. Als Beispiele werden behandelt: einfache Dehnung, gleichzeitige Streckung und Torsion eines zylindrischen Stabes oder einer zylindrischen Röhre, schwache Torsion als Überlagerung zu der Streckung eines Stabes beliebigen Querschnitts. *J. Pretsch.*

Drucker, D. C.: On uniqueness in the theory of plasticity. *Quart. appl. Math.* **14**, 35—42 (1956).

Uniqueness of solutions in the theory of plasticity is discussed avoiding, however, the only principle on which such discussion could reasonably be based in the case of a dissipative medium, namely the principle of „minimum entropy production“ which underlies the classical concept of Mises' „plastic potential“. All arguments about and proofs of uniqueness follow easily from this concept alone. (A. M. Freudenthal und H. Geiringer, „Mathematical Theories of the Inelastic Continuum“, Section A III, Handbuch d. Physik Vol. 6, Berlin 1957). *A. M. Freudenthal.*

Freiberger, W.: Elastic-plastic torsion of circular ring sectors. *Quart. appl. Math.* **14**, 259—265 (1956).

The solution is presented to the problem of uniform torsion of circular ring sectors with circular cross section under the assumption of perfect plasticity. The elastic-plastic problem is solved by a semi-inverse method. When the entire ring is plastic a discontinuity of stress appears which may be regarded as the limiting case of an elastic core. The solution for the discontinuous fully plastic stress distribution is exact, that for the elastic-plastic case approximate in the sense that it is found exactly for cross sections differing slightly from the circular. This difference is

negligible for ratios of ring radius R to cross section radius ϱ occurring in practical applications to helical springs of small pitch. (From author's summary.)

D. Radenković.

Rozovskij, M. I.: Ein halbsymbolisches Verfahren zur Lösung gewisser Probleme der Theorie des Kriechens. Akad. Nauk Armjan. SSR, Izvestija, Ser. fiz.-mat. estestv. techn. Nauk 9, Nr. 5, 43—60 (1956) [Russisch].

On the contrary to the Volterra's procedure given in the symbolic form in this paper the author treats the problems of the linear creep by means of the new procedure given in the halfsymbolic form which has inductive character and excludes the introduction of the special functions. This procedure can be also applied in the case of nonlinear creep when the nonlinearity is characterized as the functional relations between the instantaneous modulus of elasticity and the deformations. The three problems are treated: 1. the compound process of the deformation with linear starting physical dependences, 2. the compound process of the deformation with nonlinear starting dependences, 3. the vibrating process under the creep material effect. In the first case the governed integrodifferential equation is transformed by means of the Volterra's integral operator in symbolic form and the solution is supposed in the form of the convergent series which can be treated as the Neumann's special series. In the second case is treated the buckling problem of the beam with rectangular cross section when the nonlinear dependence exists between the tension and the deformation. The integral equation is solved by means of the method of the successive approximations. In the 1st and 2nd case the proposed method has sufficient generality since the integral operators have the commutation property, but in the third case because of the time derivatives this procedure has not such quality. The displacement vector is supposed to be the sum of the scalar and vector potentials; the governed equation then has Volterra's form. One example shows that the proposed procedure can be applied in the case of the limited hereditary kernel and also in the case when it has a small singularity. The time's change of the scalar potential is determined by means of the special trigonometric functions (this Zbl. 65, 404).

D. Rašković.

Freiberger, W. and W. Prager: Plastic twisting of thick-walled circular ring sectors. J. appl. Mech. 23, 461—463 (1956).

The paper presents a graphical method of determining the fully plastic stress distribution in a twisted circular ring sector with hollow cross section and the warping of the cross sections of this ring in the ensuing plastic flow. The ring is assumed to consist of a rigid, perfectly plastic material.

Zusammenfass. des Autors.

Bland, D. R.: Elastoplastic thick-walled tubes of work-hardening material subject to internal and external pressures and to temperature gradients. J. Mech. Phys. Solids 4, 209—229 (1956).

Der Verf. erweitert eine Arbeit von Koiter (dies. Zbl. 53, 140) über elastisch-idealplastische dickwandige Rohre unter konstantem Innen- und Außendruck auf das Vorhandensein von Verfestigung und Wärmespannungen. Bezeichnen r, θ, z (z -Achse = Rohrachse) Zylinderkoordinaten; $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ die zugehörigen Normalspannungen; $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$ entsprechende Verzerrungen (ε^e : elastisch, ε^p : plastisch), so wird im wesentlichen folgendes vorausgesetzt: 1. $\sigma_\theta \geq \sigma_z \geq \sigma_r$; 2. $\varepsilon_z^p = 0$; 3. kleine Formänderungen; 4. Trescasches Fließkriterium: $\sigma_\theta - \sigma_r = k(\varepsilon^p) =$ vorgegebene Funktion der sog. „äquivalenten Verzerrung“ ε^p (nach Hill [Mathematical Theory of Plasticity, dies. Zbl. 41, 108] mittels der ε_i definiert); 5. die (ortsabhängige) Temperatur T beeinflusst weder k noch die elastischen Konstanten, erzeugt also lediglich elastische Spannungen und ist zeitlich konstant; 6. $d\varepsilon_\theta^p \geq 0$; 7. alle Größen sind unabhängig von z und θ . — Nach eingehender Diskussion dieser Voraussetzungen werden Formeln für die σ_i und ε_i unter drei verschiedenen äußeren Gegebenheiten (ebene Formänderung, geschlossenes Rohr, offenes Rohr) errechnet,

wozu gelegentlich numerische Verfahren [Auswertung des Integrals $\int (k/r) dr$] nötig sind. Geschlossene Ausdrücke ergeben sich bei „linearer Verfestigung“ $k = k_0 (1 + \eta \varepsilon^p)$, $k_0, \eta = \text{const.}$ Zahlenmäßige Beispiele grenzen den Bereich der Rohrabmessungen und Konstanten ab, für die Voraussetzung 1 gilt. Insbesondere wird 1. für idealplastischen Werkstoff durch gewisse Ungleichungen in den Konstanten und Abmessungen ersetzt. Interesse verdient die Berechnung des Entlastungsvorganges (Entfernung von Innen- und Außendruck sowie der Wärmespannungen) insbesondere für den Fall, daß dadurch rückläufige plastische Formänderung entsteht (Formeln und Zahlenbeispiele). Hierher gehört folgendes hübsche Ergebnis: Bei idealplastischem Werkstoff, Abwesenheit von Wärmespannungen und gleichbleibenden sonstigen Bedingungen ist der minimale Innendruck, welcher einen plastischen Formänderungsanteil erzeugt, halb so groß wie derjenige minimale Innendruck, welcher bei Entlastung einen rückläufigen plastischen Formänderungsanteil zur Folge hat. — Die reichhaltige Arbeit schließt mit Anregungen für eine Fortführung.

H. Lippmann.

● **Eirich, Frederick R. (edited by): Rheology. Theory and applications. Vol. 1.** New York: Academic Press Inc., Publishers, 1956. XIV, 761 p., illus. \$ 20,00.

The scope of rheology is not easily defined. It is usually considered to deal with the flow of those more or less complex real media which form the wide transition range between the „classical“ (ideal and linear viscous) liquids and the classical (elastic and ideal plastic) solids. Occasionally a much broader scope is implied, and the whole field of continuum mechanics plus a substantial part of solid state physics claimed as the domain of „rheology“. The present book is designed on the basis of this allinclusive aspect of rheology, and it is only natural that the very wide scope has to be paid for by a certain lack of depth in the treatment of various subjects, particularly of some of those subjects that would not seem to belong to rheology proper. The heterogeneity of background of research workers in the field of rheology is obvious to anybody that ever attended a rheology congress and it is admittedly an extremely difficult task to plan a reference work that would be of equal interest to organic or physical chemists with little or no mathematical background on the one hand and to theoretical physicists and applied mathematicians on the other. It is therefore not surprising that the editor, who has assembled an imposing array of contributors, has not quite succeeded in the attempt to provide a well balanced reference work on the basis aspects of rheology. The book is nevertheless an important contribution as a series of up-to-date reviews of various fields of or related to rheology. Chapters headings and authors are as follows: 1. Introduction (**Eirich**). 2. Phenomenological Macrorheology (**Reiner**). 3. Finite Plastic Deformation (**Prager**). 4. Stress-Strain Relations in the Plastic Range of Metals (**Drucker**). 5. Mechanical Properties and Imperfections in Crystals (**Dienes**). 6. Dislocations in Crystal Lattices (**J. M. and W. G. Burgers**). 7. Mechanical Properties of Metals (**Fleeman and Dienes**). 8. Some Rheological Properties under High Pressure (**Dow**). 9. Theory of Viscosity (**Bondi**). 10. Large Elastic Deformations (**Rivlin**). 11. Dynamics of Viscoelastic Behavior (**Alfrey**). 12. Viscosity Relationship for Polymers in Bulk and in Concentrated Solution (**Fox, Gratch and Loshaek**). 13. Statistical Mechanical Theory of Irreversible Processes in Solutions of Macromolecules (**Riseman and Kirkwood**). 14. Viscosity of Colloidal Suspensions and Macromolecular Solutions (**Frisch and Simha**). 15. Streaming and Stress Birefringence (**Peterlin**). 16. Non-Newtonian Flow of Liquids and Solids (**Oldroyd**). 17. Acoustics and the Liquid State (**Lindsay**). Of the 17 chapters less than half are of mathematical interest.

A. M. Freudenthal.

Volterra, E.: Eigenvibrations of curved elastic bars according to the „Method of internal constraints“. Ingenieur Arch. 24, 317–329 (1956).

Die in der früheren Arbeit (dies. Zbl. 66, 194) aufgestellten Bewegungsglei-

chungen der freien elastischen Schwingungen eines ebenen Balkens der Krümmung $c(x)$ zerfallen in ein System von 5 resp. 4 partiellen Differentialgleichungen für die Komponenten der Eigenschwingungen, die in der ursprünglichen Balkenebene liegen resp. aus ihr hinausführen. Verf. macht zur Lösung dieser Systeme unter der Voraussetzung schwacher Krümmung einen Ansatz der Störungsrechnung, indem er die Lösungen linear aus den Lösungen des ungestörten Problems (geradliniger Balken, d. h. $c = 0$) kombiniert. Die Eigenfrequenzen und die unendlichvielen Koeffizienten in diesem Ansatz werden explizit als Funktionen der Eigenfrequenzen und der Eigenfunktionen des ungestörten Problems berechnet, wobei gewisse Orthogonalitätseigenschaften dieser Eigenfunktionen herangezogen werden; hierbei sind mehrere bestimmte Integrale auszurechnen. — Mit derselben Methode läßt sich auch das Problem der freien Schwingungen im Fall des ebenen Verzerrungszustandes behandeln.

R. Moufang.

Volterra, E.: The equations of motion for curved and twisted elastic bars deduced by the use of the „Method of internal constraints“. Ingenieur-Arch. 24, 392—400 (1956).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit (dies. Zbl. 66, 194) stellt Verf. die Differentialgleichungen der freien elastischen Schwingungen eines isotropen homogenen Balkens endlicher Länge auf, dessen Schwerpunktschse eine Raumkurve mit gegebener veränderlicher Krümmung c und Windung τ ist. Das krummlinige Koordinatensystem X, Y, Z in einem allgemeinen Punkt der Schwerpunktschse ist orientiert nach dem begleitenden Dreiein der Raumkurve. Der Einfachheit halber ist angenommen, daß die Hauptnormale und Binormale mit den Hauptträgheitsachsen des Querschnitts zusammenfallen. Die Querschnitte, ursprünglich eben und senkrecht zur X -Achse, sollen eben bleiben, was für den Verschiebungsvektor $\bar{V}(x, y, z, t)$ zu dem Ansatz führt (Methode der internal constraints) $V = v(x, t) + y \lambda(x, t) + z \mu(x, t)$ mit unbekannten Vektoren $\bar{v}, \alpha, \bar{\mu}$. Aus dem metrischen Fundamentaltensor werden im Bereich infinitesimaler Formänderungen die Verzerrungen erhalten, aus diesen die kinetische und die potentielle Energie als Funktionen der kontravarianten Komponenten der Vektoren \bar{v}, λ, μ . Das Hamiltonsche Prinzip liefert dann für die 9 Komponenten dieser Vektoren ein System von 9 partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung und die Randbedingungen, wodurch der Verschiebungsvektor bestimmt ist. — Die Bewegungsgleichungen für die Fälle $c = 0$ resp. $\tau = 0$ werden gesondert angegeben. Im Falle $c = 0$ und $\tau = 0$ ergeben sich die früher (l. c.) abgeleiteten Gleichungen.

R. Moufang.

Suppiger, Edward W. and Nazih J. Taleb: Free lateral vibration of beams of variable cross section. Z. angew. Math. Phys. 7, 501—520 (1956).

On the contrary to other authors (Kirchhof, Capellen, Nicholson, Wrench, Schwerin, Taleb, etc.) in this paper the authors deal with the approach by the differential equation of motion for beams with cross sectional areas and moments of inertia that vary in an exponential manner [area $A(x) = A_0(\exp bx)$, moment $I(x) = I_0(\exp bx)$, $b = c/L$, b and c are arbitrary constants and the radius of gyration of the cross section of the beam is constant]. Using simple beam theory, neglecting the effects of rotatory inertia and shearing force, the authors reduce the well-known partial differential equation for free lateral vibration of a beam to the differential equation $X^{IV} + 2bX''' + b^2X'' - K^2X = 0$, $K^2 = p^2\gamma A_0/EgI_0$. Assuming that the general solution is $X = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\exp r_i x)$, where r_i , $i = 1, \dots, 4$, are the roots of the characteristic equation $r^4 + 2br^3 + b^2r^2 - K^2 = 0$, the normal function has the form

$X = (\exp -bx/2)[C_1 \cosh \alpha x + C_2 \sinh \alpha x + C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x]$, with $\alpha = \frac{1}{2}(4K + b^2)^{1/2}$, $\beta = \frac{1}{2}(4K - b^2)^{1/2}$. The four cases are treated: 1. simply

supported beam, 2. beam with both ends fixed, 3. beam simply supported at one end and fixed at the other end, 4. cantilever beam. The limiting cases (prismatical beams, when $b = c = 0$) are shown also. The calculations are limited to the first and second mode of vibration only. The actual sections of surfaces of revolution of beams that satisfy the assumed conditions are considering. It is shown that in general case the beams will be hollow. Two examples are discussed, for $c = 1$ and with the radius ratios $R_0/r_0 = 1,46$ or $1,10$ of hollow circular sections. Numerical values are tabulated and plots are drawn. (See Cranch and Adler, this Zbl. **71**, 399.) *D. Rašković.*

Paillox, Henri: Sur les vibrations latérales d'une poutre chargée. *C. r. Acad. Sci., Paris* **242**, 2097—2099 (1956).

A general method proposed by the author for the case of a continuous load distribution is extended to concentrated ones. *M. M. Peixoto.*

Fogagnolo Massaglia, Bruna: Sulle vibrazioni trasversali di uno strato elastico libero sulle basi ed appoggiato sui bordi. *Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat.* **15**, 163—174 (1956).

L'A. presenta lo studio delle vibrazioni trasversali di uno strato elastico, per il quale non sia più lecito trascurare lo sforzo specifico relativo ad una qualsiasi sezione parallela alle basi, particolarmente il caso di uno strato elastico omogeneo, a forma di parallelepipedo rettangolo, libero sulle basi ed appoggiato sui bordi. L'ipotesi che questo stato sia libero sulle basi e appoggiato sui bordi implica che siano soddisfatte le condizioni al contorno: $X_z = Y_z = Z_z = 0$, per $z = \pm l$, $S_y = S_z = X_x$, per $x = 0$ e $x = a$, $S_x = S_z = Y_y = 0$, per $y = 0$ e $y = b$, dove sono X, Y, Z le componenti del tensore degli sforzi e S le componenti dello spostamento elastico. Questo studio implica pertanto la ricerca di soluzioni delle equazioni della elasticità che variano sinusoidalmente col tempo, $\vec{S} = (\text{grad } \Phi + \text{rot } \vec{U}) \sin \sigma t$, $\text{div } \vec{U} = 0$, e chi soddisfano le condizioni al contorno precedenti. Le due funzioni Φ ed U dovranno soddisfare alle equazioni differenziali

$$\Delta_2 \Phi + \rho \sigma^2 (\lambda + 2\mu)^{-1} \Phi = 0, \quad \Delta_2 \vec{U} + \rho \sigma^2 \mu^{-1} \vec{U} = 0,$$

dove sono λ, μ i parametri di Lamè, ρ la densità. In questo modo il problema è ridotto all'integrazione dell'equazione differenziale

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} + \tau^2 l^{-2} [\mu - (\lambda + 2\mu) \xi^2] (\lambda + \mu)^{-1} \psi = 0,$$

dove sono $\Phi = \Phi(\varphi)$, $\vec{U} = \vec{U}(\varphi)$, $\varphi = \varphi(x, y)$, $\psi = \psi(x, y)$. Le condizioni al contorno sono soddisfatte se ψ soddisfa alle condizioni $\psi = 0$ per $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$. Ponendo $\psi(x, y) = v(x) \cdot w(y)$, con le condizioni al contorno $v(0) = v(a) = 0$, $w(0) = w(b) = 0$ si trova $\psi(x, y) = A \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b)$. Tra i costanti τ e ξ sono date due legami. I risultati del calcolo sono rappresentati nel due diagrammi. Il valore di ξ è calcolato per l'acciaio. Le componenti S ed X, Y, Z sono determinate. L'A. osserva che in ogni punto del piano medio $z = 0$ risulta $S_x = S_y = 0$ ed $S_z \neq 0$, poi $X_x = Y_y = X_y = Z_z = 0$, ed $X_z \neq 0$, $Y_z \neq 0$, il che mette in evidenza la diversità di comportamento delle soluzioni trovate rispetto a quelle che caratterizzano lo stato vibratorio di una piastra. *D. Rašković.*

Hayes, W. D. and J. W. Miles: The free oscillations of a buckled panel. *Quart. appl. Math.* **14**, 19—26 (1956).

One considers a two-dimensional plate loaded axially by two equal and opposite compressive forces $F(t)$ per unit width, applied at the pin supports ($x = 0$, $x = l$), assuming that the flexural stiffness (D) and mass per unit area (m) are constant and that the fraction of the length (δ) by which the plate is buckled is small. The non-linear equation of motion of the plate ($D y_{xx}'''' + F y_{xx}'' + m y_{tt} = 0$, with boundary conditions $y(0) = y(l) = 0$, $y_{xx}(0) = y_{xx}(l) = 0$, is formulated in dimensionless form. In virtue of the linearity of the governed equation a Fourier expansion in the space variable is introduced. Because of the general solution of the problem

can be not obtained explicitly, the analysis is restricted to the simplest possible situation and an approximative solution is obtained for the period of free oscillations on the assumption of only two degrees of freedom with initial conditions. The phase plane trajectories of free oscillations with separatrix are plotted. It is shown that the three possible types of oscillations are analogous to the oscillations of a pendulum. The periods of the asymmetric and symmetric modes are expressed by means of elliptic integrals of the third kind, and plotted as a function of the energy level. It is shown that for very small energy levels the period of the buckled panel lies between the periods of the two unbuckled degrees of freedom. It is marked that when the energy is increased the period approaches infinity at some critical energy level and thereafter decreases monotonically. The problem is of practical interest and serves as a simple model of the „oil canning“ phenomenon. *D. Rašković.*

Scotto Lavina, Giovanni: Sul calcolo ed affinamento delle caratteristiche delle vibrazioni dei sistemi elastici ad n gradi di libertà. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. **90** (III. Ser. **21**), 89—106 (1956).

I metodi matriciale e quelle delle funzioni „Escalator“ [J. Morris, H. Head, Philos. Mag., VII. Ser. **35**, 735—759 (1944)] per la risoluzione dell'equazione delle frequenze delle vibrazioni di sistemi elastici ad n gradi di libertà, quando n è un pò elevato, hanno una mancanza: la mole di calcoli numerici è molto rilevante e l'approssimazione relativa con cui si ottengono le caratteristiche delle vibrazioni diminuisce rapidamente con l'ordine di queste, tanto che per quelle degli ordini più elevati si può pervenire talvolta a valori del tutto inattendibili. Intenendo della presente nota, utilizzando il calcolo matriciale, è di dare anzitutto la giustificazione di un procedimento che, basato sui normali procedimenti iterativi, permette di giungere abbastanza rapidamente alla determinazione delle caratteristiche degli n modi di vibrare. Il sistema di equazioni algebriche, ridotto alla forma simmetrizzata si trasforma nelle $(\lambda [1] - [\mu]) \{y\} = 0$ coll'equazione secolare $|\lambda [1] - [\mu]| = 0$, dove sono: $\lambda_i = \omega_i^{-2}$ l'autovalore reciproco relativo alla vibrazione di ordine i^{ma} di pulsazione ω_i , supponendo che siano $\lambda_i > \lambda_{i+1}$, $m_h^{1/2} u_h = y_h$, $(m_h m_k)^{1/2} \alpha_{hk} = \mu_{hk}$, m_k le masse, $k = 1, 2, \dots, n$, u_h ampiezze massime, $[\mu]$ la matrice fondamentale dei ridotti coefficienti d'influenza α_{hk} , $[1]$ la matrice unitaria di ordine n . Per il calcolo della vibrazione fondamentale, secondo i processi d'iterazione, si assumerà una ennupla di primo tentativo, di elementi $\psi_h^0(\lambda_1)$, caratterizzante una verosimile configurazione del sistema vibrante alla pulsazione fondamentale; la post-moltiplicazione della matrice $[\mu]$ per la matrice costituita della sola colonna delle $\psi_h^0(\lambda_1)$ darà come risultato una colonna $\{Y'(\lambda_1)\} = [\mu] \cdot \{\psi^0(\lambda_1)\}$, che costituiscono una ennupla più approssimata, e così analogamente per le successive iterazioni fino alla r^{ma} , che darà come risultato $\{Y^{(r)}(\lambda_1)\} = [\mu] \{\psi^{(r-1)}(\lambda_1)\}$, con $\psi_h^{(r-1)} = Y_h^{(r-1)} / Y_n^{(r-1)}$, $\psi_n^{(r-1)}(\lambda_1) = 1$. Il corrispondente autovalore $\lambda_1^{(r)}$ si otterrà con i due quozienti di Rayleigh (chiamati il primo e il secondo rapporto di Rayleigh). Per $r \rightarrow \infty$ la ennupla di elementi $\psi_h^{(r)}(\lambda_1)$ tende a coincidere colla ennupla di elementi $\psi_h^{(r-1)}(\lambda_1)$ ottenuti dalla $(r-1)^{\text{ma}}$ iterazione; quindi tale risultato potrà assumersi a rappresentare l'autoennupla delle $y_h(\lambda_1)$ caratterizzante la configurazione del sistema alla vibrazione fondamentale. Passando alla vibrazione del 2° ordine, l'ennupla $\psi_h^0(\lambda_2)$ dovrà essere epurata del termine relativo alla vibrazione fondamentale. La post-moltiplicazione della $[\mu]$ per la colonna $\{\psi^0(\lambda_2)\}$ darà una ennupla più approssimata e così analogamente per le successive iterazioni fino alla r^{ma} . L'estensione del procedimento alle vibrazioni degli ordini superiori è presentato. Le formule che dimostrano la convergenza delle $Y_h^{(r)}(\lambda_1)$ e delle autovalori $\lambda_1^{(r)}$ sono dedotte. Utilizzando le proprietà degli autovalori e delle autoennuple, si mostra come sia possibile „affinare“ i risultati ottenuti per le vibrazioni dei diversi ordini, portandoli gradatamente ad essere espressi con la stessa approssimazione relativa alle caratteristiche della vibra-

zione fondamentale. L'A. segna che il metodo è stato sperimentato su problemi anche complessi (l'applicazione alla completa risoluzione di un problema su 12 gradi di libertà, già tentato dal Morris col metodo delle funzioni Escalator).

D. Rašković.

Čelomej (Chelomey), V. N.: On the possibility of raising the stability of elastic systems by means of vibrations. Doklady Akad. Nauk SSSR 110, 345—347 (1956) [Russisch].

The differential equation of dynamical equilibrium in linear approximation can be represented in the following form: (1) $L_1 + P L_2 + \dot{L}_3 + \ddot{L}_4 = 0$. Here are: $L_i(w)$ the linear differential operators, $P(t) = P_0 + F(\omega t)$, F is periodic axial force expressed by means of Fourier's series, w a displacement. Taking the solution in the form $w = v(x_i) \cdot \varphi(t)$ one obtains the approximative differential equation with periodic coefficients, (2) $\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + \Omega^2(\alpha - F P_k^{-1})\varphi = 0$, where are: Ω the frequency of the free vibrations, P_k critical force of the static action, n damping coefficient and $\alpha = 1 - P_0 P_k^{-1}$. Assuming that $(\Omega/\omega)^2 = \varepsilon \ll 1$ and utilising the method of the perturbations combined with Bogoliuboff's method one obtains the approximative equation (2) in the form: $\ddot{\varphi}_0 + 2n\dot{\varphi}_0 + \Omega^2(\alpha + \beta)\varphi_0 = 0$ in which are $\beta = \frac{1}{2}\varepsilon P_k^{-2} \sum (a_m^2 + b_m^2) \cdot (m^2 + \mu^2)^{-1}$, $\mu = 2n\omega^{-1}$. This equation shows that the system performs damping vibrations with raised frequencies. Hence, one concludes that the pulsation of the force raises the rigidity of the elastic couplings. When $P_0 = P_k$ the system is stable, but it is stable also when $P_0 > P_k$ if $\beta > -\alpha$. This relation gives a principling possibility to raise the stability of the elastic systems by means of vibrations. As an example the coupled longitudinal-bending vibrations of bar is treated. The complex case when the equation (2) has nonlinear form is discussed also. The interesting dynamical analogy between this problem and the motion of pendulum with pulsing point of suspension is marked.

D. Rašković.

Vorovič (Vorovich), I. I.: On the Bubnov-Galerkin method in the non-linear theory of vibrations of slightly raked shells. Doklady Akad. Nauk SSSR 110, 723—726 (1956) [Russisch].

The non-linear functional equation of the form $\bar{\omega}_{tt} + K\bar{\omega}_t + A_1\bar{\omega} + A_2\bar{\omega} = \bar{F}(P, t)$, with homogeneous boundary conditions and initial conditions is treated. Here are: $\bar{\omega}$ the certain n -dimensional vector function of the point P and parameter t , $0 \leq t \leq T$; P belongs to the k -dimensional region Ω with boundary Γ . The author shows that under certain conditions this equation can be treated as the equation of motion of a mechanical system; then the member $A_1\bar{\omega}$ represents the linear part and $A_2\bar{\omega}$ the non-linear part of the force's potential, $K\bar{\omega}_t$ is the damping force and $\bar{F}(P, t)$ the acting force. In this case the generalized solution of the above equation can be obtained as the vector function which satisfies the integral relations expressed by means of operators satisfying Hamilton's principle. Then the Bubnov-Galerkin's method can be applied also. The explanation is applied to the two problems of the Vlasov's non-linear theory of vibrating shells. Two theorems concerning the numbers of the generalized solutions are proved. It is marked that the presented method can be used also in the case when the equations of the vibrating shells are simplified; then one obtains the integro-differential equation. The cited literature is exclusively in Russian.

D. Rašković.

Davin, Marcel: Sur la vibration forcée d'un sol stratifié. C. r. Acad. Sci., Paris 243, 352—354 (1956).

La théorie des efforts et déformations dans un sol stratifié à deux couches, sous l'action d'une charge statique, donnée de Burmister est étendue au cas d'une charge dynamique. En supposant, ici, que les forces appliquées sont verticales on s'exprime l'onde plane pénétrante pour le milieu supérieur et inférieur. On a démontré qu'il

y a trois ondes de dilatation et trois de distorsion, par cela il faut six équations: deux conditions de continuité des déplacements à l'intersurface, deux conditions fournies par les contraintes données sur la surface et deux conditions de continuité des contraintes à travers l'intersurface. Le système des équations se ramène au système des deux équations seulement. La solution pour les ondes pénétrantes on recompose à une donnée $N = \cos p t F(x, y) + \sin p t G(x, y)$, si le spectre des fonctions F et G ne comporte pas de longueur d'onde inférieure à la plus grande des quantités $2\pi c_{ij}/p$, $p > 0$, c_{i1} est la célérité de dilatation et c_{i2} de distorsion. *D. Rašković.*

Davin, Marcel: Sur la vibration forcée d'un sol stratifié. C. r. Acad. Sci., Paris **243**, 565—567 (1956).

Continuation de l'article résumé ci-dessus. Les résultats précédants sont appliqués au cas quant le longueur d'onde est inférieur à une certaine limite. On a démontré si le longueur d'onde tombe au-dessous de l'une des quantités $2\pi c_{ij}/p$, $p > 0$, c_{i1} est la célérité de dilatation et c_{i2} de distorsion, les ondes pénétrantes correspondantes font place à une onde non pénétrante. A une onde descendante ($r > 0$), resp. remontante ($r < 0$), correspond ici une onde amortie vers le bas, resp. amplifiée vers le bas — seulement dans le milieu supérieur. L'A. montre aussi comment on peut recomposer, sans restriction de longueur d'onde, la solution correspondante à une donnée quelconque de pressions normales sur la surface, en supposant toutefois cette donnée sinusoïdale dans le temps. *D. Rašković.*

Miller, G. F. and M. J. P. Musgrave: On the propagation of elastic waves in aeolotropic media. III. Media of cubic symmetry. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **236**, 352—383 (1956).

Die im Teil I [2. Verf., ibid. **226**, 339—355 (1954)] dargelegte allgemeine Analysis wird in vorliegender Arbeit zur Untersuchung der Wellenfront und der Ausbreitungsgeschwindigkeit elastischer Wellen in einem Medium mit kubischer Symmetrie herangezogen. Die Auswertung wird für Aluminium und Nickel durchgeführt. Die Ergebnisse sind in Tabellen und Diagrammen zusammengestellt. *H. Neuber.*

Arčašnikov, V. P.: Über eine Aufgabe der Theorie des Grenzgleichgewichts. Izvestija Akad. Nauk Kazach. SSR, Ser. Mat. Mech. **5** (9), 109—115 (1956) [Russisch].

Diese Note gibt die Lösung der Aufgabe über die Bestimmung des Drucks seitens des Abbaubodens unter Voraussetzung: a) eines gleichmäßigen Drucks seitens der Querpfeiler; b) der Bedingung des Grenzgleichgewichts in der üblichen Form. — Diese Aufgabe, die ein Spezialfall des allgemeinen Problems der Stabilität von Grundflächen ist, wird nach der Methode der Einführung eines Näherungsrisses der Gleitlinien gelöst, deren Ideen V. G. Berezancev (V. G. Berezancev, Achsensymmetrische Aufgabe der Theorie des Grenzgleichgewichts eines rieselnden Mediums, Moskau 1952) gehört. *Aus der Einleitung.*

Hydrodynamik:

Godunov, S. K.: Über die Eindeutigkeit der Lösung der Gleichungen der Hydrodynamik. Mat. Sbornik, n. Ser. **40** (82), 467—478 (1956) [Russisch].

Verf. beweist: das System

$$(1) \quad \partial u / \partial t + \partial p(v) / \partial x = 0, \quad \partial v / \partial t - \partial u / \partial x = 0$$

besitzt eine einzige verallgemeinerte Lösung, d. h. ein Paar von Funktionen u, v , die für beliebige geschlossene Kontur Γ den Gleichungen

$$\oint u \, dx - p \, dt = 0, \quad \oint v \, dx + u \, dt = 0$$

genügen. Er überträgt den Eindeutigkeitsbeweis auf das System

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} p(v, E) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(E + \frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial p u}{\partial x} = 0,$$

indem er nur diejenigen Fragen betrachtet, in welchen es einen gewissen Unterschied gibt. Es wird der Eindeutigkeitsbeweis der Lösungen der genannten Systeme (1), (2) bei gewissen vom Beweise selbst bedingten Beschränkungen durchgeführt, die mit

den Charakteristiken der betrachteten Systeme in Zusammenhang stehen. Es scheinen diese Bedingungen insoweit umständlich, als sie eine Stoßwellenverdünnung verbieten. Nähere Erklärungen, daß die vorausgesetzten Beschränkungen eben diesen hydrodynamischen Sinn haben, werden nicht gegeben. Es wird weiter mitgeteilt, daß die Bedingung: es seien keine Stoßwellenverdünnungen anwesend, äquivalent mit der Bedingung ist, daß in jeder geschlossenen Kontur Γ die Relation $\oint S dx \leq 0$, gilt, wo S die Entropie bedeutet. Der gegebene Eindeutigkeitsbeweis benutzt die Idee eines bekannten Satzes von Holmgren und beruht auf dem Existenzsatz von Lösungen der partiellen Differentialgleichungen.

Bl. Dolaptschiew-Bl. Sendow.

Long, Robert R.: Sources and sinks at the axis of a rotating liquid. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **9**, 385—393 (1956).

Verf. behandelt die rotationssymmetrische, stationäre Strömung einer reibungs-freien, inkompressiblen, wirbelbehafteten Flüssigkeit. Es wird angenommen, daß im Querschnitt $x = -\infty$ (x -Achse = Symmetrieachse) die Flüssigkeit wie ein starrer Körper rotiere und gleichzeitig parallel zur x -Achse die konstante Geschwindigkeit u_0 besitze. Der Strömungsbereich werde durch eine zylindrische Wand im Abstand b von der Achse begrenzt, An der Stelle $x = 0$ der Achse befinde sich eine Quelle oder Senke, die so wirke, wie eine zur Achse senkrechte Wand mit einer kleinen Öffnung in der Achse, durch die Flüssigkeit eingepreßt oder abgesaugt werden kann. Maßgebend für den Charakter der Lösung ist die Rossby-Zahl Ro , die als Verhältnis der Normalbeschleunigung zur Coriolisbeschleunigung gedeutet werden kann. Für große Werte von Ro erhält man für die Stromfunktion eine Reihendarstellung, deren Glieder in der x -Richtung abklingende Exponentialfunktionen, in radialer Richtung Besselfunktionen darstellen. Je kleiner die Werte von Ro in diesem Bereich angenommen werden, desto mehr zieht die Senke die Flüssigkeit aus dem achsennahen Gebiet der Strömung. Beim kritischen Wert $Ro = 0,261$ ergeben sich theoretisch Rückströmungen in der Nähe der Zylinderwand, die mit einer Abnahme des Dralls bei wachsendem Abstand von der Achse gekoppelt sind. Solche Strömungen dürften nicht stabil sein und es ist Strahlablösung in der Nähe der Achse zu erwarten, wie dies das Experiment auch zeigt. Für $Ro = 0,261$ ergeben sich theoretisch Wellen in der x -Richtung und es können für $Ro = 0,261$ die Randbedingungen für $x = -\infty$ nicht mehr erfüllt werden.

G. Heinrich.

Tesson, Fernand: Application du premier principe aux systèmes fluides limités par une surface de contrôle variable. *C. r. Acad. Sci., Paris* **243**, 560—562 (1956).

In Fortsetzung früherer Arbeiten (dies. Zbl. **64**, 196, **66**, 200) werden Formeln für die Ableitung des über ein Flüssigkeitsvolumen $V(t)$ erstreckten Energieintegrals angegeben, wobei $V(t)$ beliebig ist, so daß also V i. a. weder im Raume fest ist noch mit der Flüssigkeit wegschwimmt. In einer weiteren Arbeit sollen diese Formeln zur Berechnung des Wirkungsgrades von Strahltriebwerken angewendet werden.

C. Heinz.

Charlamov (Kharlamov), P. V.: Integrable cases in the problem of motion of a heavy solid body in a fluid. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **107**, 381—383 (1956) [Russisch].

Das Problem wird unter folgenden Voraussetzungen behandelt: 1. die Flüssigkeit soll ideal und inkompressibel sein; 2. das Gewicht des Körpers und der von ihm verdrängten Flüssigkeit sind gleich; 3. die Impulskraft ist vertikal und von Null verschieden; 4. die Massenmittelpunkte C_1 und C_2 der verdrängten Flüssigkeit und des starren Körpers fallen nicht zusammen. Der Verf. zeigt dann: Für spezielle Werte der durch das System bestimmten Konstanten a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} im Ausdruck

$$2T = \sum_{i,j=1}^3 (a_{ij} P_i P_j + b_{ij} R_i R_j + 2c_{ij} P_i R_j)$$

für die kinetische Energie des Systems, wo R_i, P_i ($i = 1, 2, 3$) die gleiche Bedeutung wie in der früheren Arbeit [Priklad. Mat. Mech. 19, 231—233 (1955)] besitzen, und für spezielle Lagen des Vektors $\vec{C}_1 \vec{C}_2$ in bezug auf das mit dem Körper fest verbundene System von Achsen findet er fünf verschiedene Fälle der Integrierbarkeit der Bewegungsgleichungen des betrachteten Systems. Ähnlich wie in der erwähnten Arbeit besteht immer neben den ersten drei Integralen ein viertes, das die Integrierbarkeit gewährleistet. Dabei umfaßt der in dieser Arbeit unter 2. angeführte Fall den in der früheren Arbeit behandelten Fall.

T. P. Angelitch.

Chow, Tse-Sun: On an initial value problem for flow of a viscous incompressible fluid in an unbounded region. J. rat. Mech. Analysis 5, 263—276 (1956).

Etude de l'interaction entre les composantes relatives à la représentation de Fourier du champ des vitesses d'un fluide visqueux incompressible, illimité, assujéti à vérifier les équations non-linéaires de Navier-Stokes. On cherche à représenter la vitesse \vec{v} et la pression p sous la forme $\vec{v}(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}, t) K(\vec{r} \cdot \vec{x})$, $p(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{r}} \Phi(\vec{r}, t) K(\vec{r} \cdot \vec{x})$, où \vec{x} est le vecteur de position, \vec{r} le vecteur d'onde et $K(\vec{r} \cdot \vec{x}) = \cos(\vec{r} \cdot \vec{x}) + \sin(\vec{r} \cdot \vec{x})$. On trouve alors que, pour satisfaire aux équations du mouvement et à l'équation de continuité, on doit avoir

$$(1) \quad \partial \vec{A}(\vec{r}, t) / \partial t = 2^{-1} \{ \vec{Q}(\vec{r}, t) - (\vec{r}/r^2) \vec{Q}(\vec{r}, t) \cdot \vec{r} \} - \nu r^2 \vec{A}(\vec{r}, t),$$

$$(2) \quad \vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \vec{r} = 0, \quad (3) \quad \Phi(-\vec{r}, t) = -2^{-1} \rho r^{-2} \vec{Q}(\vec{r}, t) \cdot \vec{r}, \quad \text{où } \vec{Q}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{s}} \{ \vec{A}(\vec{r} + \vec{s}, t) + \vec{A}(\vec{r} - \vec{s}, t) + \vec{A}(-\vec{r} + \vec{s}, t) - \vec{A}(-\vec{r} - \vec{s}, t) \} \cdot \vec{s} \vec{A}(-\vec{s}, t), \quad \nu \text{ étant}$$

le coefficient de viscosité cinématique, ρ la densité, $r = |\vec{r}|$. Le problème général que se pose l'A. c'est de trouver $\vec{A}(\vec{r}, t)$ satisfaisant à (1) et (2), pour $0 \leq t \leq T$, avec la valeur initiale $\vec{A}_0(\vec{r})$ pour $t = 0$. En intégrant (1) par rapport à t , on obtient une équation intégrale. Cette équation est résolue par un procédé d'itération si $\vec{A}_0(\vec{r})$ est tel que: $\alpha) \vec{A}_0(\vec{r}) = 0$ pour $\vec{r} \neq \vec{r}_{10}$ et \vec{r}_{01} , $\beta) \vec{A}_0(\vec{r}_{10}) \cdot \vec{r}_{10} = 0$, $\vec{A}_0(\vec{r}_{01}) \cdot \vec{r}_{01} = 0$, $\gamma) \vec{A}_0(\vec{r}_{01})$ est perpendiculaire au plan défini par \vec{r}_{10} et \vec{r}_{01} , le mouvement initial étant ainsi défini par deux ondes périodiques. La convergence du procédé d'itération est assurée pour $t \geq 0$.

C. Iacob.

Avališvili, L. E.: Die instationäre Oseensche Randwertaufgabe. Soobščeniia Akad. Nauk Gruzinskoi SSR 17, 489—494 (1956) [Russisch].

Le travail se rapporte au mouvement non permanent d'un fluide visqueux dans un domaine (intérieur ou extérieur) limité par une surface dont les rayons de courbure sont continus. Le problème généralise les problèmes aux limites de Stokes (permanent et non permanent) et celui d'Oseen, se rapportant au mouvement permanent. Par des transformations habituelles le problème se réduit à celui où la vitesse à l'infini et la vitesse initiale sont 0. En appliquant les transformations de Laplace l'A. donne les expressions pour le potentiel et fait l'analyse des résultats obtenus.

C. Woronetz.

Wadhwa, Y. D.: Slow viscous drag. Bull. Calcutta math. Soc. 48, 45—46 (1956).

By a slight modification of the principle of superposition introduced by Seth, the drag suffered by an infinite cylinder whose cross-section is a lemniscate of Bernoulli, moving slowly through a viscous liquid is found to be $8\pi\mu U$.

Zusammenfassg. des Autors.

Proudman, Ian: The almost-rigid rotation of viscous fluid between concentric spheres. J. Fluid Mechanics 1, 505—516 (1956).

Wenn zwei konzentrische Kugeln mit nahezu der gleichen Winkelgeschwindigkeit um eine gemeinsame Achse rotieren, kann man die Spaltströmung als starre

Rotation mit überlagerter Störung auffassen und demnach die Gleichungen hinsichtlich dieser Störung linearisieren. Dabei ist es die Absicht des Verf., an diesem einfachen mathematischen Modell die Eigenschaften rotierender Systeme bei großen Reynoldsschen Zahlen zu studieren. Es zeigt sich, daß eine die innere Kugel berührende koaxiale Zylinderfläche eine singuläre Fläche für die Geschwindigkeitsgradienten darstellt. Außerhalb dieser Zylinderfläche rotiert die Flüssigkeit wie ein starrer Körper, innerhalb derselben bilden sich dagegen Grenzschichten aus, für die Lösungen entwickelt werden.

W. Wuest.

Bagnald, R. A.: *The flow of cohesionless grains in fluids.* Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 249, 235—297 (1956).

In der vorliegenden Arbeit wird, wohl erstmalig, der Versuch unternommen, die verschiedenen Erscheinungen, die mit der „Sandkornströmung“ verbunden sind, auf gemeinsame Gesetzmäßigkeiten zurückzuführen. Die Strömung fester Körner in einer Flüssigkeit wird durch die Schwerkraft, durch die gegenseitige Reibung der Körner und durch die Reibung am Boden und die Flüssigkeitsreibung sowie durch Trägheitskräfte bestimmt. In einer vorausgegangenen Arbeit des Verf. [Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 225, 49 (1954)] ist das Verhalten elastischer Kugeln im Ringraum zwischen zwei Zylindern untersucht worden, von denen der äußere rotierte. Die Schwerkraft war bei diesen Versuchen dadurch ausgeschaltet, daß Kugeln und Flüssigkeit gleiches spezifisches Gewicht hatten. Über diese Versuche wird im ersten Teil ausführlich berichtet und es werden Beziehungen für die auf die Wand übertragene Schubspannung in Abhängigkeit vom Geschwindigkeitsgefälle, von der Kugelkonzentration und von der Dichte und Zähigkeit abgeleitet. Diese Beziehungen entsprechen den Wandgesetzen turbulenter Flüssigkeitsströmungen. Auch für den Fall unterschiedlicher Dichte, also bei gegebenem Schwerkrafteinfluß, und unter der Voraussetzung, daß der Boden durch ruhende aber erodierbare Körner gebildet wird, kann eine Gleichgewichtsbeziehung hergeleitet werden, durch welche die „Bodenlast“ der über die Flächeneinheit bewegten Körner in Verbindung mit der angewandten Tangentialkraft gebracht wird. Durch eine Stabilitätsbetrachtung können die Bedingungen vorausgesagt werden, unter denen „Rippeln“ in einer ursprünglich ebenen Sandfläche entstehen, wobei eine primäre und sekundäre Rippelbildung zu unterscheiden ist. Die Korngröße, bei der ein „Hüpfen“ der Körner im Flüssigkeits- bzw. Luftstrom einsetzt, wird berechnet und zu Beobachtungen in quantitativer Übereinstimmung gefunden. Im zweiten Teil werden diese Gedankengänge und Beziehungen auf den „Stromfall“ angewandt, d. h. auf die turbulente Flüssigkeitsströmung bei geringer Konzentration der Körner. Es werden ferner auch die Bedingungen untersucht, unter denen ein stationärer Transport bei Körnern verschiedener Größe und Dichte möglich ist. Im dritten Teil werden schließlich solche Fälle behandelt, bei denen keine turbulente Flüssigkeitsströmung vorliegt oder der Boden nicht aus losen Körnern gebildet wird. Bei vernachlässigbarer Trägheit vereinfachen sich die früher aufgestellten Beziehungen und man erhält als Lösung der Differentialgleichung die Kornkonzentration nur in Abhängigkeit vom Bodenabstand und der Reibungskraft. Bei linear nach oben abnehmender Schubkraft erhält man den Fall konstanter Kornkonzentration („Slurry“-Strömung). Abschließend wird noch die Bildung von Sanddünen erörtert.

W. Wuest.

Wu, T. Yao-Tsu: *Small perturbations in the unsteady flow of a compressible, viscous and heat-conducting fluid.* J. Math. Physics 35, 13—27 (1956).

Die Gleichungen der durch äußere Kräfte und Wärmezuführung erzeugten Störbewegung werden linearisiert, wobei die Dissipation in Fortfall kommt. Es wird dann der wichtige Satz bewiesen, daß die linearisierte Strömung eindeutig aufspaltbar ist in eine transversale ($\text{div } \vec{q} = 0$) und longitudinale ($\text{curl } \vec{q} = 0$) Welle, wobei nur die letztere Träger von Wärmeleitung und Kompressibilitätseffekten ist.

Als Beispiel einer longitudinalen Welle wird die eindimensionale instationäre Strömung unter der Annahme, daß die Prandtlzahl der Flüssigkeit $Pr = 3/4$ ist, behandelt, wobei die Lösung mittels Laplace-Transformation gewonnen wird. Für große und kleine Zeiten t werden explizite asymptotische Formeln angegeben.

W. Szablewski.

Garabedian, P. R.: Calculation of axially symmetric cavities and jets. *Pacific J. Math.* **6**, 611—684 (1956).

The exceptionally difficult problem of determining the free surface of axially symmetric irrational flows of an incompressible fluid is attacked in this paper, which is based on more or less recent advances achieved by the author and other investigators in the mathematical theory of cavitation flow. As the author states: „The arguments and proofs presented in this paper will in some cases meet the standards of full mathematical rigor and in others will depend more on heuristic reasoning. ... the mathematicians interested in more precise formulation will easily discern where there are problems still calling for study, while the readers whose main interest is in the physical implications of the investigation should find all the material on a sound theoretical basis and the arguments thoroughly convincing and substantial“. Only the simplest models of axially symmetric flows with a free surface are considered viz. (i) the vena contracta (ii) the infinite cavity behind a circular disk and (iii) the finite Riabouchinsky cavity between two circular disks. In order to derive the numerical results presented here, it was necessary to extend considerably the mathematical theory of cavities and jets. The Stokes stream function ψ of an axially symmetric flow satisfies the equation $\psi_{xx} + \psi_{yy} - y^{-1}\psi_x = 0$. However the free boundary problem for the more general equation $\psi_{xx} + \psi_{yy} - \varepsilon y^{-1}\psi_x = 0$ is considered and the dependence of the solution on the parameter ε is studied. As for $\varepsilon = 0$ the plane problem is obtained, for which a variety of solutions is known explicitly, it is possible to develop ψ for the general case in a perturbation series in powers of ε . The first order term has to satisfy a linear mixed boundary value problem. Considerable stress has also been laid on the problem of finding a scheme of successive approximations to the free boundary which is closely related to the boundary value problem mentioned above. Only a restricted survey of the materials contained in this paper could be given in this short review. *A. van Heemert.*

Bernstein, Barry: On the uniqueness of ideal gas flows with a straight streamline. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **42**, 850—854 (1956).

In Anschluß an Arbeiten von Gilbarg, Munk und Prim behandelt der Verf. die Eindeutigkeit ebener, stationärer, reibungsfreier kompressibler Strömungen, deren Stromlinien-Bild gegeben ist. Es wird gezeigt, daß Übereinstimmung in der lokalen Machzahl für die Gleichheit zweier Strömungen gleicher Stromlinien genügt. Abschließend wird auf den besonderen Fall von Strömungen mit einer geraden Stromlinie eingegangen, wie sie bei der Umströmung symmetrischer Körper auftritt.

K. Oswatitsch.

Smith, A. M. O.: Rapid laminar boundary-layer calculations by piecewise application of similar solutions. *J. aeronaut. Sci.* **3**, 901—912 (1956).

Es wird eine Schnellmethode zur Berechnung der laminaren Grenzschicht für eine vorgegebene Druckverteilung angegeben. Die Druckverteilung wird dazu stückweise durch eine der Druckverteilungen der Form $U \sim (x - x_0)^m$ angenähert, für welche Hartree die Geschwindigkeitsprofile der Grenzschicht als „ähnliche“ Lösungen berechnet hat. An den Endpunkten der Abschnitte dieser Ersatzdruckverteilung wird Stetigkeit der Impulsdicke gefordert. Das Rechenverfahren wird bis zur Aufstellung eines Rechenblattes beschrieben. Die Ergebnisse werden mit den Ergebnissen der Quadraturmethode von Thwaites sowie mit den Messungen für die Potentialströmung $U \sim 1 - x/t$, die Strömung um das Tragflügelprofil NACA0012 und um den Zylinder mit elliptischem Querschnitt in befriedigender

Übereinstimmung gefunden. Für die Berechnung des Ablösungspunktes wird auf eine Beziehung zwischen den Parametern der Geschwindigkeitsprofile von Hartree und v. Kármán-Pohlhausen hingewiesen, die Ref. (dies. Zbl. 27, 24) abgeleitet hatte. *J. Pretsch.*

Geis, Theo: „Ähnliche“ dreidimensionale Grenzschichten. *J. rat. Mech. Analysis* 5, 643—686 (1956).

Unter „ähnlichen“ dreidimensionalen Grenzschichten werden Strömungen verstanden, bei denen die Profile der wandparallelen Geschwindigkeitskomponenten u, v unter sich zur Deckung gebracht werden können, falls diese sowie die Koordinate z senkrecht zur Wand mit geeigneten lokalen Maßstabfaktoren versehen werden. Unter Zugrundelegung eines orthogonalen Netzes krummliniger Koordinaten auf der umströmten Fläche wird für die nach dem Vorbild von F. K. Moore [NACA T. N. Nr. 2279 (1951)] zur Erfüllung der Kontinuität eingeführten zwei Stromfunktionen das Gleichungssystem aufgestellt, das sich hier mittels Variablentransformation auf ein System von zwei nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen dritter Ordnung reduzieren läßt. Es wird dann mittels einer mühevollen Diskussion auf der Grundlage der Randbedingungen der fundamentale Satz bewiesen, daß die Koeffizienten der zu ähnlichen Lösungen gehörigen Differentialgleichungen konstant sein müssen. Die letztere Feststellung ergibt für die die Außenströmung bzw. die Metrik der umströmten Fläche beschreibenden Funktionen U, V bzw. g_1, g_2 sowie für den Maßstabfaktor f der Koordinate z ein System partieller Differentialgleichungen. Dieses System wird für den Sonderfall rechtwinkliger kartesischer Koordinaten und bei beliebigen orthogonalen Koordinaten für den Fall gelöst, daß $(g_1 U)_y - (g_2 V)_x = 0$ (also bei Vorhandensein zweier von Null verschiedener wandparalleler Geschwindigkeitskomponenten der Außenströmung Wirbelfreiheit derselben). Ob weitere Lösungen existieren, ist derzeit nicht bekannt. Es ist hier noch zu bemerken, daß das Auftreten ähnlicher Strömungen im Sinne der gegebenen Definition durchaus von der Wahl des Koordinatensystems abhängig ist. Die erhaltenen Lösungen liefern eine Anzahl physikalisch sinnvoller Strömungen, die zahlreiche schon bekannte Modelle enthalten.

W. Szablewski.

Geis, Theo: Elementarer Existenzbeweis für die Grenzschichtströmung an einer Klasse rotierender Körper. *Z. angew. Math. Mech.* 36, 222—229 (1956).

Die in der voranstehenden Arbeit gewonnenen ähnlichen Strömungen enthalten Strömungen um in ruhender Flüssigkeit rotierende Drehkörper, deren Abstand von der Drehachse gleich einer Potenz der Bogenlänge der Meridiankurve ist. Unter Verallgemeinerung einer von R. Iglisch (dies. Zbl. 50, 196) angewandten Methode wird bewiesen, daß das zugehörige Randwertproblem mindestens eine Lösung besitzt.

W. Szablewski.

Stefaniak, H. St.: Die vollständigen Integrale der Grenzschicht-Differentialgleichungen für den runden und ebenen laminaren Strahl. *Z. angew. Math. Mech.* 36, 310—311 (1956).

In einer vorausgehenden Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 65, 184) sind Lösungen gewonnen worden, die als freie Grenzschichten im Strahl gedeutet werden können. Diese Lösungen können sowohl im rotationssymmetrischen als auch im ebenen Fall von einer Stromfunktion abgeleitet werden, die ihrerseits wieder durch eine Hilfsfunktion dargestellt werden kann. Durch Einsetzen in die Grenzschichtgleichung erhält man eine Differentialgleichung, deren Lösungen durch Zylinderfunktionen darstellbar sind. Eine physikalische Deutung dieser allgemeineren Lösungen für den Strahl wird nicht gegeben.

W. Wuest.

Grohne, Diether: Über die laminare Strömung in einer kreiszylindrischen Dose mit rotierendem Deckel. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl., Math.-phys.-chem. Abt.* 1955, Nr. 12, 263—282 (1956).

Es handelt sich um ein Modell dreidimensionaler Grenzschichten mit Sekundär-

strömung, das technisch für die Reibungsverluste an den Laufrädern von Turbomaschinen von Belang ist. 1. Zunächst wird die Strömung zwischen zwei unendlich ausgedehnten Scheiben, die mit den Winkelgeschwindigkeiten ω und Ω um eine gemeinsame Achse rotieren, untersucht. Hier existiert für große Reynoldssche Zahlen $Re = \Omega H^2/\nu$ (H Abstand der Scheiben) das Grenzschnittmodell von G. K. Batchelor (dies. Zbl. 42, 431), während wir für kleine Reynoldssche Zahlen $Re \leq 20$ die mittels eines Reihenansatzes nach Potenzen von Re gewonnenen Lösungen von K. Stewartson (dies. Zbl. 51, 419) haben. Über eine Iterationsvorschrift, welche die Gleichungen linearisiert, gelingt es dem Verf., die Strömungen bis zur Grenze $Re \leq 100$ zu berechnen. 2. Bezüglich des eigentlichen Themas der Dosenströmungen setzt sich der Verf. das Ziel, für die Grenzfälle kleiner und großer Re -Zahlen die Strömung analytisch zu beschreiben. a) Bei kleinen Re -Zahlen wird ein Reihenansatz nach Potenzen von Re gemacht und die Strömung in erster Näherung berechnet: für die Azimutalgeschwindigkeit w ergibt sich dabei formal nach C. Schmieden [Z. angew. Math. Mech. 8, 460—479 (1928)] eine nach Besselfunktionen fortschreitende Reihe; die Stromfunktion Ψ der Sekundärströmung wird durch Differenzenrechnung ermittelt. b) Bei großen Re -Zahlen mit dünnen Grenzschnitten an den Wänden (es handelt sich hier um ein rein theoretisches Modell) wird zunächst das Problem einer reibungsfreien Kernströmung behandelt. Für die azimutale Bewegung ist hier ein Potentialwirbel $w = B/r$ (r Zylinderkoordinate) anzusetzen; für die Sekundärströmung erhält man hier eine nichttriviale Lösung erst dann, wenn man sich mit dem pauschalen Verschwinden der mechanischen Arbeit der Reibungsspannungen im ganzen Strömungsbereich begnügt. Eine solche Sekundärströmung läßt sich als exakte Lösung der Navier-Stokesschen Gleichungen, die gleichzeitig Lösung des reibungslosen Anteils der Wirbeltransportgleichung ist, gewinnen und durch eine nach Besselfunktionen der Ordnung Eins fortschreitende Reihe darstellen. Für die Reibungsschichten beschränkt sich dann die weitere Untersuchung auf kleine Dosenhöhen $H/r_1 \ll 1$. In die partielle Differentialgleichung für die azimutale Geschwindigkeit wird — zu denken als Anfangsschritt eines iterativen Verfahrens — für die Komponenten der Sekundärströmung die Kernströmung eingesetzt. Auch dann gestaltet sich die Rechnung noch recht schwierig. Mittels einer Reihe verwickelter Rechenoperationen, die bei der Knappheit der Darstellung nicht leicht lesbar sind, werden für die Reibungsschicht um die Topfachse, am rotierenden Deckel und Boden sowie längs des Mantels analytisch jeweils Lösungen konstruiert, die sich durch passende Bestimmung auftretender Integrationskonstanten zusammenschließen lassen. Die Stärke B des Potentialwirbels ergibt sich dann zu $B/\Omega r_1^2 = 0,314$. Das Drehmoment des Deckels sowie eine die Stärke der Sekundärströmung festlegende Konstante A lassen sich durch die als ersten Iterationsschritt aufzufassende Rechnung jedoch noch nicht bestimmen. *W. Szablewski.*

Grohne, D.: Zur laminaren Strömung in einer kreiszylindrischen Dose mit rotierendem Deckel. Z. angew. Math. Mech. Sonderheft 17—20 (1956).

Vortrag über das Thema der obigen Arbeit unter Herausstellung prinzipieller Gesichtspunkte. *W. Szablewski.*

Spence, D. A.: The development of turbulent boundary layers. J. aeronaut. Sci. 23, 3—15 (1956).

Die näherungsweise Berechnung turbulenter Grenzschnitten bei beliebig vorgegebener Druckverteilung ist vermittels der Impulsgleichung möglich. Dabei treten neben der Grenzschnitt-Impulsverlustdicke als unbekannte Größen der örtliche Reibungsbeiwert und das Verhältnis der Verdrängungsdicke zur Impulsverlustdicke auf. Für den Reibungsbeiwert stehen nach den Experimenten von Ludwig und Tillmann (1949) brauchbare Abschätzungsformeln zur Verfügung. Um das Grenzschnitt-dickenverhältnis mit den übrigen Strömungsgrößen in Beziehung zu setzen, sind schon sehr viele Anstrengungen unternommen worden; eine allgemeine befriedigende

Lösung ist aber noch nicht gefunden worden. Bei der Herleitung einer neuen Differentialgleichung für das Grenzsichtdickenverhältnis führt der Verf., wie Gruschwitz (1931), das Verhältnis der Geschwindigkeit im Abstand einer Impulsverlustdicke zu der Geschwindigkeit außerhalb der Grenzschicht als Bezugsgröße ein. Unter der Annahme, daß in diesem Wandabstand das universelle Wandgesetz turbulenter Strömungen gültig ist, folgt aus den Bewegungsgleichungen eine Beziehung, die aber zunächst noch unbekannte Funktionen enthält. Letztere werden empirisch aus Vergleichen mit Versuchsergebnissen ermittelt. Eine einfache Methode zur schrittweisen Integration des Gleichungssystems wird angegeben. Zwei durchgerechnete Beispiele zeigen gute Übereinstimmung mit Messungen. *J. Rotta.*

Domm, Ulrich: Über eine Hypothese, die den Mechanismus der Turbulenz-Entstehung betrifft. Forsch.-Ber. Wirtsch.-Verkehrsminist. Nordrhein-Westfalen Nr. 363, 15 S. (1956) DM 6,45.

Es wird von der Hypothese ausgegangen, daß die Tollmien-Wellen in der instabilen, laminaren Grenzschicht sich durch Konzentrieren der Wirbelstärke in isolierten Gebieten zu einer Reihe diskreter Wirbel in Wandnähe entwickeln. Es werden deshalb einige Eigenschaften der instabilen Bewegung einer einreihigen Wirbelstraße in Wandnähe gegeben. In dem besonders behandelten Fall der 2-Gruppenstörung treten zwei verschiedene Bewegungstypen auf. Entweder ist der Stromabbewegung eine Bewegung überlagert, bei der je ein Wirbel der einen Gruppe um einen der anderen kreist, oder die Wirbel einer Gruppe führen eine fortlaufende Schlüpfbewegung durch die Wirbel der anderen Gruppe aus. Bei Versuchen mit einem achssymmetrischen Freistrahle wurde nur die erstgenannte kreisende Bewegung der Wirbel umeinander festgestellt. Die Ergebnisse werden im Zusammenhang mit Versuchsbeobachtungen im Hinblick auf die Vorgänge bei der Turbulenzentstehung diskutiert. *J. Rotta.*

Marris, A. W.: On fully developed turbulent flow in curved channels. Canadian J. Phys. 34, 1134—1146 (1956).

Im Hinblick auf die Anwendung bei ausgebildeter turbulenter Strömung in gekrümmten Kanälen werden zunächst die älteren Turbulenzhypothesen erörtert, nämlich die v. Kármánsche Ähnlichkeitshypothese, der Mischungswegansatz für Impulstransport und Wirbeltransport. Auf Grund vorliegender Versuchsergebnisse wird die Wirbeltransporttheorie für die Darstellung der Geschwindigkeitsverteilung im gekrümmten Kanal als geeignet angesehen. Nach Einführung entsprechender Funktionen für den Mischungsweg werden die Geschwindigkeitsverteilungen berechnet und durch passende Wahl der auftretenden Konstanten in möglichst gute Übereinstimmung mit Meßergebnissen gebracht. Abweichungen zwischen Rechnung und Meßergebnis treten besonders nahe der inneren (konvexen) Wand auf und sind bei großem Krümmungsradius stärker als bei kleinem. Der Gültigkeitsbereich für die Wirbeltransporttheorie wird danach kleiner, wenn der Krümmungsradius zunimmt. Beim geraden Kanal wird die Geschwindigkeitsverteilung besser durch die Impulstransporttheorie dargestellt. Aus diesen Feststellungen wird die Schlußfolgerung gezogen, daß der Mechanismus der ausgebildeten turbulenten Strömung bei gekrümmtem und geradem Kanal voneinander verschieden ist. *J. Rotta.*

Oswald, Bailey: Applied aerodynamics and flight mechanics. J. aeronaut. Sci. 23, 469—484; Erratum 892, 1123 (1956).

Von dem Verf. wird eingehend gewürdigt, wie die wissenschaftlichen Erkenntnisse, die auf dem Gebiete der Aerodynamik und Flugmechanik von Dr. Theodor von Kármán unmittelbar oder unter seiner Führung gewonnen wurden, sich auf den Entwurf von Flugzeugen ausgewirkt haben. Hierbei werden u. a. folgende Fragen behandelt: Gesamtentwurf der Flugzeuge und günstigster Kompromiß, Einfluß der Oberflächenreibung, Luftwiderstand im Überschallflug, wirtschaftliche Möglichkeiten des Überschallfluges, ballistische Flugkörper und Flug mit hohen Überschallgeschwindigkeiten (hypersonische Geschwindigkeiten). *G. Bock.*

Todeschini, Bartolomeo: Correnti ipersoniche che prolungano una corrente uniforme. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. **90** (III. Ser. **21**), 467—472 (1956).

R. Courant und K. O. Friedrichs hatten auf S. 59 ihres Buches „Supersonic flow and shock waves“ (dies. Zbl. **41**, 113) folgendes Theorem bewiesen: Stört man eine ebene, stationäre, wirbelfreie Überschallströmung eines kompressiblen idealen Gases an irgendeiner Stelle einer geraden Stromlinie und ist auch die gestörte Strömung isentropisch und isenergetisch und daher auch wirbelfrei, so besteht die gestörte Strömung aus ebenen Wellen. Für dieses Theorem wird ein vereinfachter Beweis mit Hilfe der Methode der sukzessiven Approximationen gegeben, ohne wie Courant die Hodographenmethode heranziehen zu müssen. *Th. Sexl.*

Lomax, Harvard and Max. A. Heaslet: Recent developments in the theory of wing-body wave drag. J. aeronaut. Sci. **23**, 1061—1074 (1956).

Es handelt sich um eine sehr willkommene Zusammenfassung der zum Teil schwer zugänglichen neueren Theorien zur Berechnung des Druckwiderstandes an Körpern, welche mit Überschall- und Schallgeschwindigkeit fliegen. Ausgehend vom Linearisierungsgebiet für Überschallströmung und der Arbeit von Hayes wird die Widerstandsformel von R. T. Jones und Ward ohne Ableitung wiedergegeben und an Beispielen diskutiert. Damit werden Überlegungen über den Minimalwiderstand verbunden. Sodann wird der Gültigkeitsbereich der Widerstandsformel ausführlich diskutiert. Schließlich wird zum Grenzfall der Schallanströmung übergegangen mit den Arbeiten von Oswatitsch (dessen Mitarbeiter Keune in Ref. 20 leider ungenannt blieb), Harder und Klunker, Spreiter usw.. Vergleiche mit Versuchen und mit exakteren Theorien vervollständigen die Arbeit. *K. Oswatitsch.*

Grigorjan (Grigoryan), S. S.: On a problem in the theory of wing of finite span. Doklady Akad. Nauk SSSR **110**, 348—350 (1956) [Russisch].

In der Arbeit wird die Berechnung der Auftriebsverteilung an Tragflächen in einer Überschallströmung mit Hilfe der linearisierten Theorie behandelt. Die Tragflächen können hierbei eine beliebige Form des Grundrisses und eine beliebige Verteilung des örtlichen Anstellwinkels besitzen. Diese Aufgabe läßt sich durch ein System von zwei Integralgleichungen beschreiben. Durch eine Transformation gelingt es, diese beiden Gleichungen auf eine Integralgleichung zurückzuführen. Ein Verfahren zur näherungsweisen Lösung dieser Integralgleichung wird angedeutet. *G. Bock.*

Jones, C. W.: Elements of an improved linear perturbation theory of steady supersonic flow with axial symmetry. Proc. Cambridge philos. Soc. **52**, 336—343 (1956).

Bei der linearisierten Behandlung der rotationssymmetrischen Überschallströmung um schlanke Drehkörper werden Glieder zweiten und höheren Grades in den Geschwindigkeitsstörungen bei den Koeffizienten der Potentialgleichung vernachlässigt. In der vorliegenden Arbeit werden diese bisher vernachlässigten Glieder durch konstante Mittelwerte ersetzt, und damit näherungsweise berücksichtigt. Die Charakteristiken sind auch bei dieser Näherung noch gerade und parallel, sie fallen aber nicht mehr mit den Machschen Linien der ungestörten Strömung zusammen. Die neu gewonnenen Formeln geben auch bei weniger schlanken Drehkörpern noch befriedigende Ergebnisse. Dies wird am Berechnungsbeispiel für einen Kegel von 10° halbem Öffnungswinkel bei $Ma = 3,3$ gezeigt. Die Gegenüberstellung der exakten Lösung mit den beiden linearisierten Lösungen läßt die wesentlich größere Genauigkeit der verbesserten linearisierten Näherung gegenüber der einfachen Linearisierung erkennen. *W. Wuest.*

Evans, Cerda and Foster Evans: Shock compression of a perfect gas. J. Fluid Mechanics **1**, 399—408 (1956).

Die Kompression eines idealen Gases durch einen mit konstanter Geschwindigkeit in einen Zylinder hineingeschobenen Kolben wird berechnet. Unter Vernach-

lässigung von Wärmeleitung und Reibung verursacht nur der zwischen Zylinderboden und Kolben hin und her wandernde Verdichtungsstoß ein Abweichen von der Isentrope. Dabei zeigt das Gas stets konstanten Zustand, wenn sich der Stoß gerade an einem Ende des Raumes befindet. Einige Beispiele zeigen den Entropieanstieg, also den Fehler in der Annahme einer quasistatischen Verdichtung. *K. Oswatitsch.*

Evans II, G. W., F. D. Faulkner, B. J. Lockhart and C. L. Perry: *Shock produced by a spherical piston of radius $a(t)$.* J. appl. Phys. **27**, 1345—1351 (1956).

Eine Kugel, die im Ausgangszustand mit einem vollkommenen Gas von gleichförmig hohem Druck gefüllt ist, möge von einem gewissen Zeitpunkt an in eine tropfbare Flüssigkeit (insbesondere Wasser) expandieren. In die Flüssigkeit läuft dann eine kugelige Stoßwelle, in das Gas wandern Verdünnungswellen. Für dieses Problem wird in der vorliegenden Arbeit ein Differenzenverfahren zur numerischen Lösung für den Fall entwickelt, daß der Ausgangsradius unendlich klein ist. Die Stoßfront wird dabei als Diskontinuität nach der Rankine-Hugoniotgleichung behandelt. Hierzu wird das Koordinatensystem so gewählt, daß der Lösungsbereich durch die Trennungsfläche und die Stoßfront begrenzt ist. Die Lösung ist vor allem für den Zeitabschnitt von Interesse, in dem die Radien der Stoßfront und der Trennungsfläche von der gleichen Größenordnung sind, so daß die einfache Punktquellenlösung nicht gültig ist. Die Berechnungen sind sowohl für konstante als auch für abnehmende Radialgeschwindigkeit der Trennungsfläche durchgeführt worden. *W. Wuest.*

Abbott, M. R.: *A theory of the propagation of bores in channels and rivers.* Proc. Cambridge philos. Soc. **52**, 344—362 (1956).

Die Fortpflanzung von Wasserwellen endlicher Amplitude in Kanälen von veränderlichem Querschnitt wird auf der Grundlage der „Flachwasser“-Theorie behandelt, wobei eine stationäre reibungsbehaftete Grundströmung überlagert wird. Ein solches Problem entspricht der Ausbreitung einer Gezeitenwelle im Unterlauf von Flüssen. Verf. entwickelt eine linearisierte Theorie, deren Gültigkeit voraussetzt, daß die Wellenlänge klein im Verhältnis zur Strecke ist, innerhalb der sich Flußtiefe oder -breite wesentlich ändern. Obwohl diese Bedingung bei der Bore (Flutbrandung, d. h. flußaufwärts wandernder Wasserschwall der Flut) an sich nicht erfüllt ist, stimmen die Ergebnisse der Näherung auch für diesen Fall überraschend gut mit den Beobachtungen überein, wahrscheinlich deswegen, weil das aufgesteilte Profil der Bore eine viel kürzere effektive Wellenlänge als die eigentliche Flutwelle hat. Die Theorie liefert eine Bedingung für den Spiegelunterschied der Gezeiten, der für eine bestimmte Geometrie gegebenen Reibungswiderstand eines Flußes eine Bore erzeugt. Die Theorie wird auf den Unterlauf des Severn angewandt und eine gute Übereinstimmung mit den Beobachtungen gefunden. Auch die Ergebnisse für den Sonderfall von Wellen, die sich in stilles Wasser bei einem Kanal veränderlichen Querschnittes fortpflanzen, werden im einzelnen beschrieben. *W. Wuest.*

Kravtchenko, Julien et André Daubert: *Sur les lois approchées de la houle de Gerstner en profondeur finie.* C. r. Acad. Sci., Paris **243**, 2006—2009 (1956).

Für die Gerstnersche Welle, die als einfacher Sonderfall einer nichtwirbelfreien Wellenbewegung aufgefaßt werden kann, werden für den Fall endlicher Wassertiefe Formeln abgeleitet, die bis zu Gliedern vierter Ordnung in der Amplitude exakt sind. *W. Wuest.*

Wärmelehre:

Landsberg, P. T.: *Foundations of thermodynamics.* Reviews modern Phys. **28**, 363—392 (1956).

Verf. gibt eine sorgfältige Formulierung der von Carathéodory begonnenen Geometrisierung der (phänomenologischen) Thermodynamik. Er vermeidet dabei die verbreiteten Ungenauigkeiten in den Definitionen (der Begriffe „quasistatisch“, „rever-

sibel“, „wärmedurchlässig“, „adiabatisch“ usw.). Er scheidet die gegen die ursprüngliche Caratheodorysche Theorie erhobenen Einwände aus, indem er annimmt, daß der thermodynamische Phasenraum E nicht abgeschlossen ist. Außerdem genügen schwächere Annahmen als üblich. Es wird z. B. nur vorausgesetzt, daß es in E eine Punktmenge β gibt, in der zwei Punkte A und B durch einen adiabatischen Prozeß verbunden werden können. Solche Mengen β hängen mit dem ersten Hauptsatz zusammen. Diejenigen (offenen) Teilmengen γ von β , die einen n -dimensionalen Unterraum von E ausfüllen, gehen in die Diskussion des zweiten Hauptsatzes ein. Zur Vermeidung von Mehrdeutigkeiten sind die Eigenschaften von β und γ weiter festzulegen, was zu dem dritten Hauptsatz führt. Bemerkenswert ist besonders das letzte Ergebnis, weil es bisher nicht gelungen war, in die Caratheodorysche Axiomatik auch diesen Hauptsatz einzubauen.

H. Kummel.

Acrivos, Andreas: The transient response of stagewise processes. I. The stability of the steady-state in stagewise processes and their transient behaviour. J. Soc. industr. appl. Math. 4, 1—19 (1956).

Bei der Frage nach dem Endzustand eines stufenweise verlaufenden chemischen Prozesses interessiert vor allem, welche der verschiedenen Endzustände stabil sind. Unter geeigneten vereinfachenden Annahmen über die Eigenschaften des Reaktors, in welchem sich der Vorgang abspielt, gelangt Verf. zu dem folgenden System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$(1) \quad dT/dt = a(T_0 - T) + b R(c, T), \quad dc/dt = a(c_0 - c) - R(c, T),$$

welches den zeitlichen Ablauf des Vorganges beschreibt. Die stationären Zustände dieses Systems sind durch

$$a(T_0 - T_s) + b R(c_s, T_s) = 0, \quad a(c_0 - c_s) - R(c_s, T_s) = 0$$

bestimmt. Ist \bar{T}_s, c_s eine Lösung dieses Gleichungssystems, so entscheidet das Verhalten der Lösungen des Systems (1) in der Umgebung des Punktes \bar{T}_s, c_s über die Stabilität. Indem Verf. das Problem linearisiert, gelangt er zu der Aussage, daß der betreffende stationäre Zustand stabil ist, wenn jede der beiden charakteristischen Zahlen der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -a + b R_T(c_s, T_s), & b R_c(c_s, T_s) \\ -b R_T(c_s, T_s), & -a - R_c(c_s, T_s) \end{pmatrix}$$

einen negativen Realteil besitzt; im anderen Falle ist der stationäre Zustand instabil.

— Dieses Ergebnis wird erweitert auf den Fall, daß der Prozeß sich in einer Apparatur abspielt, die aus mehreren in beliebiger Weise aufeinander einwirkenden Reaktoren besteht.

W. Quade.

• **Hill, Terrel L.:** Statistical mechanics. Principles and selected applications. New York, Toronto, London: McGraw-Hill Book Co., Inc. 1956. XIII, 425 p. \$ 9.00; 67 s. 6 d.

Der Nachdruck des Buches liegt in den „ausgewählten Anwendungen“: Theorie der Kondensation (nach Mayer und Lee-Yang), Verteilungsfunktionen in Flüssigkeiten, Theorie der Ordnungs-Unordnungs-Umwandlungen. Für diese Probleme ist in den letzten Jahren eine ganze Reihe interessanter analytischer Methoden entwickelt worden, über die das Buch eine ausgezeichnete Übersicht gibt. Es sei darauf hingewiesen, daß das Buch die thermodynamische Nomenklatur der amerikanischen Physikochemiker benutzt: Die freie Energie wird mit A bezeichnet, und heißt „work-function“, während die freie Enthalpie mit F bezeichnet wird und „free energy“ heißt.

H. Koppe.

Yamamoto, Tsunenobu and Hirotugu Matsuda: On the grand canonical distribution method of statistical mechanics. Progress theor. Phys. 16, 269—286 (1956).

An attempt is made in this paper to justify the method of the grand canonical

ensemble by an appeal to the central limit theorem of probability theory. To achieve this it is assumed that the particles of the system interact through two-body forces only, and that the inter-particle potential energy rises to infinity below a certain separation between the two particles, and drops to zero above a certain separation. An attempt is then made to show that the microcanonical and the canonical ensemble lead to practically the same results as the grand canonical ensemble, and that the conclusions established hold even if phase changes are proceeding. It is clear that the authors' claims merit a careful examination of their arguments. *P. T. Landsberg.*

Mandelbrot, Benoit: Exhaustivité de l'énergie totale d'un système en équilibre, pour l'estimation de sa température. C. r. Acad. Sci., Paris **243**, 1835—1838 (1956).

Verf. weist darauf hin, daß der von Khinchin (Statistical Mechanics, dies. Zbl. **37**, 411) gegen die Gibbssche Statistik erhobene Einwand (der insbesondere die Komplementarität zwischen Energie und Temperatur betrifft) durch ein von Seilard [Z. Phys. **32**, 753 (1925)] bewiesenes Theorem gegenstandslos wird. Danach ist die Gibbssche Verteilung die einzige, die allein von der Energie des Systems abhängt.

H. Kümmel.

Klimontovič (Klimontovich), Ju. L. (Ju. L.): Concerning the correlation function for quantum systems. Soviet Phys., JETP **3**, 781—783 (1956), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. **30**, 977—979 (1956).

The correlation function for a quantum system of weakly interacting particles is obtained by the method of Bogoliubov [Problems of the Dynamical Theory in Statistical Physics, Moscow 1946] with use of a set of equations for the quantum distribution function (Ju. L. Klimontovich and V. P. Silin, this Zbl. **49**, 287). The quantum distribution function f_3 is approximated by binomial distribution functions excluding the exchange effect. In the classical limit for $\hbar = 0$ and for completely ionized gas the Debye correlation function can be obtained. For a completely degenerate Bose gas the result obtained becomes of the same form as the expression given by Bogoliubov and Zubarev [D. N. Zubarev, Dissertation, Moscow University 1953; N. N. Bogoliubov and D. N. Zubarev, Žurn. éksper. teor. Fiz. **28**, 129 (1955); Soviet Phys., JETP **1**, 83—90 (1955)]. For a completely degenerate Fermi-Dirac gas there appears the Debye radius for degenerate Fermi gas. For completely ionized gas the author utilized the kinetic equation with self-consistent field. The self-consistent potential agrees with the Debye theory except that it is for a different correlation radius.

T. Nishiyama.

Henry, J.: Sur l'énergie libre d'excès des mélanges isotopiques. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **42**, 163—172 (1956).

Man denkt sich verschiedene Isotope eines Stoffes in verschiedenen Konzentrationen bei konstantem Volumen zu einem Gemisch vereinigt. Dabei tritt eine Veränderung der freien Energie auf, gegenüber der freien Energie der idealen Mischung, für die Chester (dies. Zbl. **58**, 212) einen Ausdruck hergeleitet hat, der ganz der quantenmechanischen Störungstheorie entspricht, da die freie Energie nach den relativen Massendifferenzen zwischen den Isotopen und einer Vergleichsmasse entwickelt wird. Da man für die Zustandssumme von der Slaterform auszugehen hat, erscheinen in der Störungsrechnung (das Wechselwirkungspotential zwischen den Isotopen ist dasselbe) Matrixelemente gewisser kinetischer Energieoperatoren. Die Rechnung gilt für den absoluten Nullpunkt. Verf. behandelt hier zwei Beispiele zu dem Chesterschen Formalismus: lineare Kette harmonischer Oszillatoren und undurchdringliche Kugeln längs einer Strecke L (periodisch fortgesetzt gedacht). Die Wellenfunktionen sind für beide Fälle leicht angebbar, so daß die erwähnten Matrixelemente berechnet werden können. Für beide Beispiele zeigt sich, daß der Überschuß der freien Energie gegenüber der idealen Mischung klein ist gegen den entsprechenden Überschuß, der bei Vorgabe konstanten Druckes auftreten würde.

G. U. Schubert.

Brout, R.: Statistical mechanics of irreversible processes. Part VII: Boltzmann equation. *Physica* **22**, 509—524 (1956).

Unter der Voraussetzung binärer (praktisch momentaner) Wechselwirkung unter den Bedingungen des molekularen Chaos wird der Übergang von der Liouvilleschen Gleichung zur Master-Gleichung für die Bewegung des Γ -Raumes vollzogen. Es wird gezeigt, daß man hieraus die Boltzmann-Gleichung für die Bewegungen im μ -Raum nur dann erhalten kann, wenn die Anfangsverteilung im Γ -Raum ein Produkt von Verteilungen im μ -Raum ist.

H. G. Reik.

Elektrodynamik. Optik:

Papadopoulos, V. M.: Scattering by a semi-infinite resistive strip of dominant-mode propagation in an infinite rectangular wave guide. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **52**, 553—563 (1956).

Das hier behandelte Problem befaßt sich mit der Ausbreitung elektro-magnetischer Wellen in einem unendlichen, vollkommen leitenden rechtwinkligen Hohlleiter, welcher einen halb-unendlichen Streifen aus einem Material mit endlichem Widerstand in symmetrischer Anordnung enthält. Es wird die Streuung unter Benützung einer Laplace-Transformation berechnet und es werden Formeln für die Amplitude der Streuwellen abgeleitet. Am Schluß werden numerische Resultate unter Benützung einer Rechenmaschine für verschiedene Werte des Widerstandes des Streifens angegeben.

P. Urban.

Aymerich, Giuseppe: Sui modi liberi di un campo elettromagnetico sostenuto da un guscio elicoidale. *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari* **26**, 105—117 (1956).

L'A. riduce ad un sistema di equazioni integrali, con nucleo dipendente da un parametro, la ricerca dei modi di propagazione lungo un guscio anisotropo. Da questo risultato, dopo qualche considerazione di carattere generale, ricava alcuni teoremi di esistenza per i modi sostenuti da un guscio di sezione circolare.

D. Graffi.

Caprioli, Luigi: Onde e. m. di tipo trasversale nelle guide d'onda rettilinee e con dielettrico eterogeneo. *Boll. Un. mat. Ital.*, III. Ser. **11**, 200—202 (1956).

L'A. perfeziona la sua dimostrazione (questo Zbl. **50**, 417) relativa all'inesistenza di modi TEM in una guida d'onda riempita con dielettrico eterogeneo.

D. Graffi.

Elwert, Gerhard: Zur Beobachtung radialsymmetrischer Radioquellen mit dem Michelson-Interferometer. II. *Z. Naturforsch.* **11a**, 961—969 (1956).

[Teil I, Elwert u. Siedentopf, *ibid.* **11a**, 769—775 (1956).] Unter Beschränkung auf radialsymmetrische Radioquellen der Strahlungstemperatur $T(r)$ wird die Abweichung der mit einem Michelson-Interferometer eines maximalen Antennenabstandes N (in Einheiten der Wellenlänge) gemessenen Temperatur $T^*(r) = T_N(r)$ von der wahren Temperaturverteilung $T(r)$ untersucht und als Funktion von N für folgende Modelle berechnet: Scheibe mit exponentiellem Abfall, Kastenmodell und Gaußmodell. Besondere Beachtung wird schließlich der Berechnung des hellen Ringes der Radiosonne im Dezimetergebiet geschenkt. Es wird versucht, den Ring durch Gaußkurven mit verschiedenen Parametern darzustellen. Die Rechenergebnisse werden mit den bekannten Messungen im Meter- und Dezimetergebiet verglichen.

G. Wallis.

Phariseau, P.: On the diffraction of light by progressive supersonic waves. *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A* **44**, 165—170 (1956).

Bhatia und Noble hatten (dies. Zbl. **51**, 433) gefunden, daß bei schieferm Einfall des Lichtes die Ausdrücke für die Intensität des in die Ordnung -1 gebeugten Lichtes für die beiden Fälle: 1. Einfall unter dem Bragg'schen Winkel, 2. Einfall in der Nachbarschaft jenes Winkels sehr unterschiedliche Werte ergeben. Verf. behandelt die gleiche Frage nach der verallgemeinerten Theorie von Raman und Nath [*Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A*, **3**, 119, 459 (1936)] und untersucht hierbei auch die

Verhältnisse für die $(+1)$ te und die (-2) te Ordnung. Verf. kommt zu den gleichen Formelausdrücken wie Bathia und Noble, allerdings in anderen Bezeichnungen.

J. Picht.

Ying, C. F. and Rohn Truell: Scattering of a plane longitudinal wave by a spherical obstacle in an isotropically elastic solid. *J. appl. Phys.* **27**, 1086—1097 (1956).

The scattering of a plane longitudinal simple harmonic wave by a spherical obstacle embedded in an unbounded isotropically elastic solid medium is examined. Three different types of spherical obstacles are considered, an isotropically elastic sphere, a rigid sphere and a spherical cavity.

F. Oberhettinger.

Gosar, P.: Multiple small angle scattering of waves by an inhomogeneous medium. *Nuovo Cimento, X. Ser.* **4**, 688—702 (1956).

Verf. behandelt die Mehrfachtrennung ebener Lichtwellen durch eine Schicht eines inhomogenen Mediums mit geringen Schwankungen des Brechungsindex. Das Medium wird als nicht absorbierend vorausgesetzt. Beispiele solcher Schichten sind das Christiansen-Filter, chromatische Emulsionen, eine turbulente Atmosphäre usw.

H. Falkenhagen-G. Kelbg.

Toraldo di Francia, Giuliano: Onde elettromagnetiche piane in un mezzo dielettrico non omogeneo, corrispondente a uno spazio di Fermat pseudosferico. *Boll. Un. mat. Ital., III. Ser.* **11**, 515—523 (1956).

L'A. considera un semispazio riempito da un mezzo di costante dielettrica inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal piano limite e, assunto come riferimento un sistema di coordinate cilindriche ρ, θ, z con asse su quel piano, dimostra l'esistenza e studia le proprietà di onde piane TEM che si propagano lungo le linee θ . Dimostra inoltre come in una guida curva di sezione rettangolare (più precisamente limitata da superfici $\theta = \text{cost.}$ e $z = \text{cost.}$) e riempita dal mezzo sopraindicato, possano sussistere modi TE.

D. Graffi.

Iwata, Giiti: Orbits of an electron in static electromagnetic fields. I. *Progress theor. Phys.* **15**, 513—522 (1956).

Bestimmung einer Reihe von zeitlich konstanten elektrisch-magnetischen Feldern, in denen die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung für die Elektronenbewegung durch Separation der Variablen möglich ist. Die angewandte Methode ist dieselbe wie in den gleichzeitig und unabhängig erschienenen Arbeiten von Grümm (dies. Zbl. **70**, 214, 215), die sich allerdings auf ebene und rotationssymmetrische elektrostatische Felder beschränken.

F. Lenz.

Chang, K. K. N.: Stability of periodic-field beam focusing. *J. appl. Phys.* **27**, 1527—1532 (1956).

Verf. gibt eine analytische Lösung für die Bahnfokussierung in periodischen Feldern und ein Stabilitätskriterium, das sowohl die Wirkung der Raumladung wie auch größere Bahnausbuchtungen umfaßt. Die entsprechende Differentialgleichung für die Bahnausbuchtung, d. h. der Abweichung des Bahnradius von seinem über eine große axiale Distanz genommenen Mittelwert, wird sowohl mittels sukzessiver Approximation als auch mittels Entwicklung in eine Fourierreihe behandelt. Die Stabilitätskriterien werden aus der Störungsgleichung der Differentialgleichung für die Bahnen bestimmt. Verf. setzt die Fourierlösung in diese ein und erhält so eine bestimmte Hillsche Differentialgleichung, deren Stabilitätsbereiche von Klotter und Kotowski untersucht worden sind. Die Ergebnisse werden für die drei Grenzfälle eines an der Kathode verschwindenden Magnetfeldes, eines sehr hohen Feldes und eines vom doppelten Brillouinschen Wert mit Hilfe eines Computers numerisch ausgewertet und in Kurven dargestellt.

W. Glaser.

Bernard, Michel-Yves et Jean Hue: Les aberrations géométriques dans les lentilles à focalisation forte. *C. r. Acad. Sci., Paris* **243**, 1852—1854 (1956).

Ausgehend von dem Strahlverlauf $X = X(z)$, $Y = Y(z)$ erster Ordnung in

rotationssymmetrischen elektrischen bzw. magnetischen Feldern wird der Strahlverlauf höherer Ordnung als Störungsproblem behandelt, indem $x = X + \varepsilon$, $y = Y + \eta$ gesetzt wird. Unter Hinweis auf frühere Arbeiten von Bernard [C. r. Acad. Sci., Paris **236**, 185 (1953) sowie Thèse, Paris 1953] werden formelmäßige Darstellungen vierter Ordnung (in x, y) der elektrischen bzw. magnetischen Felder angegeben. Mit ihnen folgen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in ε bzw. η , deren Koeffizienten Funktionen dritten Grades in X, Y, X', Y' sind. Hinweis, daß die axiale Geschwindigkeit \dot{z} nicht mit der Teilchengeschwindigkeit v identifiziert werden darf. Die „Aberrationen“ $\varepsilon_1, \varepsilon'_1, \dots$ in einer Ebene z_1 lassen sich als Funktionen des Startpunktes x_0, y_0 und der Startrichtung x'_0, y'_0 des Elektrons ausdrücken. Aus der vorausgesetzten quadrupolaren Symmetrie der Linsen folgt, daß sich die Zahl der in den Ausdrücken für $\varepsilon, \varepsilon', \eta, \eta'$ auftretenden Koeffizienten bei den Aberrationen dritter Ordnung je auf 10 reduzieren läßt.

J. Picht.

Lenz, Friedrich: Zur Berechnung von rotationssymmetrischen Potentialfeldern in Elektronenlinsen. Ann. der Physik, VI. F. **19**, 82—88 (1956).

Der von Regenschweif vorgeschlagene Lochblendenansatz wird dahin abgeändert, daß das Potential außerhalb der Linse mit dem Potential der Außenelektroden übereinstimmt. Weiter werden die von Ehinger und die von Lenz eingeführten Näherungsansätze für die axiale Potentialverteilung in unsymmetrischen Rohrlinsen mit Messungen an Liebmanns Widerstandsnetz verglichen und gefunden, daß der zweite Ansatz mit den Messungen in besserem Einklang steht.

W. Glaser.

Lenz, Friedrich: Ein mathematisches Modellfeld für eine permanentmagnetische Einzellinse. Z. angew. Phys. **8**, 492—496 (1956).

Die elektronenoptischen Eigenschaften einer permanentmagnetischen Einzellinse mit der Feldverteilung $B(z) = C z [1 + (z/a)^4]^{-1}$ werden berechnet, indem die zugehörige paraxiale Differentialgleichung $y'' + k^2 x^2 y / (1 + x^4)^2 = 0$ durch die Substitution $y = (1 + x^4)^{-1}$ auf die hypergeometrische Differentialgleichung zurückgeführt wird. Die Elektronenbahnen und paraxialen Kenngrößen werden kurvenmäßig dargestellt.

W. Glaser.

Matveev (Matveyev), A. N.: Influence of radiation losses on the betatron oscillations of electrons in an alternating gradient synchrotrone. Doklady Akad. Nauk SSSR **107**, 671—674 (1956) [Russisch]; Übersetzung in Soviet Phys., Doklady **1**, 211—214 (1956).

Der Energieverlust durch Ausstrahlung von Lichtquanten in einen Kreisbeschleuniger vergrößert die Amplitude der Schwingungen um den Sollkreis, er kann daher zum Teilchenverlust führen. In der Arbeit wird das Schicksal eines Teilchens verfolgt, indem bei jeder Ausstrahlung die entsprechende Bahnkorrektur explizit angebracht wird. Durch Aufsummieren über die statistisch verteilten Quantensprünge ergibt sich die mittlere Vergrößerung der Schwingungsamplitude. Überraschenderweise kann der Effekt bei starker Fokussierung um ein bis zwei Zehnerpotenzen kleiner sein als bei schwacher Fokussierung. Der Grund hierfür dürfte sein, daß in der Arbeit die durch die Feldperiodizität bei starker Fokussierung erzwungene Ausstrahlung nicht berücksichtigt ist.

W. Humbach.

Kolomenskij (Kolomensky), A. A.: Effect of quantum fluctuations in electron emission on the motion of the emitted electrons in magnetic periodic systems. Doklady Akad. Nauk SSSR **107**, 398—401 (1956) [Russisch]; Übersetzung in Soviet Phys., Doklady **1**, 192—195 (1956).

In die gewöhnliche Theorie der Betatronschwingungen geht die Abweichung vom Sollkreis linear und homogen ein. In der vorliegenden Theorie wird die Bahn-Differentialgleichung um ein inhomogenes Glied erweitert, welches die Energieverluste durch Quantensprünge der auf Betatronbahnen umlaufenden Teilchen berücksichtigt. Dieser im wesentlichen phänomenologische Ansatz wird für den Fall der starken Fokussierung numerisch ausgewertet.

W. Humbach.

Carini, Giovanni: *Sulle equazioni della magneto-idrodinamica.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **21**, 436—442 (1956).

L'A. dimostra come le equazioni di Alfven per la magneto-idrodinamica non coincidono, in generale, con le equazioni di Minkowski dell'elettrodinamica dei corpi in moto anche introducendovi le ordinarie approssimazioni. Si ha però completa identità fra i due tipi di equazioni nei casi particolari considerati da Alfven e cioè mezzi con conduttività infinita, oppure propagazione per onde piane parallela ad un campo magnetico impresso uniforme e indipendente dal tempo. *D. Graffi.*

Relativitätstheorie:

Komar, Arthur: *Necessity of singularities in the solution of the field equations of general relativity,* Phys. Review, II. Ser. **104**, 544—546 (1956).

The Einstein's equations without the cosmological term are considered, under fairly general assumptions concerning the energy-momentum tensor and the choice of the coordinate system. These assumptions are more general than those connected with the Friedmann's model. Yet also then, the singular instant of creation or annihilation would occur at a finite time in the past or future. *L. Infeld.*

Papapetrou, A.: *Rotverschiebung und Bewegungsgleichungen.* Ann. der Physik, VI. F. **17**, 214—224 (1956).

Le présent travail est consacré à la recherche de méthodes de calcul direct de la déviation relativiste vers le rouge, sans intervention d'hypothèse phénoménologique sur les fréquences des atomes plongés dans un champ de gravitation. Les atomes sont considérés ici comme plongés dans un champ de Schwarzschild pris sous forme isotrope:

$$ds^2 = \gamma(r) dt^2 - \alpha(r) (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

avec $\alpha = (1 + m/2r)^4$, $\gamma = (1 - m/2r)^2 / (1 + m/2r)^2$. Pour un tel atome, l'A. utilise dans une première partie un modèle de Bohr. Supposant α et γ constants dans le domaine envisagé, il montre que les valeurs propres de l'énergie diffèrent des valeurs non gravitationnelles par le facteur $\sqrt{\gamma}$, ce qui conduit immédiatement à la valeur d'Einstein pour la déviation vers le rouge. Dans une seconde partie, il obtient un résultat identique à partir de l'équation de Dirac généralisée relative à l'espace-temps de Schwarzschild. Il adapte à cet effet les calculs d'Infeld et v. d. Waerden (ce Zbl. **7**, 184). On voit que l'introduction du spin se révèle en fait ici indifférente.

A. Lichnerowicz.

Hönl, H. und A.-W. Maue: *Über das Gravitationsfeld rotierender Massen.* Z. Physik. **144**, 152—167 (1956).

Mit Hilfe der linearisierten Einsteinschen Feldgleichungen wird das Gravitationsfeld im Innern einer rotierenden Hohlkugel berechnet. Gegenüber der früheren Behandlung des Problems durch Thirring (1918, 1921) wird der Spannungstensor des rotierenden Massensystems mitberücksichtigt. Die Einsteinschen Potentiale, welche Poissonschen Gleichungen genügen müssen, werden durch Kugelfunktionsansatz bestimmt. Es besteht eine formale Analogie zwischen den in diesem Problem auftretenden Kräften und den Kräften der Elektrodynamik in dem Sinne, daß hier zur Coulomb-Kraft und zur Biot-Savart-Kraft analoge Gravitationskräfte auftreten. Die Lösungen gestatten die Bestimmung des Gravitationsfeldes eines rotierenden Himmelskörpers.

R. Kippenhahn.

Talwar, S. P. and S. S. Abbi: *On the change in shape of a gravitating fluid sphere in a uniform external electric field.* Proc. nat. Inst. Sci. India, Part A **22**, 7—12 (1956).

The problem of a conducting, gravitating (according to the Newtonian theory) incompressible fluid sphere in a uniform external electric field is investigated. The result is: the sphere is unstable under this uniform electric field and tends to become a prolate spheroid, in the direction of the field. Its ellipticity for $(\epsilon/R \rightarrow 0)$ is $\epsilon/R = 5/2 E^2 R^4 / G M^2$, where E is the strength of the electric field, M the Mass, R the radius of the sphere and G the gravitational constant. *L. Infeld.*

Karpman, Gilbert et Varadaraja Venkata Raman: Sur une généralisation possible de la théorie des fluides à spin de Weyssenhoff. C. r. Acad. Sci., Paris **243**, 1284—1287 (1956).

On se libère de l'hypothèse $S_{\alpha\beta} u^\beta = 0$ de Weyssenhoff.

O. Costa de Beauregard.

Halbwachs, Francis: Introduction du vecteur spin dans le fluide de Weyssenhoff. C. r. Acad. Sci., Paris **243**, 1022—1024 (1956).

Introduction et définition du 4-vecteur densité de spin σ^λ en théorie de Weyssenhoff.

O. Costa de Beauregard.

Halbwachs, Francis: Nouvelle représentation du fluide à spin relativiste. C. r. Acad. Sci., Paris **243**, 1098—1100 (1956).

Suite de la Note précédente. Les 4-vecteurs vitesse, accélération, densité de spin, et „impulsion transversale“, définissent dans l'espace-temps un „4-èdre de Frenet“.

O. Costa de Beauregard.

• **Rumer, Ju. B.:** Untersuchungen zur 5-Optik. Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1956. 152 S. R. 3.80 [Russisch].

Zur Grundlage dieser Einzeldarstellung ist ein fünfdimensionaler Raum mit Riemannscher Metrik — eine Welt von Raum, Zeit und Wirkung — gestellt. Auf diesen Gedanken soll der Verf. auf Grund von einer weitgehenden Symmetrie der Gleichungen der Relativitätstheorie in dieser Welt gekommen sein. Denn es zeigt sich, daß parallel mit der Einsteinschen dreidimensionalen Formulierung dieser Gleichungen, mit derjenigen vierdimensionalen von Minkowski, auch eine solche fünfdimensionale möglich ist. Die Aufgabe der sog. klassischen relativistischen Mechanik über die Bewegung eines geladenen Teilchens in gegebenen Gravitations- und elektromagnetischen Feldern zeigt sich als äquivalent der geometrischen Aufgabe der Ausbreitung von Lichtstrahlen in der erwähnten fünfdimensionalen Welt. Daher nennt der Verf. diese Theorie eine Fünferoptik. Es handelt sich also im Grunde um eine einheitliche Feldtheorie, die sich von den anderen hauptsächlich dadurch unterscheidet, daß sie sich auf den Quantenbegriff stützt. Der Verf. selbst (im Vorwort) möchte nicht, daß seine Fünferoptik als eine neue Variante der einheitlichen Feldtheorie betrachtet wird, aber das ändert an der Sache nichts. Im I. Kapitel (30 Seiten) — Optisch-mechanische Analogien — wird die schon erwähnte weitgehende Symmetrie der Gleichung der klassischen relativistischen Mechanik in Raum-Zeit-Wirkung gezeigt und auf die Zweckmäßigkeit der Einführung gerade der Wirkung als fünfter Koordinate hingewiesen. Ausgehend von der Einstein-Bergmanschen Verallgemeinerung von Kaluzas Theorie (dies. Zbl. **19**, 287) verzichtet der Verf. auf die Forderung der Zylindrizität der Metrik dieser Welt in bezug auf diese fünfte Koordinate und ersetzt sie durch die Forderung der topologischen Abgeschlossenheit in bezug auf die fünfte Dimension. Im II. Kapitel (9. Seiten) — Geometrische Fünferoptik — wird die klassische relativistische Mechanik als Geometrische Optik entwickelt. Im III. Kapitel (22 Seiten) — Klassische Feldtheorie — wird die einheitliche (makroskopische) Feldtheorie der Gravitation und der Elektrizität entwickelt unter der Voraussetzung, daß die periodische Abhängigkeit der Komponenten des metrischen Fünfertensors von der fünften Koordinate, derjenigen der Wirkung, vernachlässigt werden darf. Im IV. Kapitel (47 Seiten) — Wellenfünferoptik im Fünferraum von Minkowski — und im VI. Kapitel (17 Seiten) — Wellenfünferoptik im Riemannschen Raum — wird dann die Quantenmechanik entwickelt als eine Wellenoptik in der fünfdimensionalen Welt, welche topologisch abgeschlossen und mit einer Periode gleich der Planckschen Konstante h in bezug auf die Wirkungskordinate ist. Im Kapitel V (20 Seiten) — Tensoranalysis und Lamésche Maßbestimmung — wird ein zum Zwecke der kovarianten Formulierung der Feldgleichungen im Riemannschen Raum dienender angepaßter mathematischer Apparat entwickelt. — Diese Einzeldarstellung, die als eine Veröffentli-

chung der westsibirischen Zweigstelle der sowjet. Akad. der Wiss. erschienen ist, enthält interessantes Material und ist aus einer Reihe von Arbeiten des Verf., die im *Žurn. eksper. teor. fiz.* seit 1949 veröffentlicht sind, entstanden. Besonders hervorzuheben ist die Tendenz, die Quantisierungserscheinungen mit einzubeziehen.

T. P. Angelitch.

Bonnor, W. B.: The formation of the nebulae. *Z. Astrophys.* **39**, 143–159 (1956).

Es wird das Wachstum von Kondensationen in einem druckfreien kosmologischen Modell der allgemeinen Relativitätstheorie ohne Λ -Glied untersucht, um die Entstehung der Spiralnebel aus Störungen des Weltsubstrats zu erklären. Nimmt man an, daß die Kondensationen von Dichtefluktuationen herrühren, wie sie aus der statistischen Mechanik folgen, so läßt sich die Entstehung der Spiralnebel nicht erklären. Nur wenn man Modelle mit einer größeren Zeitskala zugrunde legt oder einen anderen Mechanismus zur Entstehung der Kondensationen postuliert, erhält man Ergebnisse, die mit der Beobachtung vergleichbar sind. *R. Kippenhahn.*

Quantentheorie:

Vachaspati: Quantum mechanics in generalized Hilbert space. *Danske Vid. Selsk., mat.-fys. Medd.* **30**, Nr. 21, 28 p. (1956).

La généralisation consiste en l'introduction d'une courbure riemannienne. Sous la forme ici proposée, la théorie ne donne pas de résultats nouveaux par rapport à la théorie classique. Suggestions pour des altérations plus radicales.

O. Costa de Beauregard.

Costa de Beauregard, O.: Covariance relativiste à la base de la mécanique quantique. II. *J. Phys. Radium* **17**, 872–875 (1956).

L'A. complète les résultats d'un article précédent (ce *Zbl.* **66**, 223) dans lequel il proposait un formalisme quantique général entièrement covariant relativiste utilisant des intégrales triples curvilignes dans l'espace-temps dans le cas de la particule libre et des intégrales quadruples dans le cas de la particule plongée dans un champ extérieur. L'introduction d'un projecteur projetant toute solution de l'équation de Gordon suivant une solution de l'équation de la particule libre à spin permet de condenser les formules établies précédemment. On précise la relation entre deux définitions possibles de l'orthogonalité des solutions utilisant respectivement des intégrales triples et quadruples.

G. Petiau.

Širokov (Shirokov), Ju. M. (Yu. M.): On the conditions for the relativistic invariance of the quantum theory. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **111**, 1223–1226 (1956) [Russisch].

The aim of the paper is the investigation of the commutator relations, which are the consistency relations for the representations of the group of general coordinate transformations in relativistic quantum theories. They are interpreted in terms of a quantum description of the coordinate system, so that e.g. the measurement of momentum in a restricted volume is only possible with an undetermined coordinate system. From the authors point of view the task of surmounting the present difficulties in field theory, consists in the correct formulation of the old relativity and quantum ideas.

H. J. Groenewold.

Corinaldesi, E. and S. Zienau: On an inequality for the momentum derivative of the scattering phase. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **52**, 599–600 (1956).

E. P. Wigner (dies. *Zbl.* **64**, 218) hat für die Ableitung der bei Streuproblemen auftretenden Phasenänderungen η als Funktionen der Wellenzahlen k der einfallenden Teilchen ($d\eta/dk$) eine Ungleichung angegeben, die diese Phasenänderungen für den Fall verschwindender Drehimpulsquantenzahl durch die Wellenfunktionen und die in ihnen auftretenden Parameter beschränkten. Verf. gaben für diese Ungleichung

eine vereinfachte, durchsichtige Herleitung und erweitern ihre Gültigkeit für den Fall nichtverschwindender Drehimpulsquantenzahlen.

Th. Sexl.

Rollnik, Horst: Streumaxima und gebundene Zustände. Z. Phys. **145**, 639—653 (1956).

Für den Fall der Potentialstreuung wird ein Eigenwertproblem angegeben, durch das die Energiewerte der Streumaxima (Pole von $Q = i(S-1)/(S+1)$) bestimmt werden können. Unter gewissen Voraussetzungen über das Potential wird gezeigt, daß es nur eine endliche Zahl solcher Eigenwerte E_σ gibt (im Gegensatz zu den unendlich vielen Polen der Wignerschen R -Funktion, die für kleine Energien ungefähr mit den obigen E_k übereinstimmen).

R. Haag.

Rollnik, Horst: Zur Theorie der zerfallenden Zustände. Z. Phys. **145**, 654—661 (1956).

Es wird bewiesen, daß für eine weite Klasse von Potentialen die S -Matrix unendlich viele Pole in der komplexen k -Ebene hat. Eine endliche Anzahl unter ihnen entspricht den gebundenen Zuständen, eine andere endliche Teilmenge kann mit den im vorstehenden Referat erwähnten Streumaxima in Zusammenhang gebracht werden.

R. Haag.

Penfield, R. H. and H. Zatzkis: Invariance requirements and conservation laws. Acta phys. Austr. **10**, 261—266 (1956).

Die Erhaltungssätze der Feldtheorien lassen sich auf Grund der Forderung der Invarianz gegen die verschiedenen Transformationsgruppen der Theorie unabhängig davon ableiten, ob die Feldgleichungen erfüllt sind oder nicht. (Das ist ja eben der Noethersche Satz, der in dieser Arbeit nicht zitiert wird). Das bedeutet aber, daß aus der Invarianzforderung des Lagrangeschen Formalismus die eindeutige Lösung der Euler-Lagrangeschen bzw. der Hamiltonschen Gleichungen noch nicht folgt. Diese Schwierigkeit wird im Falle des elektromagnetischen Feldes, dessen Gleichungen gegenüber Eichtransformation invariant sind, eingehend besprochen.

J. I. Horváth.

Maki, Ziro: On the use of Feynman amplitudes in the quantum field theory. Progress theor. Phys. **15**, 237—254 (1956).

Eine Art von Feynman-Amplituden wird studiert, bei der Vakuumamplituden verschwinden. Ihr asymptotisches Verhalten ist im Gegensatz zu anderen üblichen Feynman-Amplituden immer eindeutig. Die Methode wird zur Illustration auf den anharmonischen Oszillator angewendet.

K. Baumann.

Yamazaki, K.: On the field theory in functional form. Nuovo Cimento, X. Ser. **4**, 141—144 (1956).

Die Lösungen der Quantenfeldtheorie lassen sich bekanntlich als Funktionalintegrale schreiben, wobei für Bosonenfelder über c -Zahl-Funktionen, für Fermionenfelder über antikommutierende Funktionssymbole integriert werden muß. Bei den gebräuchlichen Kopplungen läßt sich die letztere Integration stets sofort ausführen. Der Autor zeigt, daß dieses Zwischenergebnis mittels eines von ihm früher (dies. Zbl. **47**, 448) entwickelten Formalismus auch aus dem kanonischen Formalismus direkt gewonnen werden kann, und diskutiert die Beziehungen des Ergebnisses zu verwandten Formulierungen.

K. Symanzik.

Tobocman, W.: Transition amplitudes as sums over histories. Nuovo Cimento, X. Ser. **3**, 1213—1229 (1956).

Die Übergangsamplituden der Quantenmechanik lassen sich, dem kanonischen Formalismus zufolge, als Grenzwerte von Summen unendlicher Produkte darstellen. Feynman [Reviews modern Phys. **20**, 367 (1948)] hat diese Grenzwerte als Pfadintegrale („path integrals“) bezeichnet und ein Prinzip angegeben, wonach sich beliebige Bosonenübergangsamplituden als derartige Pfadintegrale darstellen lassen. Der Verf. weist nach, daß bei Fermionenausbreitungsproblemen der erwähnte Grenzübergang, nach Einführung geeigneter Matrixdarstellungen für antikommu-

tierende Größen, auf ein anderes Resultat führt, als eine einfache Verallgemeinerung des Feynmanschen Prinzips nahelegen würde. *K. Symanzik.*

Candlin, D. J.: On sums over trajectories for systems with Fermi statistics. Nuovo Cimento, X. Ser. 4, 231—239 (1956).

Verf. diskutiert mit Methoden, die denjenigen von Toboeman (s. vorst. Ref.) verwandt sind, an einfachsten Beispielen (Fermi- und Diracoszillator) die Darstellung von Übergangsamplituden durch Summen über unendliche Produkte und findet die üblichen Regeln [z. B. Matthews und Salam, Nuovo Cimento, X. Ser. 2, 120—134 (1955)] zur Auswertung der betreffenden „Pfadintegrale“ gerechtfertigt.

K. Symanzik.

Kastler, Daniel: Algèbre multilinéaire et quantification du champ de Dirac. C. r. Acad. Sci., Paris 242, 2805—2808 (1956).

Durchführung der in der folgenden Arbeit skizzierten Methode für das Dirac-Feld (antisymmetrische Tensor Konstruktion, Grassmann-Algebra). *R. Haag.*

Kastler, Daniel: Sur la représentation usuelle des règles de commutation en théorie quantique des champs. C. r. Acad. Sci., Paris 242, 1132—1134 (1956).

Die Charakterisierung des Zustandsraums einer wechselwirkungsfreien Quantenfeldtheorie läßt sich in folgender Weise durchführen: Man geht aus von dem Hilbert-Raum \mathfrak{H}_1 der Ein-Teilchen-Zustände, betrachtet den Raum \mathfrak{H}_n der Tensoren n -ter Stufe über \mathfrak{H}_1 und bildet die direkte Summe $T = \sum \mathfrak{H}_n$ dieser Tensorräume. Für ein Bosonfeld ist der total symmetrische, für ein Fermionfeld der total antisymmetrische Teilraum von T der gesuchte Zustandsraum. Im Raum T sind, neben der Addition, noch die Rechenoperationen der äußeren (tensoriellen) Multiplikation und der Kontraktion erklärt. Sie erlauben eine verallgemeinerte und koordinatenfreie Definition der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren. *R. Haag.*

Kastler, Daniel: Algèbre multilinéaire et quantification du champ des photons. C. r. Acad. Sci., Paris 242, 2445—2448 (1956).

Durchführung der in vorstehend referierter Arbeit skizzierten Methode für ein Lichtquantenfeld (Symmetr. Tensor Konstruktion). Nimmt man als Ausgangspunkt (Zustände eines einzelnen Photons) alle Lösungen mit positiver Energie der Gleichung $\square A_\mu(x) = 0$, so erhält man die indefinite Metrik von Gupta und Bleuler. Schränkt man die Lösungsmannigfaltigkeit durch die Lorentz-Konvention $\partial A_\mu(x)/\partial x_\mu = 0$ ein, so erhält man einen Raum mit positiv definiter Metrik, der den physikalischen Zuständen eines Systems von Photonen entspricht. *R. Haag.*

Murota, Toshiyuki and Akira Ueda: On the foundation and the applicability of Williams-Weizsäcker method. Progress theor. Phys. 16, 497—506 (1956).

Verf. zeigt, daß man das durch klassische Ableitung erhaltene Ergebnis von Williams und Weizsäcker über das Energiespektrum des virtuellen Photonenfeldes, das mit einem geladenen Teilchen hoher Energie verbunden ist, auch nach der Feynman-Dyson-Methode bekommen kann und daß sich die Äquivalenz beider Methoden in allgemeiner Weise ergibt, wenn die vom einfallenden geladenen Teilchen übertragene Energie klein ist. Qualitativ wird gezeigt, daß der Wirkungsquerschnitt nach Williams-Weizsäcker eine korrekte Größenordnung ergibt. *E. Schmutzer.*

Minardi, E.: Sulla teoria bilocale dell'elettrone. Nuovo Cimento, X. Ser. 4, 1127—1132 (1956).

It is shown that in the bilocal theory the rest mass of electron is practically of purely electromagnetic origin. In order to compute the self mass it is necessary to start with an arbitrarily small but not zero mass. *R. Rayski.*

Królikowski, W. and J. Rzewuski: One-time formulation of the relativistic two-body problem. Separation of angular variables. Nuovo Cimento, X. Ser. 4, 975—990 (1956).

In der ersten Arbeit dieser Reihe (dies. Zbl. 66, 227) wurde eine kovariante einzeitige Gestaltung des Mehrteilchenproblems der Quantentheorie der Wellenfelder

durch die Transformation der üblichen Integrodifferentialgleichung der mehrzeitigen Theorie in eine der Schrödingerschen ähnliche Gleichung abgeleitet. In dieser Arbeit wird die Separation der Winkelvariablen in relativistisch invarianter Weise im Falle des Zwei-Fermionenproblems der Quantenelektrodynamik durchgeführt, eine Ein-Quantumwechselwirkung vorausgesetzt. Es wird ein System von 16 Integralgleichungen für eine Variable abgeleitet. Dieses System läßt sich im Falle $j = 0$ auf vier, im Falle $j \neq 0$ auf acht Gleichungen reduzieren.

J. I. Horváth.

Gomez, R. and D. Walecka: Separation of the cross section for scattering of photons by protons into spin-flip and non-spin-flip parts. *Phys. Review*, II. Ser. **104**, 1479—1481 (1956).

Les AA. reprennent le calcul de J. L. Powell [*Phys. Review*, II. Ser. **75**, 32 (1949)] de la section efficace de diffusion Compton par une particule de Dirac avec un moment magnétique anomal un séparant dans celle-ci les parties correspondant au retournement et au nonretournement du spin.

G. Petiau.

Sokolov, A. A. and B. K. Kerimov: On the scattering of spinless particles with consideration of damping. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **108**, 611—614 (1956) [Russisch]; Übersetzung in *Soviet Phys., Doklady* **1**, 345—349 (1957).

The radiation damping theory (A. Sokolov, *J. Phys. USSR* **5**, 231 (1941); W. Heitler, *Proc. Cambridge philos. Soc.* **37**, 291 (1941); A. H. Wilson, this Zbl. **50**, 457) previously applied by the authors for the investigation of the scattering of Dirac particles (this Zbl. **65**, 213) is here extended to the treatment of the scattering of relativistic spinless particles on a fixed, spherically-symmetric center with short-range forces. The total cross-section for a Yukawa potential is given and the asymptotic behaviour is investigated for the domain where damping may be neglected, and where it is important.

M. E. Mayer.

Logunov, A. A.: Concerning a certain generalization of a renormalization group. *Soviet Phys., JETP* **3**, 766—768 (1956), Übersetz. von *Žurn. éksper. teor. Fiz.* **30**, 793—795 (1956).

Verallgemeinerung gibt eine der Verf. der sogenannten „Renormierungsgruppe“ von Peterman und Stückelberg [*Helvet. phys. Acta* **26**, 499—520 (1953)] und von Bogoljubov und Širkov (dies. Zbl. **64**, 449; **65**, 220) an, wobei auch der longitudinale Teil des elektromagnetischen Feldes mit einem endlichen Faktor multipliziert wird. Die Rechnungen wie auch das Ergebnis sind im wesentlichen dieselben wie die von Bogoljubov und Širkov.

G. Källén.

Konuma, M. and H. Umezawa: High energy behaviour of renormalizable fields. *II. Nuovo Cimento*, X. Ser. **4**, 1461—1472 (1956).

Im Anschluß an I (dies. Zbl. **71**, 230) untersuchen die Verff. das asymptotische Verhalten von Mehrteilchen-Ausbreitungsfunktionen für Bosonen, unter Zuhilfenahme der sog. Renormierungsgruppe [Stückelberg u. Peterman, *Helvet. phys. Acta* **26**, 499—520 (1953); H. Umezawa u. A. Visconti, dies. Zbl. **65**, 217; N. N. Bogoljubov u. D. V. Širkov, dies. Zbl. **70**, 444 (2)] und der Resultate von J. C. Taylor [*Proc. Roy. Soc. London*, Ser. A **234**, 296—300 (1956)] für Einteilchen-Ausbreitungsfunktionen in der symmetrischen *PSPS*-Theorie. Die Lösung der Funktionalgleichungen für den Fall, daß eines der Skalarprodukte der Impulse groß wird, führt auf asymptotische Formen für die Ausbreitungsfunktionen, die den Faktor $(1 - (5/4\pi)g_A^2 \ln(pq/m^2))^s$ enthalten, wo s von der Anzahl der äußeren Fermionen- und Bosonenlinien abhängt, deren Gültigkeit aber von den Verff. selbst angezweifelt wird. Ferner wird das asymptotische Verhalten der Funktion für Meson-Meson-Streuung betrachtet, wobei sich die Resultate denen von Dyatlov und Ter-Martirosyan [*Žurn. éksper. teor. fiz.* **30**, 416 (1956)] annähern. Es wird auch versucht, allgemeinere Funktionalgleichungen aufzustellen, bei welchen nicht nur ein Skalarprodukt unendlich wird. Die so erhaltenen einfachen asymptotischen

Formen weisen alle dasselbe Verhalten auf, was z. B. bei einer genaueren Untersuchung der Vertexfunktion [vgl. V. Z. Blank, D. V. Shirkov, Nuclear Phys. 2, 356–370 (1956)] nicht zutrifft. *M. E. Mayer.*

Green, H. S.: Renormalization with pseudo-vector coupling. Nuclear Phys. 1, 360–362 (1956).

Der Verf. zeigt, daß die Funktionaldifferentialgleichung für die Nukleonfortpflanzungsfunktion bei quantisiertem Mesonfeld mit (der gewöhnlich als nicht-renormierbar bezeichneten) Pseudovektorkopplung sich durch Massen- und Kopplungskonstantenrenormierung in eine Form bringen läßt, bei der ein vom Verf. (dies. Zbl. 59, 232) angegebenes Näherungsverfahren, das geschlossene Fermionlinien vernachlässigt, anwendbar wird. Auch eine spezielle Näherungsintegralgleichung für den Scheiteloperator stellt sich als renormierbar heraus und wird mit der entsprechenden Integralgleichung für pseudoskalare Kopplung identisch.

K. Symanzik.

Gejlikman (Geilikman), B. T.: The theory of strong coupling for meson fields. I. Soviet Phys., JETP 2, 509–519 (1956), Übersetz. von Žurn. eksper. teor. Fiz. 29, 417–429 (1955).

Verf. untersucht die Wechselwirkung zwischen pseudoskalaren Mesonen und unendlich schweren, ausgedehnten Nukleonen, unter Vernachlässigung des Nukleonenvakuums, in der Näherung der starken Kopplung (Entwicklung nach reziproken Potenzen der Kopplungskonstante). Dabei kommen vom Verf. früher angegebene Methoden zur Behandlung von Molekülschwingungen zur Anwendung (vgl. dies. Zbl. 52, 226, 230 und nachstehendes Referat). Die Gültigkeit des Verfahrens wird eingehend diskutiert.

M. E. Mayer.

Gejlikman (Geilikman), B. T.: The strong coupling theory of meson fields. II. Soviet Phys., JETP 2, 601–607 (1956), Übersetz. von Žurn. eksper. teor. Fiz. 29, 430–438 (1955).

Die in Teil I (s. vorangehendes Referat) abgeleiteten Gleichungen werden in nullter und erster Näherung gelöst und die Wechselwirkung zweier Nukleonen, die Streuung von Mesonen und die gebundenen Zustände von Mesonen behandelt. Dabei ergibt sich, daß die magnetischen Momente von Neutron und Proton sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Die anderen Resultate weichen erheblich von den älteren Resultaten der Theorie der starken Kopplung ab (W. Pauli, Meson theory of nuclear forces, dies. Zbl. 60, 456) was Verf. z. T. der Unzulässigkeit der Ersetzung von Spin und Isospin durch klassische Vektoren zuschreibt, z. T. aber auf Fehler in den ursprünglichen Arbeiten zurückzuführen sei.

M. E. Mayer.

Gejlikman (Geilikman), B. T.: Theory of strong coupling for meson fields. III. Soviet Phys., JETP 2, 451–461 (1956), Übersetz. von Žurn. eksper. teor. Fiz. 29, 572–584 (1955).

Die Theorie aus I und II (s. vorangehende Referate) wird auf sich bewegende Nukleonen endlicher Masse ausgedehnt. Es wird auch versucht, die Effekte des Nukleonenvakuums in Betracht zu ziehen, wobei Verf. zu punktförmigen Nukleonen übergeht.

M. E. Mayer.

Ross, Marc: Pion effects on Fermi interactions. Phys. Review. II. Ser. 104, 1736–1741 (1956).

Verf. untersucht zwei Modelle der Fermi-Wechselwirkung, in welchen vorausgesetzt wird, daß die Fermi-Wechselwirkungen „nackter“ Nukleonen (d. h. in Abwesenheit der π -Mesonen) einfach sind, und daß die Rolle der Mesonen sich darauf beschränkt, daß diese einen Teil der Ladung und des Spins des Nukleons tragen. In einem der Modelle wird die Masse des Nukleons als unendlich angenommen, und die Resultate auf eine „universelle“ Fermi-Wechselwirkung angewendet. Das zweite Modell setzt endliche Nukleonenmasse voraus. Das Problem des Zerfalls eines π -Mesons, als Fermi-Wechselwirkung eines virtuellen Nukleonenpaares, wird auch

behandelt. Verf. unterstreicht, daß eine experimentelle Prüfung seiner Hypothese schwierig wäre und daß diese zu keiner bedeutenden Vereinfachung des Bildes führt.

M. E. Mayer.

Treiman, S. B. and R. G. Sachs: Neutron-electron interaction in cutoff theory. Phys. Review, II. Ser. **103**, 435—439 (1956).

Die störungstheoretische Behandlung der Elektron-Neutron-Wechselwirkung nach der Chewschen Theorie ergab in 2. Näherung einen viel zu hohen Wert (Salzman, dies. Zbl. **67**, 221). Verff. finden, daß die höheren Näherungen diesen Wert nur wenig vermindern, so daß die Diskrepanz bestehen bleibt.

G. Höhler.

Chew, G. F. and F. E. Low: Effective-range approach to the low-energy *p*-wave pion-nucleon interaction. Phys. Review, II. Ser. **101**, 1570—1579 (1956).

Aus einigen Operatoridentitäten des allgemeinen Streuformalismus lassen sich Relationen zwischen Matrixelementen des Stromes außerhalb der Energieschale herleiten. Bei Beschränkung auf das „statische Modell“, bei dem Mesonen mit einer räumlich festen, doch wie ein Nukleon Spin und Ladung besitzenden Quelle in linearer Wechselwirkung stehen, werden diese Matrixelemente solchen auf der Energieschale proportional, so daß Beziehungen zwischen (renormierten) *S*-Matrixelementen allein resultieren. Bei pseudoskalaren Mesonen gibt dieses Modell nur Streuung in *P*-Zuständen, und für das *S*-Matrixelement elastischer Mesonstreuung ergibt sich analytische Fortsetzbarkeit in die von $-\infty$ bis $-\mu$ und $+\mu$ bis $+\infty$ aufgeschnittene Energieebene (μ ist die Mesonmasse) mit Pol im Ursprung, wobei Sprung und Beziehung zwischen den beiden Schnitten durch Unitarität und „crossing symmetry“ bestimmt sind. Diese Ergebnisse implizieren Theoreme über den Grenzfall verschwindender Energie und geben Streulängen und Relationen zwischen den effektiven Reichweiten bei den verschiedenen Einmeson-Streuzuständen. Insbesondere ergibt sich die effektive Reichweite im 3,3-Zustand als stets positiv und deutet so auf die experimentell beobachtete Resonanz in diesem Zustand hin. Eine (inzwischen von G. Salzman, Report in the Sixth Annual Rochester Conference, 1956, bereits numerisch behandelte) nichtlineare Näherungsintegralgleichung für die Meson-Nukleon-Streuung wird angegeben und schließlich der Brauchbarkeitsbereich des zugrunde gelegten Modells diskutiert. Die Arbeit ist sehr klar geschrieben und stellt auf dem Gebiet der Mesonphysik bei niedrigen Energien einen wesentlichen Fortschritt dar, der durch die jüngere Erkenntnis, daß die Ergebnisse der Arbeit von dem benutzten statischen Modell weitgehend unabhängig sind, noch unterstrichen wird.

K. Symanzik.

Chew, G. F. and F. E. Low: Theory of photomeson production at low energies. Phys. Review, II. Ser. **101**, 1579—1587 (1956).

Die Photomesonproduktion im statischen Modell wird unter Benutzung der von den Verff. für die Meson-Nukleon-Streuung (s. vorst. Ref.) entwickelten Methoden behandelt. Die Photomesonamplitude läßt sich in mehrere Teile zerlegen, die sich teils durch die anomalen magnetischen Momente und Formfaktoren der Nukleonstruktur, teils durch lineare Integralgleichungen bestimmen, wobei die Mesonstreu-matrixelemente als Integralkerne eingehen. Die Verff. diskutieren eingehend die Größenverhältnisse der verschiedenen Beiträge und finden die (sehr einfachen) größten Terme heraus, die auch als von den Einzelheiten des statischen Modells unabhängig erwartet werden. (Spätere Untersuchungen der Verff. haben dies bestätigt.) Diese Terme stimmen mit den Experimenten bei niedrigen Energien befriedigend überein.

K. Symanzik.

Miyazawa, H.: Anomalous magnetic moment of the nucleon and the pion-nucleon scattering. Phys. Review, II. Ser. **101**, 1564—1569 (1956).

Das anomale magnetische Moment des Nukleons wird im statischen Modell (das heißt Pseudovektorkopplung mit ausgedehnter Quelle, ohne Nukleonenrückstoß und -Paarerzeugung) berechnet. Zur Auswertung der benötigten Matrixelemente

von Mesonfeldoperatoren werden die von Chew und Low (s. vorletztes Ref.) entwickelten Methoden verwendet, wodurch sich alle Größen durch Integrale über Meson-Nukleon-Streuquerschnitte und die bereits aus der Meson-Nukleon-Streuung bekannte renormierte Kopplungskonstante (G. F. Chew und F. Low, l. c.) ausdrücken lassen. Für die Streuquerschnitte setzt der Verf. experimentelle Werte ein, welche zum Teil mit dem Modell nicht völlig konsistent sind [vgl. S. Fubini und W. E. Thirring, Phys. Review. II. Ser. **105**, 1382 (1957)]. Die Differenz der anomalen magnetischen Momente von Proton und Neutron kommt befriedigend, die Summe jedoch wesentlich zu groß heraus. Dies zeigt das Versagen des statischen Modells bei vorwiegend von der Art der Quelle bestimmten Phänomenen, was nicht überrascht, da hier die nichtrelativistische Behandlung nicht auszureichen braucht.

K. Symanzik.

Sachs, R. G.: Interpretation of the phase shifts in pion-nucleon scattering. Phys. Review, II. Ser. **102**, 867—870 (1956).

Verf. gibt eine Ableitung des Wignerschen Kriteriums für die Ableitung der Streuphase nach der Energie. Diese Ableitung ist für den Fall der π -Nukleon-Streuung anwendbar. Die Voraussetzungen des Arguments sind dem Ref. allerdings nicht klar.

R. Haag.

Block, M. M.: Phase-space integrals for multiparticle systems. Phys. Review, II. Ser. **101**, 796—799 (1956).

The author works out explicit expressions of the statistical weight factors for 2-, 3-, 4-, and 5-body final states. The total volume in momentum space per unit energy, the differential momentum spectrum for one particle, and the distribution in the Q -value between any two particles of the system are given. Some curves are shown for 1- and 2-pion production by nucleon-nucleon collisions at 0.8, 1.5 and 2.7 Bev. These results will be useful in the analysis of the Bev phenomena, though it is rather doubtful whether the Fermi theory of multiple production can directly lead to agreement with experiments.

Z. Koba.

Belen'kij (Belen'kii), S. Z. and G. A. Milechin (Milekhin): Multiple production of particles in the collisions of high energy nucleons with nuclei. Soviet. Phys., JETP **2**, 14—22 (1956), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. **29**, 20—32 (1955).

The Landau theory of multiple particle production is extended to the case of nucleon-nucleus collisions, and the total number, N , of particles, which result when the system flies apart into individual particles, is worked out as a function of the incident energy and the atomic number of the struck nucleus, A . First, the dependence of N on the entropy of the system of nucleons and pions, which is determined by the initial stage of the collision, is examined. Taking into account the conservation of the nuclear charge (nucleon minus antinucleon) the authors show that the relation $N = \text{const. } S$ (S : total entropy) holds except when the produced particles are relatively few. Second, the change of entropy immediately after the collision takes place is investigated by a hydrodynamical treatment. (This is meant, of course, for orientation, though the validity of this method is not clear.) When the tube of the nuclear matter, with which the incident nucleon collides, is longer than 3.7 times the nucleon diameter, it is necessary to make a detailed calculation due to the asymmetry of the collision. The final result, averaged over all the values of the impact parameter, is expressed approximately by $S/S_0 = A^{0.19}$ [S_0 is the entropy change in the case of nucleon-nucleon (this has been erroneously translated in the English edition) collision.] More detailed expressions are given in the text.

Z. Koba.

Magalinskij (Magalinskii), V. B. and Ja. (Ja.) P. Terleckij (Terletzkii): The statistics of charge-conserving systems and its application to the theory of multiple production. Soviet Phys., JETP **2**, 143—147 (1956), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. **29**, 151—157 (1955).

The quantum statistics of systems with a variable number of particles is so generalized as to take into account the conservation of charge or nuclear charge. Formulas for the total number of particles and total energy are derived, which reduce asymptotically to the ordinary ones when the temperature is sufficiently high, but which differ considerably from the latter when the temperature is relatively low. Two applications are given to modify the results of the Fermi theory for high energy nuclear collisions, concerning i) the number of nucleon-antinucleon pairs as a function of incident energy and the number of initial nucleons involved, and ii) the number of secondary charged mesons.

Z. Koba.

Enatsu, E.: Relativistic quantum mechanics and mass-quantization. Nuovo Cimento, Suppl., X. Ser. 3, 526—586 (1956).

Es wird versucht, die Zusätze zur Energie eines Teilchens, die durch Wechselwirkung mit Teilchen in virtuellen Zuständen entstehen, in die Form eines „negativen Selbstpotentials“ zu bringen, in dem sich Masseneigenwerte als diskrete Zustände ausbilden können. Verf. behandelt dazu ein pseudoskalaras Meson in pseudoskalarer und pseudovektorieller Kopplung mit Nukleonen nach dem Eigenzeit-Formalismus von Feynman (dies. Zbl. 40, 280) und Schwinger (dies. Zbl. 43, 422). Neuartig ist die Verlagerung der Divergenzschwierigkeit von einem „äußeren“ in einen „inneren“ Raum. Verf. geht dazu aus von einem Zweikörperproblem mit den Massen $m_1 = m_2 = m/2$ und ihren Koordinaten x'_μ und x''_μ ($\mu = 1 \cdots 4$). Dafür wird eine Schrödinger-Gleichung

$$(1) \quad -i \partial \Psi / \partial \tau = (2 \partial^2 / \partial x_\mu'^2 + 2 \partial^2 / \partial x_\mu''^2 + V(y)) \Psi$$

angenommen, wobei y den vierdimensionalen Abstand und τ die Eigenzeit des Schwerpunktes bedeuten. Die Willkür bei seiner Einführung in der Relativitätstheorie und andere Unsicherheiten werden diskutiert. Es ist wesentlich, daß der Vektor $y_\mu = x'_\mu - x''_\mu$ raumartig ist, so daß $y^2 > 0$. Man führt nun neben den Relativkoordinaten y_μ die Schwerpunktskoordinaten $x_\mu = 1/2 (x'_\mu + x''_\mu)$ ein und gewinnt damit die Gleichung (2) $-i \partial \Psi / \partial \tau = (\partial^2 / \partial x_\mu^2 + 4 \partial^2 / \partial y_\mu^2 + V(y)) \Psi$, die sich in die Gleichungen

(3) $-i \partial \Phi(x, \tau) / \partial \tau = \partial^2 \Phi(x, \tau) / \partial x_\mu^2$ und (4) $-i \partial \Psi(y, \tau) / \partial \tau = (4 \partial^2 / \partial y_\mu^2 + V(y)) \psi(y, \tau)$ separieren läßt. Hierin wird der Übergang zum Einteilchenproblem vollzogen, indem man (3) als Klein-Gordon-Gleichung in den „äußeren“ Koordinaten x_μ und (4) als eine Eigenwertgleichung in den „inneren“ Koordinaten y_μ auffaßt. Das Potential $V(y)$ wird dadurch konstruiert, daß man in dem Ausdruck für die Zusatzmasse, der als divergentes Integral nach der Eigenzeit erscheint, die divergenzerzeugende untere Grenze Null durch eine endliche ersetzt, die dann als y aufgefaßt wird. Man erhält damit Ausdrücke von der Art eines Yukawa-Potentials, die zu diskreten Eigenwerten Anlaß geben. Verf. verwendet viel Mühe auf ihre Aufsuchung, obwohl damit mehr die Methode diskutiert werden soll, als daß schon ein Zusammenhang mit den wirklichen Partikelmassen erwartet würde.

W. H. Wessel.

Kernphysik:

Žarkov (Zharkov), G. F.: Nucleon-nucleon scattering according to the theory of damping. Soviet Phys., JETP 2, 55—58 (1956), Übersetz. von Žurn. eksper. teor. Fiz. 29, 85—88 (1955).

Die Wirkungsquerschnitte für die Nukleon-Nukleon-Streuung bei hohen Energien werden nach der quantenelektrodynamischen Theorie der Dämpfung, welche starke Kopplungskonstanten in Betracht zu ziehen erlaubt, berechnet. Die Wechselwirkung der Nukleonen soll durch ein pseudoskalaras Mesonenfeld mit einer pseudoskalaren Kopplungskonstanten g und einer pseudovektoriellen Kopplungskonstanten g' hervorgerufen werden. Der isotope Spin T ist entweder Null oder Eins. Die expliziten Formeln für die Wirkungsquerschnitte sind zu kompliziert, um hier

wiedergegeben werden zu können. Ihre graphische Darstellung als Funktion der Energie zeigt, daß keine plausible Wahl der Kopplungskonstanten g, g' zu einer Übereinstimmung mit dem Experiment führt. Die quantenelektrodynamische Theorie der Dämpfung ergibt also schlechtere Resultate als die Störungstheorie, die zumindest die totalen Wirkungsquerschnitte σ_{pp} und σ_{pn} annähernd richtig wiedergeben konnte, wenngleich auch sie bei der Wiedergabe der Winkelabhängigkeit versagte.

Th. Seel.

Gourdin, M.: Diffusion nucléon-nucléon en présence de forces non centrales. I. Diffusion neutron -proton. J. Phys. Radium **17**, 988—996 (1956).

Beschreibt man die Streuung von Neutronen an Protonen durch ein Potential, das neben Zentralkräften $J(r)$ noch Tensorkräfte $S_{12} K(r)$ enthält, so ist für Triplettzustände der differentielle Wirkungsquerschnitt gegeben durch

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{3} \sum_m \left| \sum_{JL} \frac{S_{JL}^m}{2^i} \vec{Y}_{JL1}^m(\Omega) \right|^2.$$

Dabei bedeutet J die Quantenzahl des gesamten Drehimpulses, $S = 1$ diejenige des Gesamtspins und L die des Bahndrehimpulses ($\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$); $J_z = m$. Die Koeffizienten S_{JL}^m ($L = J - 1, J, J + 1$) bestimmen sich aus den Phasenänderungen der drei Teilzustände. Die \vec{Y}_{JL1}^m sind die vektoriellen Kugelflächenfunktionen (definiert z. B. bei Blatt-Weißkopf, Theoretical Nuclear Physics, New York 1952). Es wird gezeigt, daß der rechts stehende Ausdruck in eine Reihe nach zugeordneten Kugelfunktionen P_L^m entwickelt werden kann und daß die dabei auftretenden Formeln in eine für die numerische Rechnung geeignete Form gebracht werden können. Insbesondere wird der Fall $L = 3$ behandelt, was physikalisch bedeutet, daß S, P, D und F Phasenänderungen in Betracht gezogen werden.

Th. Seel.

Skyrme, T. H. R.: The nuclear surface. Philos. Mag., VIII. Ser. 1, 1043—1054 (1956).

In Anlehnung an die Brücknersche Theorie des Atomkerns versucht der Verf. eine quantitative Beschreibung der Teilchendichte und des Potentials an der Kernoberfläche. Statt jedoch die (vorläufig aussichtslose) Berechnung der Reaktionsmatrix für einen endlichen Kern zu versuchen, macht er hierfür einen naheliegenden phänomenologischen Ansatz, der die Impulsabhängigkeit bis zur zweiten Ordnung berücksichtigt. Dabei wird angenommen, daß die Abhängigkeit der Volumenenergie von der lokalen Dichte für den endlichen Kern dieselbe ist wie für den unendlichen. Für die letztere wird eine einfache Form angenommen, in der nur die Kompressibilität und die Gleichgewichtsdichte ϱ_0 als freie Parameter eingehen, die der Erfahrung angepaßt werden müssen. Außerdem ist eine von einem Parameter B abhängige Oberflächenenergie vorhanden. Wird weiterhin der aus der Thomas-Fermi-Näherung folgende Zusammenhang zwischen kinetischer Energie und Dichte angenommen, so kommt man auf die Energie

$$H = \varrho E_0 [(1 - \varrho/\varrho_0)^2 - 1] + \frac{1}{2} B (\text{grad } \varrho)^2.$$

Das Variationsprinzip $\delta H = 0$ gibt eine Differentialgleichung für die Dichte ϱ , aus der man ϱ und damit auch das Potential V eines Nukleons bestimmen kann. Die Werte von ϱ und V sowie deren Abhängigkeiten von Ort und der Massenzahl A kommen vernünftig heraus.

H. Kümmel.

Medina, F. M. und G. Süßmann: Das optische Kernmodell. Fortschr. Phys. **4**, 297—356 (1956).

This review article is based on the lecture given at the meeting at Oberwolfach in April, 1956, and consists of nine sections plus a short appendix for the derivation of the cross section in wave mechanics. The text is written so comprehensively as to be compared to Chapter VIII of Blatt and Weisskopf's book. The way of presen-

tation is also much the same as the spirit having appeared in a series of works by Weisskopf and his collaborators. Section 1 is begun with the fail of the pre-war optical model, and is closed by the success of the compound nucleus theory. Sections 2 and 3 are devoted to the discussions of the compound nucleus theory following Weisskopf. Then comes in 4 the gross structure of the scattering cross section, and the re-discovery of the optical model is described in connection with the success of the shell model. The use of the complex potential is discussed in 5, and its version in geometrical optics is briefly mentioned in 6. In 7 the relation to the compound nucleus formalism is made by the average procedure over energy. Specific discussions on neutron widths near zero energy are given in 8. In the last section the physical basis of the complex potential is discussed, together with a suitable choice of the parameters in comparison with various experiments.

S. Hayakawa.

Sawicki, J.: Neutron polarization in (p, n) Reactions and nuclear optical model. Phys. Review, II. Ser. **104**, 1441—1445 (1956).

Die (p, n) -Reaktion wird in Impulsnäherung behandelt, d. h. das Proton tritt in direkte Wechselwirkung mit einem Oberflächenneutron. Das Kernfeld wird nur vor und nach dieser Wechselwirkung in der Bindung des Protons bzw. des Neutrons berücksichtigt. Für die Proton-Neutron-Wechselwirkung wird das sehr vereinfachende Nullbereichpotential zugrunde gelegt. Das Kernpotential ist komplex und enthält einen Spin-Bahn-Term, der auch für ankommende s -Protonen eine Neutronpolarisation ergibt. Dieser spezielle Fall wird für $\text{Si}^{29}(p, n)\text{P}^{29}$ angenommen und führt zu stark negativer Neutronpolarisation. In vereinfachender Weise wird schließlich noch die Streuung der eintreffenden Proton- und ausgehenden Neutronwelle durch den Kern berücksichtigt.

O. Hittmair.

• **Andrew, E. R.: Nuclear magnetic resonance.** (Cambridge Monographs on Physics.) London: Cambridge University Press 1956. XI, 265 p. \$ 6.50; 40/—net.

Die Erforschung der magnetischen Kernresonanzen hat in den letzten Jahren einen beachtlichen Aufschwung erlebt und gewinnt auch für die Nachbarwissenschaften immer mehr an Bedeutung. Nachdem nun theoretisch und experimentell die Grundlagen gesichert sind, gibt das vorliegende Buch eine erste zusammenfassende Übersicht über das gesamte Gebiet. Die ersten Kapitel führen in die allgemeine Theorie und in die experimentelle Technik ein. Es folgt die Messung verschiedener Kerneigenschaften, wie des magnetischen Kernmoments einschließlich der Bestimmung seines Vorzeichens, des Kernspins und des elektrischen Quadrupolmoments. Als Beispiel für die vielfältigen sonstigen Verwendungsmöglichkeiten der Kernresonanzmessungen sei die Messung und Stabilisierung von Magnetfeldern genannt. Die zweite Hälfte des Buches ist den Besonderheiten der magnetischen Kernresonanzen in Gasen, Flüssigkeiten und Festkörpern nebst Anwendungen gewidmet. Die Darstellung, in der die einschlägige Literatur etwa bis Mitte 1954 berücksichtigt wird, ist klar, sauber gegliedert und gut faßbar.

K. H. Höcker.

Fejnberg (Feinberg), E. L.: The interaction of fast deuterons with nuclei. Soviet Phys., JETP **2**, 58—62 (1956), Übersetz. von Žurn. eksper. teor. Fiz. **29**, 115—120 (1955).

Bei der Analyse der Wechselwirkung zwischen Kernen und schnellen, nicht-relativistischen Deuteronen der Energie von 30—300 MeV werden folgende vier möglichen Wechselwirkungsprozesse in Betracht gezogen: 1. der Einfang des Deuterons; Größenordnung des Wirkungsquerschnittes: $\pi(R + R_D)^2$; 2. der Einfang des in dem Deuteron enthaltenen Neutrons oder Protons („stripping“); Wirkungsquerschnitt $\sim \pi/2 R R_D$; 3. die Dissoziation des Deuterons in ein freies Proton und Neutron unter der Einwirkung des elektrischen Feldes des Kernes mit einem Wirkungsquerschnitt von derselben Größenordnung wie bei 2.; 4. die Streuung des Deuterons mit einem Wirkungsquerschnitt von derselben Größenordnung wie bei 1. Neben diesen Prozessen ist jedoch noch eine fünfte Wechselwirkung möglich.

Dieser Prozeß besteht darin, daß die Impulsübertragung bei der Streuung des Deuterons genügend groß ist, um das Deuteron außerhalb des streuenden Kernes in seine Bestandteile zu zerspalten. Es wird plausibel gemacht, daß die Größenordnung des Wirkungsquerschnittes dieses Prozesses die gleiche ist wie bei den Prozessen 2. und 3.

Th. Seel.

● Gueben, Georges: *Phénomènes radioactifs et introduction à la physique nucléaire*. 2^e éd. Liège: Éditions Desoer; Paris; Dunod 1956. 312 p.

Unter Verwendung vorwiegend der Vorkriegsliteratur werden die Methoden zur Beobachtung der verschiedenen, beim radioaktiven Zerfall auftretenden Strahlungsarten behandelt. Einige Kapitel beinhalten die Chemie der radioaktiven Elemente und der Transurane, die Theorie des radioaktiven Zerfalls sowie eine Übersicht über die Strahlungswirkung und die Verwendung radioaktiver Isotope. Von einer kurzen Übersicht über die älteren Teilchenbeschleuniger wird dann ein weiter Bogen gespannt über die Kettenreaktionen in Kernreaktoren und die kosmische Strahlung bis zu einigen Bemerkungen zur Struktur von Atomkernen und ihren Bausteinen.

G. Wallis.

Lifšic (Lifshitz), I. M.: *On temperature outbursts in a medium subject to the action of nuclear emission*. Doklady Akad. Nauk SSSR **109**, 1109—1111 (1956) [Russisch].

Die bei Kernprozessen frei werdenden Energiebeträge können in gewissem Sinne als lokale, sehr intensive Temperatúrausbrüche aufgefaßt werden. Es erhebt sich die Frage nach der Wahrscheinlichkeit einer vorgegebenen Temperaturerhöhung an einem beliebigen Punkte des Stoffes. Hierzu wird die folgende mathematische Aufgabe gelöst: In einem begrenzten Körper entstehen während der Bestrahlungszeit zufällige, momentane Wärmequellen in den Punkten r_i, t . Diese Quellen sind mit gleicher Wahrscheinlichkeit $n_0 dV dt$ über alle Elemente $dV dt$ des 4-dimensionalen Volumens verteilt. Die Temperatur $T = T(r, t)$ wird aus der Wärmeleitungsgleichung bestimmt. Die mittlere Temperatur $\bar{T} = \bar{T}(r)$ für den stationären Zustand ergibt sich aus einer Gleichung, die man aus der Wärmeleitungsgleichung bei Mittelung über die Quellenverteilung und bei Bildung des Grenzübergangs $t \rightarrow \infty$ erhält. Gesucht und berechnet wird die Wahrscheinlichkeit $P(\theta)$ dafür, daß an einem gegebenen Punkte eine Temperaturdifferenz $T - \bar{T} = \theta$ auftritt.

W. Oldekop.

Goertzel, Gerald: *Minimum critical mass and flat flux*. J. Nuclear Energy **2**, 193—201 (1956).

Eines der grundlegenden Probleme der Reaktortheorie, einen Reaktor mit minimaler Menge an Spaltmaterial zu konstruieren, wird einmal ohne, das andere Mal mit Einschränkungen hinsichtlich der Größe der aktiven Zone des Reaktors gelöst. Die Verteilungen der Dichte des Spaltmaterials im Reaktorkern und die des thermischen Flusses werden berechnet. Anschließend werden Lösungen für Mehrgruppenkerne angegeben. Als numerisches Beispiel wird die minimale kritische Masse von U^{235} in gewöhnlichem Wasser angegeben.

G. Wallis.

Emendörfer, D., K.-H. Höcker und M. Ritzi: *Die kritische Größe eines homogenen Reaktors nach der Viergruppen-Diffusionstheorie*. Z. Naturforsch. **11a**, 731—735 (1956).

Die Verf. nehmen mit der folgenden Gruppeneinteilung 1. schnelle Gruppe, 2. mittelschnelle Gruppe $10^2 \leq E \leq 10^5$ eV. 3. Resonanzgruppe $0,17 \leq E \leq 10^2$ eV. 4. thermische Gruppe $E < 0,17$ eV eine diffusionstheoretische Berechnung des kritischen Volumens eines homogenen kugelförmigen Leichtwasserreaktors mit Reflektor vor und nehmen hierbei an, daß angereichertes Uran als Brennstoff verwendet wird. Drei Umstände sind in der Rechnung beachtenswert: 1. die Berücksichtigung der Energieabhängigkeit des ξ , 2. die Abschätzung der Anzahl der Neutronen, die eine

Gruppe überspringen, 3. die Berücksichtigung der transporttheoretischen Quellkorrektur. Aus den Randbedingungen ergibt sich nach bekannter Rechenmethode die kritische Gleichung aus dem Verschwinden einer zunächst acht-, dann vierreihigen Koeffizientendeterminante. Als numerisches Beispiel wurde der LOPO verwendet, wobei ein Vergleich von Vier- und Zweigruppentheorie zeigt, daß letztere einen um 1 cm größeren Radius ergibt.

F. Cap.

Rozental' (Rosental), I. L.: Relativistische Transformationen und Erhaltungssätze für Energie und Impuls. Anwendung auf einige Probleme der Physik der kosmischen Strahlung. Fortschr. Phys. **4**, 357—382 (1956). Ungekürzte Übersetzung aus Uspechi fiz. Nauk **54**, 405ff. (1954).

This review article was written, when the investigation of V particles was one of the central problems in cosmic ray physics, and the relativistic transformation was employed to know the masses of V particles and their decay schemes. Therefore, the description is specifically intended to the application to decay processes, although the result is general enough to be applicable to a wider field. The procedures deriving various formulas are just sufficient, avoiding unnecessary complication. General formulas are always reduced to simplified practical ones, and a number of pictures help readers to get intuitive understanding. Separate sections are provided, in order to discuss the two- and three-body decays. The article is not concerned with the statistical analysis of V phenomena, such as the α -value used by the Manchester group and Thompson's ellipse.

S. Hayakawa.

Pál, L.: On the theory of stochastic processes in cosmic radiation. Soviet Phys., JETP **3**, 233—237 (1956), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. **30**, 362—366 (1956).

We study a generalization of the kinetic equation of L. Janossy for the case where the physical quantity $\xi(t)$ does not remain constant between two consecutive jumps, but changes in accordance with some causal law. The equation that is introduced can be successfully applied to various problems concerning stochastic processes in cosmic radiation. Autoreferat.

Bass, L.: On the stochastic equation for the energy loss of fast electrons in matter. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **44**, 423—427 (1956).

Author gives the solution of the stochastic equation:

$$(1) \quad \frac{\partial \pi(E; t)}{\partial t} = -\pi(E; t) \int_0^E R(E'|E) dE' + \int_E^{E_0} \pi(E'; t) R(E|E') dE'$$

where $R(E'|E)$ is the energy loss function of $E - E'$, the energy loss of an electron having the energy E while traversing a unit thickness of the absorber [we observe, that $R(E'|E)$ can be different from zero only when $E_0 \geq E \geq E' \geq 0$, since the particle does not gain energy on its passage through matter. E_0 is the upper bound of the electron energy] and $\pi(E; t)$ is the density function of the electron energy, when the electron reaches the depth t in the absorber. This equation is well-known from a paper of Ramakrishnan und Matthews, who in solving this equation have employed restrictions on the initial energy distribution and on the function $R(E'|E)$. The author gives the solution under the following general conditions: I. The function $\pi(E; 0)$, that is the density function of the electron energy at the absorber boundary $t = 0$, is an arbitrary continuous density function. II. The function $R(E'|E)$ is continuous in the domain $E_0 \geq E \geq E' \geq 0$. (1) is solved by reducing this equation to a Volterra equation of the second kind which may be solved by an expansion of the Liouville-Neumann type. The solution is practically exact at very high energies, from the order of 10 m.e.v. upwards. *J. Magyaródi.*

Budini, P. and L. Taffara: On the energy loss and specific ionization of a relativistic particle in a polarizable medium. I. Nuovo Cimento, X. Ser. **4**, 23—45 (1956).

The energy loss of a fast charged particle is treated by the method developed by Fermi for a polarizable medium. The mathematical method in this article is close to the previous one by Budini (this Zbl. **50**, 440), but the extension is made in such a way that not only the dispersive but also absorptive parts of the dielectric constant

are taken into account. Contributions to the energy loss from various processes are separated; they come from excitation, Čerenkov radiation and primary ionization. In the last process, in addition to electron knock-ons by close collisions, the absorptive part plays a significant role. The authors claim that comparison with experiments can better be made for the number of ions produced rather than the energy loss. The former is expressed for a given maximum transferable energy and a given minimum energy of emitted electrons. Depending upon these quantities, the number of ions produced per unit length shows a logarithmic increase at relativistic energy, followed by the saturation due to the polarizability. Comparison with experiments is left for the second part of this work. S. Hayakawa.

Überall, H.: High-energy interference effect of bremsstrahlung and pair production in crystals. Phys. Review, II. Ser. **103**, 1055—1067 (1956).

Es wurden bei der Verwendung von monokristallinen targets zu Bremsstrahl- und Paarerzeugungsversuchen Interferenzphänomene beobachtet, welche das Gammastrahlspektrum, wie auch die Verteilung der Energie bei der Paarerzeugung merklich verändern. Bei gewissen Winkeln ergibt sich eine Erhöhung der Strahlung und Paarbildung. Der Effekt nimmt mit der Energie zu und setzt bei einem gewissen Winkel ein, der mit dem minimalen Impulstransfer auf die target-Atome in Beziehung steht. Die Temperaturbewegung des Gitters reduziert den Effekt einigermaßen. Der Verf. führt eine quantitative Analyse des Problems durch, wobei er sich der Bornschen Näherung bedient. P. Urban.

Bau der Materie:

Holsien, Erling: Further remarks on atomic component orbitals for the configurations $(1s)^2 (2s)$ and $(1s)^2 (2s)^2$. Arch. Math. Naturvid. **53**, 81—94 (1956).

Es werden die Hartree-Funktionen und ihre entsprechenden analytischen Approximationen mittels eines Integrals über ihre quadratische Differenz verglichen, wobei die Integrationsgrenzen, im radialen Anteil, variabel gehalten werden. Als Beispiele wurden die Konfigurationen $(1s)^2 (2s)$ und $(1s)^2 (2s)^2$ des Lithium und Beryllium verwendet, und die Zahlenwerte des Integrals in Tabellen wiedergegeben. Auf den Zusammenhang zwischen Energiefehler und Funktionsänderung wird eingegangen. H. Preuß.

Hurley, A. C.: On the method of atoms in molecules. II. An interatomic correlation correction. Proc. phys. Soc., Sect. A **69**, 49—56 (1956).

(Teil I, dies. Zbl. **64**, 233.) Im Rahmen der „Methode der Atome in Molekülen“ wird eine günstigere Rechnung vorgeschlagen, die von einer besseren Bestimmung der genäherten asymptotischen Energiematrix ausgeht. In dieser werden die Diagonalelemente zum Minimum gemacht. Es zeigt sich, am Beispiel des H_2 -Moleküls, daß sich die Energien für die Atomabstände 1 bis 4 at. E. auf etwa 0,05 eV genau gegenüber den experimentellen Werten ergeben, wenn als Näherungsfunktionen die von J. O. Hirschfelder und I. W. Linnet [J. chem. phys. **18**, 130 (1950)] verwendet werden. Als Bindungsenergie und Gleichgewichtsabstand erhält man 4,72 eV und 1,40 at. E. Die empirischen Daten sind 4,74 eV und 1,40 at. E. H. Preuß.

Ishiguro, Eiichi, Tadashi Arai and Michiko Sakamoto: Tables useful for the calculation of the molecular integrals IX. Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. **6**, 204—214 (1956).

In diesen Tabellen ist eine Reihe von Ein- und Zweielektronenintegralen für zwei Zentren tabelliert, wenn die verwendeten Atomfunktionen die Abschirmzahlen γ_1 für die K -Schale und γ_2 für die M -Schale besitzen. Die Tabellierungsparameter sind $\alpha = \gamma_1 R$, $\beta = \gamma_2 R$, wobei R den Atomabstand bedeutet. Die Werte für α und β sind

$$\alpha = 12,00 \ 13,25 \ 14,00 \ 17,75; \quad \beta = 3,00 \ 3,25 \ 3,50 \ 5,25.$$

H. Preuß.

Beljaev (Beliaev), S. T. und G. I. Budker: Relativistic kinetic equation. Doklady Akad. Nauk SSSR **107**, 807—810 (1956) [Russisch]; Übersetzung in Soviet Phys., Doklady **1**, 218—222 (1956).

Relativistische Verallgemeinerung der Theorie von L. D. Landau, Žurn. éksp. teor. fiz. **7**, 203—209 (1937).

Miyoshi, Yasunori: Theoretical analysis of buildup of current in transient Townsend discharge. Phys. Review, II. Ser. **103**, 1609—1618 (1956).

Der Verf. berechnet den Aufbau einer Townsendentladung zwischen zwei planparallelen Elektroden unter Berücksichtigung der Elektronenauslösung aus der Kathode durch Photonen und Ionen. Die Rechnung geht von der Kontinuitätsgleichung für die positiven und die negativen Ladungsträger aus und wird für die beiden Fälle eines konstanten fremderzeugten Kathodenstroms mit plötzlich eingeschaltetem Feld und eines konstanten Feldes mit plötzlich einsetzender Elektronenfreindauslösung aus der Kathode durchgeführt. Für die Strom-Zeit-Charakteristik ergeben sich in den einzelnen Zeitintervallen $0 \leq t \leq t_-$, $t_- \leq t \leq t_+ + t_-$, $t_+ + t_- \leq t$ (t_- Laufzeit der Elektronen, t_+ Laufzeit der Ionen für die Strecke Kathode—Anode) unterschiedliche Lösungen.

K. G. Müller.

Wolff, P. A.: Theory of plasma resonance. Phys. Review, II. Ser. **103**, 845—850 (1956).

Für ein Plasma zwischen zwei planparallelen Platten (eindimensionaler Fall) wird die Transportgleichung für die räumliche Verteilung der Elektronendichte aufgestellt. Unter der Voraussetzung einer nur kleinen Störung des stationären Falls kann diese Gleichung linearisiert und gelöst werden. Das Ergebnis beschreibt Elektronendichteschwingungen um den stationären Fall und bringt eine Formel für die Impedanz der Entladung in Abhängigkeit von der Frequenz. Hierbei wird ein Spezialfall im einzelnen durchgerechnet.

K. G. Müller.

Backus, G. E. and S. Chandrasekhar: On Cowling's theorem on the impossibility of self-maintained axisymmetric homogeneous dynamos. Proc. nat. Acad. Sci. USA **42**, 105—109 (1956).

Im Anschluß an ein Theorem von Cowling (dies. Zbl. **8**, 280) wird die Frage untersucht, ob ein Magnetfeld in einem Plasma solche elektrischen Ströme induzieren kann, die gerade dieses Magnetfeld wieder zur Folge haben (sich selbst erhaltender, oder stationärer Dynamo-Effekt). Als Ergebnis wird der folgende Satz bewiesen: „In einem Plasma homogener Dichte und Leitfähigkeit kann kein axialsymmetrischer stationärer Dynamo-Effekt existieren“.

S. v. Hoerner.

Chandrasekhar, S.: On the stability of the simplest solution of the equations of hydromagnetics. Proc. nat. Acad. Sci. USA **42**, 273—276 (1956).

Betrachtet man die magneto-hydrodynamischen Grundgleichungen für die Bewegung eines inkompressiblen Plasmas ohne Reibung und mit unendlicher Leitfähigkeit, so zeigt sich, daß eine exakte, stationäre Lösung einfachster Form gegeben ist durch

$$v_i = \pm H_i (\mu/4\pi\rho)^{1/2} \quad \text{und} \quad p + \rho V + (\mu/8\pi) |H|^2 = \text{const}$$

(v = Geschwindigkeit, H = Feldstärke, μ = Permeabilität, ρ = Dichte, p = Druck, V = Gravitationspotential). Weiterhin wird bewiesen, daß diese Lösung stabil ist gegenüber kleinen periodischen Störungen.

S. v. Hoerner.

Rosen, Philip: Electromagnetic waves in an ionized gas. Phys. Review, II. Ser. **103**, 390—394 (1956).

Üblicherweise wird für die komplexe Leitfähigkeit (eines schwach ionisierten Gases bei kleinem Druck für hohe Frequenzen) eine Formel angegeben, bei deren Ableitung die Stoßhäufigkeit der Elektronen mit Molekülen als örtlich konstant vorausgesetzt wurde. Weiterhin wurde zur Berechnung der räumlich variablen Elektronendichte stets ein räumlich konstanter Diffusionskoeffizient benutzt. — Es wird untersucht, wieweit diese Voraussetzungen zulässig sind. Im Falle der stehenden

Welle wird gezeigt, daß der Diffusionskoeffizient vom Ort abhängt. Bei der fortschreitenden ebenen Welle ergibt sich jedoch kein Einfluß auf die Leitfähigkeit.

S. v. Hoerner.

Pierce, J. R. and L. R. Walker: Growing electric space-charge waves. *Phys. Review*, II. Ser. **104**, 306—307 (1956).

Die Verff. nehmen Stellung zu der Kritik von Piddington zu ihren früheren Arbeiten über verstärkte elektrische Raumladungsschwingungen. Piddington (dies. Zbl. **70**, 237) hatte erklärt, daß die von ihnen beschriebenen verstärkten Schwingungen nur auf eine falsche Interpretation der Dispersionsgleichung zurückzuführen wären. Diese Arbeit skizziert noch einmal die Gesichtspunkte der Theorie der verstärkten Raumladungsschwingungen und entkräftet die Einwände Piddingtons.

K. G. Müller.

Schwarz, Gerhard: Zur Theorie der Leitfähigkeitsanisotropie von Polyelektrolyten in Lösung. *Z. Phys.* **145**, 563—584 (1956).

Polyionen, welche eine von der Kugelsymmetrie abweichende Gestalt haben, lassen sich in einem Elektrolyten etwa durch ein elektrisches Feld oder ein Strömungsgefälle ausrichten. Experimentell wurde gefunden, daß Leitfähigkeitsanisotropien bis zu 30% auftreten können. Verf. entwickelt in seiner Arbeit eine Theorie dieses Effektes. Bei bekannten Beweglichkeiten in Richtung der Figurenachsen und der Richtungsverteilungsfunktion läßt sich eine Gleichung für den Teilchenfluß herleiten. Es werden für einige Fälle die Richtungsverteilungsfunktionen berechnet und Leitfähigkeitsformeln angegeben.

H. Falkenhagen-G. Kelbg.

Matsubara, Takeo, Akira Morita and Namio Honda: Theory of Bose-Einstein condensation of an imperfect Bose-Einstein gas. *Progress theor. Phys.* **16**, 447—454 (1956).

Beim Übergang vom idealen Bosegas zu einem Ensemble mit Wechselwirkung treten in der Theorie Schwierigkeiten auf. Diese dokumentieren sich in den widerspruchsvollen Ergebnissen diverser bisher erschienener Arbeiten. Hier werden nun Zweierstöße zwischen den Teilchen des Gases betrachtet und die Besetzungszahlen der Energieniveaus berechnet. Es zeigt sich, daß der Phasenübergang am λ -Punkt ebenso wie im idealen Fall von dritter Ordnung ist.

W. Klose.

Thellung, A.: On the energy spectrum in quantum hydrodynamics and the theory of Helium II. *Helvet. phys. Acta* **29**, 103—127 (1956).

Der von Ziman (dies. Zbl. **51**, 227) sowie Allcock und Kuper (dies. Zbl. **67**, 235) mit Hilfe verschiedener Näherungsverfahren diagonalisierte Hamiltonoperator der Quantenhydrodynamik wird erneut mit Hilfe der gewöhnlichen Störungstheorie untersucht. Die Ruheenergie der Rotonen wird bis zur ersten nichtverschwindenden Ordnung (c^{-1}) einer Entwicklung nach fallenden Potenzen der Schallgeschwindigkeit c angegeben. Die Konstanten des Zweiflüssigkeitsmodells werden größenordnungsmäßig richtig wiedergegeben.

W. Brenig.

Hall, H. E. and W. F. Vinen: The rotation of liquid helium II. II. The theory of mutual friction in uniformly rotating helium II. *Proc. Roy. Soc. London*, Ser. A. **238**, 215—234 (1956).

(Teil I, Experimente, *ibid.* S. 204—214). Es werden verschiedene Theorien von rotierendem He II mit den experimentellen Ergebnissen verglichen, die man beim Durchgang des zweiten Schalls durch Helium zwischen zwei rotierenden Zylindern erhält. Es zeigt sich, daß das Feynmansche Modell [s. Gorter (Herausg.), *Low Temperature Physics I*, Amsterdam 1955, p. 36] besser ist, als alle anderen, da es zu der kleinsten Energie für den rotierenden Zustand führt. Es liefert außerdem die richtige Reibungskraft zwischen der Normal- und Supraphase. Weitere Experimente zur Bestätigung von Voraussagen der Feynman-Theorie werden angegeben.

W. Klose.

Ginzburg, V. L.: On the macroscopic theory of superconductivity. Soviet Phys., JETP 2, 589—600 (1956), Übersetz. von Žurn. éksp. teor. Fiz. 29, 748—761 (1955).

Die von Pippard [Proc. Roy. Soc. London, Ser A 216, 547 (1953)] vorgeschlagene Abänderung der Londonschen Gleichung wird diskutiert und als ungenügend begründet abgelehnt. Anschließend wird das Verhalten von Supraleitern in Hochfrequenzfeldern betrachtet, und es werden allgemeine (Dispersions-) Relationen für die Oberflächenimpedanz von Supraleitern aufgestellt. Abschließend wird der Einfluß des sog. anomalen Skineffektes in Normalleitern auf das Verhalten von Supraleitern diskutiert und verschiedene Berechnungsmethoden verglichen.

M. R. Schafroth.

Ginzburg, V. L.: On a macroscopic theory of superconductivity valid for every temperature. Doklady Akad. Nauk SSSR 110, 358—361 (1956) [Russisch]; Übersetzung in Soviet Phys., Doklady 1, 541—545 (1957).

Es ist oft nützlich, die Thermodynamik der Supraleiter durch ein „Zweiphasenmodell“ zu beschreiben, wobei die „Konzentration der supraleitenden Elektronen“, $|\chi|^2$, eine thermodynamische Variable ist. Die Thermodynamik ist dann durch eine freie Energie $F(T, H, |\chi|^2)$ bestimmt, wo T die Temperatur, H das Magnetfeld bedeuten. Im thermodynamischen Gleichgewicht nimmt $|\chi|^2$ denjenigen Wert $|\chi_0(T)|^2$ an, der die freie Energie zu einem Minimum macht. Es ist klar, daß eine Kenntnis der freien Energie im thermischen Gleichgewicht, $f(H, T) = F(T, H, |\chi_0(T)|^2)$ und von $|\chi_0(T)|^2$ nicht zur Berechnung von $F(T, H, |\chi|^2)$ ausreicht. Mit anderen Worten, aus thermodynamischen Daten allein ist das Zweiphasenmodell nicht bestimmt. Ginzburg und Landau [Žurn. éksp. teor. fiz. 20, 1064 (1950)] zeigten, daß das Zweiphasenmodell in natürlicher Weise zu einer (nichtlinearen) Theorie des Meißnereffekts erweitert werden kann. Es erhebt sich die Frage, ob in einer solchen Theorie die Funktion $F(T, H, |\chi|^2)$ aus experimentellen Daten bestimmt werden kann. Diese Frage wird in der vorliegenden Arbeit teilweise beantwortet: Es wird gezeigt, daß verschiedene Ansätze für $F(T, H, |\chi|^2)$, welche dasselbe $f(T, H)$ und $|\chi_0(T)|^2$ liefern, im allgemeinen zu verschiedenen Werten für die Oberflächenenergie (und verwandte Größen) führen.

M. R. Schafroth.

Schafroth, M. R. und J. M. Blatt: Phenomenological equations for superconductors. Nuovo Cimento, X. Ser. 4, 786—825 (1956).

Es werden Ansätze zu einer nichtlokalen makroskopischen Theorie der Supraleitung betrachtet. Stellt man den Suprastrom durch eine Magnetisierung \vec{M} dar: $\vec{J} = c \operatorname{rot} \vec{M}$, so gilt nach der Londonschen Theorie $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{M} = -(4\pi\lambda^2)^{-1} \vec{B}$, während für ein Diamagnetikum gelten würde: $\vec{M} = \chi \vec{B} / 1 + 4\pi\chi$. Zwischen diesen beiden Grenzfällen wird interpoliert, indem zunächst ein Orthogonalsystem von Funktionen $\vec{u}_n(\mathbf{r})$ eingeführt wird, die bestimmten Randbedingungen an der Oberfläche des Supraleiters genügen. Es wird dann \vec{M} und \vec{B} nach diesem Orthogonalsystem entwickelt und verschiedene Beziehungen zwischen den Entwicklungskoeffizienten gefordert. Diskutiert werden der Stromverlauf in der Eindringsschicht und der Skineffekt. Auf die Gleichgewichtsbedingungen wird nicht eingegangen.

H. Koppe.

Fester Körper:

Kaschluhn, F.: Zur spezifischen Wärme der Metallelektronen. Ann. der Physik, VI. F. 19, 94—101 (1956).

The influence of two effects on the Sommerfeld free electron specific heat is discussed: (i) The interaction with lattice oscillators, following Fröhlich. This reduces the Sommerfeld value of the specific heat coefficient γ (in the expression: specific heat $= \gamma T$) by 10%. (ii) The correlation effect, following Bohm and Pines. This in-

creases the Sommerfeld value of γ by about 30%. It is concluded that an increase of 25% is to be expected, and that this is not inconsistent with available experimental results for sodium. [Other recent reviews of this topic are not cited, for instance, D. Pines in „Solid State Physics“ (New York (1955)). *P. T. Landsberg.*]

● **Neal, B. G.:** The plastic methods of structural analysis. London: Chapman and Hall, Ltd. 1956. XI, 353 p. 45 s. net.

A large amount of research work during the last three decades has been devoted to the problem of the plastic methods of structural analysis, first in Germany and Russia and later in England and USA. These methods are now so fully developed that in practical design they can compete with conventional elastic methods, especially as they allow of a sounder conception of the load factor (ensuring in this way a better economy of design) and as they possess the advantage of simplicity and rapidity of calculation as well. It is worth noting that since 1948 the British Standards permit the use of these methods in the design of steel frames. The book under review which gives a survey of the achieved work and actual problems in this field is really welcome, all the more so as it comes from an author who has given remarkable contributions in this subject. The titles of the eight chapters of the book present clearly the matter treated: 1. Basic hypotheses, 2. Simple cases of plastic collapse, 3. Plastic collapse-basic theorems and simple examples, 4. General methods for plastic design, 5. Estimates of deflections, 6. Factors affecting the fully plastic moment. 7. Minimum weight design, 8. Variable repeated loading. To assist in the use of the book, examples have been provided at the end of each chapter with answers given at the end of the book. Appendices contain among other data the proofs of basic theorems which are only outlined in the text. The material contained in the first four chapters is presented in such a manner that it could be included in an undergraduate course in the Theory of Structures whereas the presentation in the remaining chapters, devoted to more advanced study, is equally straightforward and clear. A vast amount of references to the original papers add to the value of the book.

D. Radenković.

Park, David: A summation method for crystal statistics. *Physica* 22, 932—940 (1956).

Thermodynamische Mittelwerte der Magnetisierung, Energie usw. können für Kristalle zumeist nur in Form der ersten Glieder einer Potenzreihe angegeben werden. Im allgemeinen ist diese Potenzreihe in der Umgebung etwaiger Umwandlungstemperaturen unbrauchbar. Dort kann nur eine Summation der Reihe helfen. Verf. zeigt, wie man dies genähert (manchmal auch exakt) tun kann. Dabei ist die (physikalisch plausibel gemachte) Annahme entscheidend, daß das Resultat der Summation in jedem Falle eine (irrationale) algebraische Funktion sei oder doch sehr genau durch eine solche dargestellt werden könne.

G. Heber.

Morse, Philip M.: Waves in a lattice of spherical scatterers. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* 42, 276—286 (1956).

Das Verfahren von Slater (dies. Zbl. 17, 44) und Korringa [*Physica* 13, 392 (1947)] zur Behandlung des periodischen Potentialproblems wird weiter ausgebaut. Insbesondere werden einige ständig benötigte Gittersummen nach dem Ewaldschen Verfahren ausgewertet.

W. Brenig.

Callaway, Joseph: Electronic energy bands in potassium. *Phys. Review, II. Ser.* 103, 1219—1227 (1956).

Woodruff, Truman O.: Application of the orthogonalized plane-wave method to silicon crystal. *Phys. Review, II. Ser.* 103, 1159—1166 (1956).

Lifšic (Lifschiz), I. M. und S. I. Pekar: Die Tammschen gebundenen Elektronenzustände an der Kristalloberfläche und die Oberflächenschwingungen der Gitteratome. *Fortschr. Phys.* 4, 81—114 (1956).

Ungekürzte Übersetzung aus Uspechi fiz. Nauk 56, 531 (1955).

Der erste Teil dieses Artikels bringt einen Bericht über die Entwicklung der Theorie der Tammischen Oberflächenzustände. Im zweiten Teil werden die Erscheinungen betrachtet, in denen die Oberflächenzustände eine wesentliche Rolle spielen; ferner werden experimentelle Beweise für die Existenz solcher Zustände im Realkristall angeführt. Der dritte Teil des Artikels enthält die Theorie der Oberflächenschwingungen des Kristallgitters, die mit der Theorie der Oberflächenzustände mathematisch und genetisch verwandt ist. Autoreferat.

Brauer, W. und W. Klose: Zur Theorie des Oberflächeneffektes der Sekundäremission. Ann. der Physik, VI. F. 19, 116—132 (1956).

Es wird untersucht, welcher Beitrag zur Sekundäremission von einem an eine Oberfläche gebundenen Elektronenensemble geliefert wird. Bei Primärenergien $E_p^0 \approx 100$ eV können an leichteren Metallen, z. B. Kalium, etwa 30% der Ausbeute erklärt werden. Bei höheren E_p^0 und schwereren Metallen ist der Beitrag des Oberflächeneffekts zu vernachlässigen. Auf Tamm'sche Terme wird hingewiesen. Autoreferat.

Lifšic (Lifshitz), I. M.: Quantum theory of electrical conduction in a magnetic field. Soviet Phys., JETP 3, 774—776 (1956), Übersetz. von Žurn. èksper. teor. Fiz. 30, 814 (1956).

Der Dichteoperator f des Elektrons hat der Gleichung $(i/\hbar)(fH - Hf) + (W/t_0)(f - f^0) = 0$ zu genügen, wo der Operator H die Driftbewegung regelt und W/t_0 ein dem Stoßintegral analoger linearer Operator ist. Allein mit Magnetfeld ist $H = H^0$ mit f^0 ; bei Anwesenheit eines elektrischen Feldes \mathcal{E} wird $H = H^0 - e\mathcal{E} \cdot r$. Nach der üblichen Linearisierung bez. \mathcal{E} bekommt man eine einfachere Gleichung für $f^1 = f - f^0$. Hiermit wird die elektrische Stromdichte $j = e \text{Sp}(f^1 \dot{r})$ berechnet. Die Untersuchung findet Anwendung auf die galvanomagnetischen Effekte bei starken Magnetfeldern, weitere Einzelheiten sollen in ausführlicherer Form publiziert werden. B. Mühlischlegel.

Mühlischlegel, B.: Beitrag zur Leitfähigkeitstheorie der Metalle bei tiefen Temperaturen. Ann. der Physik, VI. F. 17, 199—213 (1956).

Für die Verteilungsfunktion $f(\vec{k})$ der Elektronen wird ein Ansatz der Form

$$f = \left(1 + \exp \frac{\varepsilon(\vec{k}) - \zeta}{\eta}\right)^{-1}$$

gemacht, bei dem ζ und η Funktionen von $\vec{k}/|k|$ sind, und einem System von gekoppelten Differentialgleichungen genügen, welches man erhält, wenn man die Teilchen resp. Energiebilanz für einen infinitesimalen Kegel mit \vec{k} als Achse aufstellt. Die Gleichungen werden für ein konstantes elektrisches Feld und einen konstanten Temperaturgradienten durch Entwicklung nach Kugelfunktionen gelöst. Die ausgerechnete erste Näherung stimmt mit den auf Grund der Bloch'schen Integralgleichung berechneten Werten für die elektrische resp. Wärmeleitfähigkeit überein.

H. Koppe.

Ginzburg, V. L. and V. P. Silin: The effect of interelectronic collisions on the electrical conductivity and skin effect in metals. Soviet Phys., JETP 2, 46—54 (1956), Übersetz. von Žurn. èksper. teor. Fiz. 29, 64—74 (1955).

Die Boltzmann-Gleichung für Elektronen im zeitveränderlichen äußeren elektrischen Feld wird durch ein Glied ergänzt, das die Elektronenwechselwirkung enthält. Ohne Elektronenaustausch gibt es keine Modifikation der Leitfähigkeit, mit Austausch in vereinfachter Form findet man eine Abnahme, die proportional der Elektron-Elektron-Stoßzahl ist. Weiterhin untersuchen die Verff. den Einfluß einer Elektronenzähigkeit, die ebenfalls durch die Stoßzahl charakterisiert ist. Es ergibt sich, daß die dadurch mögliche Modifikation des anomalen Skin-Effektes vernachlässigbar ist. Seit Erscheinen dieser Arbeit hat sich herausgestellt, daß vom Standpunkt der Bohm-Pines-Theorie die Wechselwirkung der Elektronen untereinander jedenfalls bei normalen Transporterscheinungen gegenüber der Gitterwechselwirkung unwesentlich ist. Änderungen des elektrischen Widerstandes usw. ergeben sich auch durch

genauere Analyse der Gitterwechselwirkung [vgl. Hanna und Sondheimer, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **239**, 247—266 (1957)]. *B. Mühlischlegel.*

Zyrjanov (Zyrianov), P. S.: On a theory of the electrical conductivity of metals. Soviet Phys., JETP **2**, 247—251 (1956), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. **29**, 193—200 (1955).

The fluctuations of potential of the internal electric field in the electron-ion plasma of a metal have been calculated. Starting with a linearized kinetic equation, the author obtained a dispersion equation yielding two branches of oscillations: acoustical and electronic. Taking account of the scattering of electrons by the fluctuations of potential, he computed the electrical resistivity following the method of Bloch and Bethe. In this paper, no remark has been made on the exchange effect of electrons which could play a considerable role in this problem [see V. P. Silin, Žurn. éksper. teor. Fiz. **27**, 269—274 (1954); J. Bardeen and D. Pines, Phys. Review, II. Ser. **99**, 1140—1150 (1955)]. *T. Nishiyama.*

Zyrjanov (Zyrianov), P. S. and V. M. Eleonskij (Eleonskii): Linearization of the Hartree equations. Soviet Phys., JETP **3**, 620—623 (1956), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. **30**, 592 (1956).

It has been shown that the time-dependent Hartree equation is capable of affording Bohm-Pines' dispersion equation of the electronic plasma. When the single particle wave function $\Psi_i(\mathbf{r}, t)$ is expressed by

$$\Psi_i(\mathbf{r}, t) = \sqrt{P_i(\mathbf{r}, t)} \exp \{-i S_i(\mathbf{r}, t)/\hbar\},$$

and the Hartree equation is linearized with respect to the density $P_i(\mathbf{r}, t)$ and the momentum ∇S_i , the dispersion equation results from the linear simultaneous equations. It is expected that this method will find its application to the nuclear surface oscillation. *T. Nishiyama.*

Vonsovskij (Wonsowski), S. V. (S. W.), A. V. (A. W.) Sokolov (Sokolow) und A. Z. (A. S.) Veksler (Wexler): Der Photoeffekt in Metallen. Fortschr. Phys. **4**, 115—148, 216—232 (1956).

Ungekürzte Übersetzung aus Uspechi fiz. Nauk **56**, 477 ff. (1955).

Die vorliegende Arbeit stellt einen zusammenfassenden Bericht dar über die bisherige Entwicklung der Theorie des äußeren Photo-Effekts an Metallen. Nach einer historischen Einleitung, die durch die Namen Hertz, Hallwachs, Lenard, Einstein gekennzeichnet ist, wird in großer Ausführlichkeit die halbempirische Theorie von Fowler behandelt, die die meisten Erfahrungen auf diesem Gebiet recht gut wiedergibt, vom theoretischen Standpunkt jedoch nicht voll befriedigt. Es folgt deshalb hier, wie auch in der historischen Entwicklung der Theorie, die Besprechung der ersten Arbeit Fröhlichs und der weitergehenden von Tamm und Schubin (dem ersteren ist diese Arbeit gewidmet) und von Mitchell, der mit seiner Theorie des Oberflächenphotoeffekts einen gewissen Abschluß brachte. Die Darstellung schließt sich im großen und ganzen der des letztgenannten Verf. an. Zur halbempirischen Theorie zurück führt dann wieder der offenbar von Sokolow stammende Beitrag zum Photoeffekt geordneter Legierungen, während der letzte Teil des Berichts, hauptsächlich auf Wexler zurückgehend, die halbempirische und die quantenmechanische Theorie des Photoeffekts an Ferromagnetika behandelt. Für die Theorie des eigentlichen Photoeffekts scheinen diese Erweiterungen der grundlegenden Ansätze jedoch kaum neue Einsichten zu liefern. *W. Brauer.*

Ichimura, Hiroshi: Quantum statistical mechanics of electron-phonon system. Progress theor. Phys. **15**, 151—166 (1956).

Die thermodynamischen Eigenschaften des einfachsten Metallmodells werden berechnet: Freie Elektronen in Blochscher Wechselwirkung mit Schallquanten, die in Debyescher Näherung behandelt werden. Die verwendete Methode ist Störungstheorie bis zur 2. Ordnung nach der Kopplungskonstanten. Die Schallgeschwindigkeit wird renormalisiert. *M. R. Schafroth.*

Ehrenreich, H. and A. W. Overhauser: Scattering of holes by phonons in germanium. Phys. Review, II. Ser. **104**, 331—342 (1956).

Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten bei der Streuung von Löchern durch Phononen in den beiden bei $k = 0$ entarteten Valenzbändern des Germaniums.
O. Madelung.

Ehrenreich, H. and A. W. Overhauser: Lattice-scattering mobility of holes in germanium. Phys. Review, II. Ser. **104**, 649—659 (1956).

Die Beweglichkeit von Löchern in Germanium wird unter Benutzung der in einer früheren Arbeit (s. vorstehendes Referat) berechneten Übergangswahrscheinlichkeiten berechnet. Bei geeigneter Wahl zweier Konstanten ergibt sich die experimentell gefundene Temperaturabhängigkeit $\mu \sim T^{-2,3}$.
O. Madelung.

O'Dwyer, J. J.: A note on the electron distribution function in insulators at high field strenght. Proc. Phys. Soc., Sect. B **69**, 685—686 (1956).

Verf. berichtet die in einer früheren Arbeit [Austral. J. Phys. **7**, 36—48 (1954)] ausgesprochene unberechtigte Kritik an einer Arbeit des Ref., wendet sich jedoch gegen eine dort vorgenommene Vernachlässigung (Anm. des Ref.: Inzwischen hat Ref. in seinem Artikel in Flügge, Hdb. d. Phys. Bd. **17**, Berlin 1956 die Theorie ohne Vernachlässigungen durchgeführt).
Walter Franz.

Tolpygo, K. B. and Z. I. Urickij (Uritskii): On the theory of polaron mobility. Soviet Phys., JETP **3**, 725—731 (1956), Übersetz. von Žurn. eksper. teor. Fiz. **30**, 929—937 (1956).

Im Anschluß an Pekar [vgl. Fortschr. d. Phys. **1**, 367 (1953)] berechnen Verff. die Energieübertragung von einem bewegten Polaron auf die akustischen und die transversalen optischen Gitterschwingungen. Die Elektronenbewegung wird quantenmechanisch behandelt, die Ionenbewegung klassisch. Es zeigt sich, daß für Alkalihalogenide dieser Effekt nicht vernachlässigt werden darf.
G. Höhler.

Haken, H.: Kopplung nicht-relativistischer Teilchen mit einem quantisierten Feld. 1. Das Exziton im schwingenden, polaren Kristall. Nuovo Cimento, X. Ser. **3**, 1230—1253 (1956).

Mit einem Variationsverfahren werden die stationären Zustände eines Exzitons (Elektron-Defektelektron-Paares) im schwingenden, polaren Kristall bestimmt, wobei die Einteilchenlösungen im schwingenden Gitter als bekannt vorausgesetzt werden. Es erfolgt für genügend große Exzitonenradien eine Rechtfertigung der Näherungen. Ferner wird auf die Anwendbarkeit der Methode zur nichtrelativistischen Behandlung der Kopplung von Nukleonen über ein Mesonfeld (im divergenzfreien Fall) hingewiesen.
G. Helmig.

Frank, D.: Zur Statistik der Spinwellen. Z. Phys. **146**, 615—628 (1956).

Es wird eine neue „Spinwellen“-Formulierung des ferromagnetischen Austauschproblems gegeben. Die Spinwellen sind hier Fermiteilchen mit einer recht undurchsichtigen Wechselwirkung. In niedrigster Näherung ergibt sich nicht dasselbe Resultat wie mit den Blochschen Spinwellen. Von F. J. Dyson [Phys. Review, II. Ser. **102**, 1217 (1956)] wurde indessen gezeigt, daß das Blochsche Resultat (bis zu Gliedern der betrachteten Ordnung) exakt ist, und daß die Wechselwirkung zwischen Blochschen Spinwellen (welche Bosestatistik befolgen) sehr schwach ist. Daraus scheint zu folgen, daß die Wechselwirkung zwischen den hier betrachteten „Spinwellen“ mit Fermistatistik nicht vernachlässigbar ist.
M. R. Schafroth.

Meyer, Klaus: Zur Spinwellentheorie des Ferromagnetismus. Z. Naturforsch. **11a**, 865—873 (1956).

In ähnlicher Weise wie von D. Frank (s. vorstehendes Referat) wird das ferromagnetische Austauschproblem durch neuartige „Spinwellen“, welche Fermistatistik befolgen, beschrieben.
M. R. Schafroth.

Freeman, J. Dyson: General theory of spin-wave interactions. Phys. Review, II. Ser. **102**, 1217—1230 (1956).

Freeman, J. Dyson: Thermodynamic behavior of an ideal ferromagnet. Phys. Review, II. Ser. **102**, 1230—1244 (1956).

Die Blochsche Theorie des ferromagnetischen Austauschproblems beruht darauf, „Spinwellen“ zu bilden, d. h. periodische Linearkombinationen von lokalen Abweichungen von vollständiger Orientierung des Spins der Elektronen. Die Wechselwirkung zwischen solchen Spinwellen wird dann vernachlässigt, was sicher berechtigt ist, solange die Spinwellen wenig angeregt sind, das heißt bei tiefen Temperaturen. Auf dieser Grundlage fand Bloch, daß die spontane Magnetisierung $M(T)$ für tiefe Temperaturen die Form hat

$$(1) \quad M(T) = M_0 (1 - \gamma T^{3/2} + O(T^{5/2}))$$

Es entsteht dann die Frage, ob die vernachlässigten Wechselwirkungen nicht Korrekturen zu (1) bewirken, die bedeutender sind als der Term in $T^{5/2}$. Verschiedene Behandlungen dieser Frage auf Grund von Näherungsmethoden gaben widersprechende Antworten. Die vorliegenden zwei Arbeiten lösen das Problem exakt. Zunächst wird eine allgemeine Theorie der Spinwellen und ihrer Wechselwirkungen entwickelt, mit vielen interessanten Nebenresultaten, wie z. B. dem Wirkungsquerschnitt für Streuung von Spinwellen aneinander. Der allgemeine Ausdruck für die freie Energie des Spinwellensystems wird dann nach Potenzen der absoluten Temperatur T entwickelt. Es ergibt sich, daß sich der exakte Ausdruck vom Blochschen (1) erst in Gliedern in T^4 unterscheidet. Die widersprechenden Resultate früherer, auf Grund von Näherungsmethoden verfahrenen Arbeiten, stammten von einer Merkwürdigkeit des Spinwellensystems, die wohl der Erwähnung verdient: neben unbedeutenden wahren „dynamischen“ Wechselwirkungen üben Spinwellen aufeinander noch „kinematische“ Wirkungen aus, die daher stammen, daß zwei sich auf einem Elektron kreuzende Spinwellen sich nur so lange linear superponieren können, bis der Spin des Elektrons vollständig umgeklappt ist. Diese Wechselwirkung erzeugt scheinbar große Effekte, die sich aber in einer exakten Rechnung fast vollständig gegeneinander wegheben, während Näherungen diese Kompensation sofort stören. Der Endeffekt der „kinematischen“ Wechselwirkung auf $M(T)$ besteht bloß in exponentiell kleinen Termen ($\sim e^{-T_0/T}$). Physikalisch heißt dies, daß die „kinematischen“ Wirkungen erst dann bemerkbar werden, wenn die Amplitude der Spinwellen von der Größenordnung vollständiger Umklappung ist, was erst bei der Curie-Temperatur ($\sim T_0$) eintritt.

M. R. Schafroth.

Tolmačev (Tolmachev), V. V. and S. V. Tjablikov (Tiablikov): A method of calculation of partial functions for a ferromagnet with allowance for restrictions on the spin waves occupation numbers. Doklady Akad. Nauk SSSR **108**, 1029—1031 (1956) [Russisch].

Verff. beachten, daß im Heisenberg-Modell eines Ferromagnetikums mit einem Valenzelektron pro Atom der Spin jedes Atomes nur $\pm \hbar/2$ sein kann. Die in der ursprünglichen Blochschen Spinwellen-Theorie enthaltenen unphysikalischen Zustände mit höheren Spins pro Atom werden durch Einführung eines Projektionsoperators in die Zustandssumme ausgeschlossen. Als Energieniveaus werden die schon von Bloch angegebenen Spinwellenniveaus erster Näherung benutzt. In einer gewissen Näherung (vor allem bei genügend tiefen Temperaturen) ergibt sich dann wieder Blochs Resultat für die Zustandssumme.

G. Heber.

Gennes, Pierre-Gilles de: Sur le calcul des premières excitations dans les substances magnétiques. C. r. Acad. Sci., Paris **243**, 1730—1732 (1956).

Mit Hilfe eines einfachen Ansatzes und des Variationsprinzips der Wellenmechanik wird eine Gleichung für die Schrödinger-Funktion bei Vorhandensein einer Spinwelle abgeleitet. Einige Eigenschaften der Lösungen dieser Gleichung

werden besprochen. Auch die Beziehung dieser Lösungen zur Blochwand-Energie wird diskutiert.

G. Heber.

Kasuya, Tadao: A theory of metallic ferro- and antiferromagnetism on Zener's model. Progress theor. Phys. 16, 45—57 (1956).

Verf. entwirft eine Spinwellentheorie der $s-d$ -Wechselwirkung in Ferro- und Antiferromagnetika. Das Resultat, daß die Energie der Spinwellen im ferromagnetischen Fall genau wie bei $d-d$ -Wechselwirkung vom Quadrat der Wellenzahl der Spinwellen abhängt, steht i. a. im Widerspruch zu Resultaten des Ref. (dies. Zbl. 53, 187). Der entscheidende Punkt dürfte der Übergang von Gl. (15) zu (16) in vorliegender Arbeit sein. Nach Ansicht des Ref. fehlt in (16) ein Glied \sim dem Quadrat der z -Komponente der d -Spins. Bei Anwesenheit dieses Gliedes wäre der Widerspruch verschwunden.

G. Heber.

Kasuya, Tadao: Electrical resistance of ferromagnetic metals. Progress theor. Phys. 16, 58—63 (1956).

Die in vorstehender Arbeit entwickelte Theorie wird in vereinfachter Form (Molekularfeld-Näherung) zur Berechnung der elektrischen Leitfähigkeit ferromagnetischer Metalle verwendet.

G. Heber.

Kasteleijn, P. W. and J. van Kranendonk: Constant coupling approximation for Heisenberg ferromagnetism. Physica 22, 317—337 (1956).

Aus der Zustandssumme eines Ferromagnetikums mit Heisenbergscher isotroper Austauschkopplung wird ein effektiver Hamilton-Operator für das (im thermodynamischen Sinne) mittlere Verhalten von zwei benachbarten Spins abgeleitet. Dieser effektive Hamiltonoperator ist natürlich temperaturabhängig. Verff. zeigen, wie man aus ihm die Weißsche Molekularfeld-Theorie gewinnen kann, und führen dann eine neue Näherung ein: Der Grenzwert des effektiven Hamilton-Operators bei unendlich hoher Temperatur wird bei beliebigen Temperaturen verwendet. Man kann dann praktisch alle interessierenden Größen berechnen und hat eine Methode, die der cluster-Methode (P. R. Weiß) ähnlich, ihr aber wohl etwas überlegen ist.

G. Heber.

Kasteleijn, P. W. and J. van Kranendonk: Constant coupling approximation for antiferromagnetism. Physica 22, 367—385 (1956).

Verff. wenden das früher entwickelte Verfahren der „Konstanten Kopplung“ (s. vorst. Referat) auf den Antiferromagnetismus an. Dabei zeigt sich, daß die Methode auch in diesem Fall enge Beziehungen zum Cluster-Verfahren von Weiss (auf den Antiferromagnetismus von Li angewandt) besitzt. Insbesondere tritt auch hier neben dem Curie- ein Anti-Curie-Punkt auf, weshalb das vorgeschlagene Verfahren für hohe Temperaturen besser sein dürfte als für tiefe Temperaturen. Übrigens legen Verff. den besprochenen Rechnungen die isotrope Heisenberg-Kopplung zugrunde und beschränken sich auf Substanzen mit „Zwei- unter Gitter-Struktur“.

G. Heber.

Kasteleijn, P. W.: Constant coupling approximation for ising spin systems. Physica 22, 387—396 (1956).

Das früher entwickelte Verfahren der „Konstanten Kopplung“ wird auf ferromagnetische und antiferromagnetische Systeme mit Ising-Kopplung angewandt. Die Resultate stimmen hierbei besser mit der Erfahrung überein als bei Ersatz der Ising- durch die Heisenberg-Kopplung. Insbesondere erscheint kein Anti-Curie-Punkt.

G. Heber.

Elliott, R. J.: Theory of neutron scattering by conduction electrons in a metal and on the collective-electron model of a ferromagnet. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 235, 289—304 (1956).

In der Bornschen Näherung werden die Wirkungsquerschnitte für die Streuung von langsamen Neutronen berechnet für ein typisches Alkalimetall und für ein ferromagnetisches Metall. Bei letzterem wird vorausgesetzt, daß die streuenden Elek-

tronen durch Stoners Kollektiv-Elektronen-Modell beschrieben werden können. Die Theorie sagt eine schwache, beinahe diffuse Streuung voraus. Das Resultat wird mit anderen Rechnungen verglichen, in denen andere Annahmen über die ferromagnetischen Elektronen gemacht werden. Die Experimente können zwischen den verschiedenen Theorien anscheinend noch nicht entscheiden. *G. Heber.*

Gross, E. P. and J. L. Lebowitz: Quantum theory of dielectric relaxation. *Phys. Review*, II. Ser. **104**, 1528—1531 (1956).

Die die zeitliche Entwicklung eines Systems, welches durch „Stöße“ mit einem Wärmereservoir der Temperatur T in Wechselwirkung steht, beschreibenden kinetischen Gleichungen für die klassische Verteilungsfunktion bzw. den quantenmechanischen statistischen Dichteoperator werden aufgeschrieben, und die an den die Änderung des Dichteoperators infolge der Stöße beschreibenden Term zu stellenden Forderungen werden betrachtet. Auf die Ableitung solcher Stoßterme aus dem Hamiltonoperator des das Wärmereservoir einbeziehenden Gesamtsystems wird nicht eingegangen. Unter der Voraussetzung, daß die Stöße die Lagekoordinaten ungeändert lassen, wird die dielektrische Relaxation zweidimensionaler Dipole untersucht und eine explizite Lösung der quantenmechanischen Gleichung angegeben. Diese liefert für niedrige Stoßfrequenzen $1/\tau$ diskrete Rotationslinien und für hohe Stoßfrequenzen ein kontinuierliches Debye-Spektrum. *H. Stolz.*

Gurevič (Gurevich), L. É. and V. N. Gribov: Dielectric losses in ionic-dielectrics in strong electric fields. *Soviet Phys., JETP* **2**, 565—569 (1956), Übersetzung von *Žurn eksper. teor. Fiz.* **29**, 629—636 (1955).

Die kinetische Gleichung, welche die Verteilung der Ionen eines Dielektrikums auf zwei benachbarte Plätze unter dem Einfluß eines elektrischen Wechselfeldes beschreibt, wird gelöst und die dielektrischen Verluste werden für ein starkes elektrisches Feld in den Grenzfällen hoher und tiefer Frequenzen berechnet. Es zeigt sich, daß bei hohen Frequenzen die Verluste frequenzunabhängig sind und bei tiefen Frequenzen mit steigender Frequenz wachsen, analog den Resultaten, welche von *Skanavi* für schwaches elektrisches Feld gewonnen wurden. *H. Stolz.*

Toupin, Richard A.: The elastic dielectric. *J. rat. Mech. Analysis* **5**, 849—915 (1956).

Mit Hilfe der Prinzipien der Mechanik und Elektrostatik gibt der Verf. eine Theorie des elastischen Dielektrikums, welches als ein Kontinuum angesehen wird, dessen Zustand durch Deformation und elektrische Polarisierung bestimmt ist. Die Arbeit ist sehr ausführlich gehalten. Sie beginnt mit interessanten Betrachtungen über Tensorfelder. Es werden Anwendungen auf isotrope und nichtisotrope Dielektrika gegeben. Viele spezielle Probleme werden näher diskutiert, darunter auch die Photoelastizität. *H. Falkenhagen-G. Kelbg.*

Krishnan, K. S. and S. K. Roy: The Drude dispersion formula shown to be applicable to any medium irrespective of the polarization field. *Philos. Mag.*, VIII. Ser. **1**, 926—933 (1956).

Es wird gezeigt, daß sich auch für ein dichtes optisches Medium die wohlbekannte Drudesche Dispersionsformel ableiten läßt, wenn man die Wechselwirkung zwischen den Oszillatoren mit den Eigenfrequenzen Ω_i dadurch beschreibt, daß man die Polarisierbarkeit χ_i des Oszillators der Eigenfrequenz Ω_i als lineare Funktion der Polarisierbarkeiten χ_j aller Oszillatoren ansetzt. Die in der so gewonnenen Drudeschen Formel auftretenden Eigenfrequenzen ω_i und Oszillatorstärken a_i sind Funktionen der entsprechenden Größen Ω_i und A_i der isolierten Oszillatoren und der Koeffizienten p_{ij} , welche die Wechselwirkung zwischen den Oszillatoren vom Typ i und j beschreiben und alle verschieden sein können. Im Spezialfall $p_{ij} = p = \frac{4}{3}\pi$ ist die so gewonnene Drudesche Dispersionsformel der Lorentzschen mathematisch äquivalent. Für Substanzen, deren feste Phase aus individuellen Molekülen aufgebaut ist, liefern Dispersionsmessungen an der Dampfphase und an der festen

Substanz die Größen Ω_i , A_i und ω_i , a_i , aus welchen für Spektralbereiche, in denen man mit drei Eigenfrequenzen auskommt, die p_{ij} bestimmt werden können.

H. Stolz.

Astronomie. Astrophysik. Geophysik.

Sconzo, Pascual: Die Störungen in den heliozentrischen Koordinaten, berechnet nach einem numerischen Verfahren der analytischen Fortsetzung. *Revista Un. mat. Argentina* 17, 223—229 (1956) [Spanisch].

Die Gleichungen für die Bewegung eines Planeten in rechtwinkligen Koordinaten unter dem Einfluß von Störungen werden nach einem speziellen Verfahren integriert. Ausgehend von Anfangswerten zu einem gewissen Zeitpunkt t_0 für Koordinaten und Geschwindigkeiten werden deren Werte für einen späteren Zeitpunkt $t_0 + w$ unter Berücksichtigung von Störungen berechnet. Innerhalb des Intervalls der Länge w wird zur Darstellung der Koordinaten eine in diesem Intervall konvergente Taylorsche Reihe benutzt, aus der auch die Werte der Koordinaten und Geschwindigkeiten am Intervallende folgen. Diese dienen als neuer Ausgangspunkt für die entsprechende Rechnung im nächsten Intervall der Länge w . Durch dauernde Fortsetzung des Verfahrens können die Differentialgleichungen für beliebig lange Zeiträume integriert werden.

F. Schmeidler.

Blitzer, Leon, Morris Weisfeld, and Albert D. Wheelon: Perturbations of a satellite's orbit due to the earth's oblateness. *J. appl. Phys.* 27, 1141—1149 (1956).

Die Verf. nehmen die Gelegenheit, demnächst Messungen an einem künstlichen Satelliten durchführen zu können, zum Anlaß, das schon von Lagrange und Laplace behandelte Problem, aus der Bahn des Mondes die dynamische Abplattung der Erde zu bestimmen, entsprechend den jetzigen Gegebenheiten zu bearbeiten. Unter Zugrundelegung des in Multipolfeldern entwickelten Gravitationsfeldes der Erde und unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes (durchschnittliche Höhe des Satelliten 300 km über der Erdoberfläche) werden die allgemeinen Bewegungsgleichungen eines Satelliten aufgestellt und diskutiert. Durch Spezialisierung dieser wird die Bahngleichung abgeleitet, die einem kugelsymmetrischen Gravitationsfeld entspricht. Dann werden die Abweichungen von dieser Bahn errechnet, die von einem zusätzlichen Quadrupolfeld herrühren; diese sind analytisch darstellbar und werden charakterisiert durch eine retrograde Bewegung der Knoten, der Durchstoßpunkte der Satellitenbahn durch die Erdäquatorebene, die etwa 60 km pro Umlauf beträgt. Eine Diskussion der Beobachtungsmöglichkeiten ergibt, daß sich aus den funkttechnisch meßbaren Abweichungen die zum Quadrupolglied gehörige Koppelungskonstante gut bestimmen läßt. Die zum Oktupolglied gehörige, um zwei Größenordnungen kleinere Koppelungskonstante geht aus diesen Messungen wegen verschiedener Unsicherheiten nicht mehr mit entsprechender Genauigkeit hervor.

W. Strohmeier.

Stumpff, P.: Über die stereoskopische Kombination von Kometenaufnahmen. *Astron. Nachr.* 283, 193—210 (1956).

Der Verf. zeigt, daß sich M. Wolfs Beschreibung einer „Stereoaufnahme“ des Kometen Morehouse (1908c) auf keine echten stereoskopischen Effekte bezieht. Wendet man die stereo-photogrammetrischen Grundbegriffe (die in der Arbeit kurz zusammengestellt werden) auf die für die Kometenaufnahmen geltenden astronomischen Verhältnisse an, so ergibt sich, daß die echten stereoskopischen Effekte weit unter der Wahrnehmbarkeitsgrenze liegen. Das Raumbild, das sich bei der Betrachtung der beiden im Abstand von 24 Minuten gemachten Aufnahmen im Stereokomparator darbietet, wird vorgetäuscht durch Bewegungsvorgänge, die innerhalb dieser Zeit im Schweif stattfanden, insbesondere durch Verdrehung von Schweifstrahlen. Quantitative Beziehungen zwischen der Lage des Kometenkopfes und eines Schweifstrahles im Stereokomparator und der Verdrehung des betreffenden Schweif-

strahles einerseits und der Lage des Raumbildes andererseits werden abgeleitet und diskutiert. Zwei Sätze werden aufgestellt, die eine qualitative Interpretation des Raumbildes ermöglichen. Eine Anwendung dieser zeigt, daß M. Wolf den Prozeß des Heranklappens seitlicher Schweifstrahlen an die primäre Schweifachse beschreibt, in dem sich der Komet zur Zeit der Aufnahmen befand. Innere Schweifstrahlen drehten sich dabei schneller als äußere. Ein Verfahren wird angegeben, das ermöglicht, diese Bewegungsvorgänge auch quantitativ mit dem Stereokomparator zu verfolgen. Es beruht darauf, die Tiefenstrukturen mit einer beweglichen Tiefenmarke abzutasten und so die in der Zwischenzeit erfolgten differentiellen Bewegungen direkt zu messen. Die Ergebnisse, die der Verf. erhielt, als er dieses Verfahren auf die von M. Wolf beschriebenen Aufnahmen anwandte, stehen noch aus. *W. Strohmeier.*

Neyman, Jerzy and Elizabeth L. Scott: Statistics of images of galaxies with particular reference to clustering. Proc. 3rd Berkeley Sympos. math. Statist. Probability **3**, 75—111 (1956).

Zusammenfassende Übersicht und Fortführung von zwölf vorausgegangenen Einzelarbeiten zur Statistik extragalaktischer Nebel. Teil I: Beobachtungsgrundlagen (Nebelzählungen), Teil II: Statistische Theorie. Um stochastische Modelle der Raumverteilung der Galaxien konstruieren und untersuchen zu können, werden Beobachtungsbefunde verallgemeinert und axiomatisiert. Im wesentlichen werden drei verschiedene Modelle diskutiert. (1) Einfaches Haufen-Modell. Galaxien kommen nur in Haufen vor, deren Mitgliederzahl eine Zufallsveränderliche ist, die durch eine einheitliche erzeugende Funktion charakterisiert wird, und deren Zentren quasi-gleichförmig im Raum verteilt sind. Im allgemeinen Fall können sich die Nebelhaufen mehr oder minder durchdringen. (2) Läßt man Haufenbildung von Haufenzentren oder Zentren von Haufen höherer Ordnung zu, so gelangt man zum Modell vielfacher Häufungstendenz. (3) Fluktuationsmodelle. Besonders Schwierigkeit bereitet die mathematische Fassung des Abzählvorgangs (Sichtbarkeit eines Nebelbildes auf der photographischen Platte und Zählfehler aller Art). Es wird auf den Fall eines expandierenden Universums und einer entfernungsabhängigen Verfärbung verallgemeinert, doch kann eine Entscheidung zwischen diesen Alternativen nicht gefällt werden. Abschließend werden einige wichtige ungelöste Fragen aufgezählt.

Theodor Schmidt.

Armellini, Giuseppe: Sopra l'orbita descritta da un astro in un ammasso stellare sferico. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **21**, 8—13 (1956).

Nimmt man als (geglättete) Dichtefunktion eines kugelförmigen Sternhaufens $\rho = B \cdot (b^2 + r^2)^{-5/2}$ (Plummer) an, so kann die Bahnkurve eines Massenpunktes mittels elliptischer Integrale explizit angegeben werden (Parameterdarstellung der Polarkoordinaten r bzw. ϑ durch die Weierstraßschen Funktionen σ bzw. \wp).

Theodor Schmidt.

● **Ellison, M. A.: The sun and its influence. An introduction to the study of solar-terrestrial relations.** London: Routledge and Kegan Paul Ltd.; New York-London: Macmillan Company 1956. XII, 235 p. \$ 4,50.

In einer für Leser mit Kenntnissen der elementaren Grundlagen der Physik leicht verständlichen Weise werden die Einflüsse der Sonne auf die Erde dargestellt. Dabei wird eine möglichst anschauliche Argumentation verwendet. Die wenigen, einfachen Rechnungen sind in einem kurzen Anhang untergebracht. Das Buch vermittelt vor allem Tatsachen und geht nur kurz auf Theorien, z. B. des Nordlichts ein. Im einzelnen werden die Atmosphäre der Sonne, die Protuberanzen, die Sonnenflecken und -fackeln behandelt, sowie die Einflüsse der Sonne auf die Ionosphäre (Ausbreitung von Radiowellen), die Variationen des irdischen Magnetfeldes und das Nordlicht. Abschließend geht der Verfasser auf Radiowellen von der Sonne und auf die Höhenstrahlung ein.

H. W. Streitwolf.